

Теоретическая физика

УДК 514.82:514.774.2

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ 4-МНОГООБРАЗИЯ КОНФОРМНОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Л. Н. Кривоносов¹, В. А. Лукьянов²

¹ Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Россия, 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

² Заволжский филиал Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева, Россия, 606520, Нижегородская обл., Заволжье, ул. Павловского, 1а.

Вычислены базисные калибровочно-инвариантные тензоры, алгебраически выражающиеся через матрицу конформной кривизны. В частности, разложение основного тензора на калибровочно-инвариантные неприводимые слагаемые состоит из 4-х слагаемых, одно из которых определяется только одним скаляром. Этот скаляр, во-первых, входит в уравнения Эйнштейна с космологическим членом в виде космологического скаляра. Во-вторых, метрика, будучи умноженной на этот скаляр, становится калибровочно-инвариантной. В-третьих, геометрическая точка, не являющаяся калибровочно-инвариантной, после умножения на квадратный корень из этого скаляра становится калибровочно-инвариантным объектом — материальной точкой. В-четвертых, уравнения движения материальной точки оказываются точно такими же, как и в общей теории относительности, что позволяет отождествить корень квадратный из этого скаляра с массой. В итоге получен неожиданный результат: космологический скаляр совпадает с квадратом массы. В-пятых, космологический скаляр позволяет ввести на многообразии калибровочно-инвариантную 4-меру. С помощью этой меры найден новый вариационный принцип для уравнений Эйнштейна с космологическим членом. Матрица конформной кривизны кроме компонент основного тензора содержит и другие компоненты. Найдены все основные калибровочно-инвариантные тензоры, выражающиеся через эти компоненты. Они имеют валентность 3 или 1. Выполнение уравнений Эйнштейна равносильно калибровочной инвариантности одного из этих ковекторов. Поэтому многообразие конформной связности, где выполняются уравнения Эйнштейна, можно подразделить на 4 вида по типу этого ковектора: времениподобный, пространственноподобный, светоподобный или нулевой.

Ключевые слова: конформная связность, калибровочная группа, уравнения Эйнштейна, космологический член.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1291>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, “Калибровочно-инвариантные тензоры 4-многообразия конформной связности без кручения и их применения для моделирования пространства-времени” // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 2 (35). С. 180–198. doi: [10.14498/vsgtu1291](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1291).

Введение. Статья является непосредственным продолжением исследований, опубликованных в [1], в частности, сохраняются обозначения и терминология. Хотя в [1] мы определили наше понимание калибровочной группы, но в настоящей статье это понятие становится центральным. Поэтому разъясим его подробнее. Структурная группа слоя расслоенного пространства действует в разных слоях независимо и потому не является функцией точки базового многообразия. Но в большинстве задач, требующих для решения рассмотрения расслоенного пространства, исследуемый объект задан не в отдельной точке базового пространства, а непрерывно или гладко зависит от точки некоторого подмножества базы. Поэтому и параметры структурной группы, действующей на этот объект, должны быть непрерывными или гладкими функциями точки этого подмножества. Группы, параметры которых являются функциями точки пространства-времени, в физике называются калибровочными. Таким образом, структурная группа расслоенного пространства чаще всего используется как калибровочная группа базы. Но использование структурной группы слоя как калибровочной группы базы осуществляется, как правило, при задании в расслоенном пространстве дополнительной геометрической структуры — связности. В статьях [1–6] 4-многообразие конформной связности с сигнатурой угловой метрики $(-+++)$ трактуется как модель пространства-времени, поэтому структурную группу слоя расслоенного пространства мы называем калибровочной группой.

Напомним [1], что 4-многообразие конформной связности мы рассматриваем как базу расслоенного пространства, слоем которого служит 5-мерное проективное пространство P_5 с фиксированной в нем квадрикой. Для обеспечения необходимой сигнатуры угловой метрики эту квадрику в подходящем репере из 6 точек проективного пространства $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ следует задать в виде

$$-(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 + 2x_0x_5 = 0. \quad (1)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений этого репера имеют вид

$$\begin{aligned} dX_0 &= X_0\omega_0^0 + X_i\omega^i, \\ dX_5 &= -X_i\eta^{ij}\omega_j - X_5\omega_0^0, \\ dX_i &= X_0\omega_i + X_k\omega_i^k - X_5\eta_{ij}\omega^j, \end{aligned} \quad (2)$$

где η_{ij} — стандартный тензор Минковского сигнатуры $(-+++)$, индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения 1, 2, 3, 4. Матрица пфаффовых форм

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ \omega_1^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1 \\ \omega_2^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 & -\omega_2 \\ \omega_3^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 & -\omega_3 \\ \omega_4^4 & \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 & -\omega_4 \\ 0 & \omega_1^1 & -\omega_2^2 & -\omega_3^3 & -\omega_4^4 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}$$

Сведения об авторах: *Леонид Николаевич Кривonosов* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики. *Вячеслав Анатольевич Лукьянов*, старший преподаватель, каф. информатики и общеобразовательных дисциплин.

E-mail addresses: oxyzt2@ya.ru (L.N. Krivonosov, *Corresponding author*), oxyzt@ya.ru (V.A. Luk'yanov)

называется матрицей *конформной связности*. Её задание на каждой карте некоторого атласа определяет структуру многообразия конформной связности. Через матрицу Ω вычисляется матрица Φ конформной кривизны, состоящая из внешних 2-форм:

$$\Phi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0 \\ \Phi_1^1 & 0 & \Phi_1^2 & \Phi_1^3 & \Phi_1^4 & \Phi_1 \\ \Phi_2^2 & \Phi_1^2 & 0 & -\Phi_2^3 & -\Phi_2^4 & -\Phi_2 \\ \Phi_3^3 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & 0 & -\Phi_3^4 & -\Phi_3 \\ \Phi_4^4 & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & 0 & -\Phi_4 \\ 0 & \Phi_1^1 & -\Phi_2^2 & -\Phi_3^3 & -\Phi_4^4 & -\Phi_0^0 \end{pmatrix}.$$

В развернутом виде

$$\begin{aligned} \Phi_0^0 &= d\omega_0^0 + \omega_i \wedge \omega^i, \\ \Phi_j^i &= d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega^i \wedge \omega_j + \eta^{im} \eta_{jn} \omega_m \wedge \omega^n, \\ \Phi_i &= d\omega_i + \omega_k \wedge \omega_i^k + \omega_0^0 \wedge \omega_i, \\ \Phi^i &= d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k + \omega^i \wedge \omega_0^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Калибровочная группа порождается следующими преобразованиями репера:

1) преобразованиями перенормировки

$$\widetilde{X}_0 = \lambda X_0, \quad \widetilde{X}_5 = \frac{1}{\lambda} X_5, \quad \widetilde{X}_i = X_i;$$

2) преобразованиями нормализации

$$\widetilde{X}_0 = X_0, \quad \widetilde{X}_5 = X_5 - \eta^{ij} \lambda_j X_i - \frac{1}{2} \eta^{ij} \lambda_i \lambda_j X_0, \quad \widetilde{X}_i = X_i + \lambda_i X_0;$$

3) преобразованиями Лоренца

$$\widetilde{X}_0 = X_0, \quad \widetilde{X}_5 = X_5, \quad \widetilde{X}_i = \lambda_i^j X_j,$$

где (λ_i^j) — матрица Лоренца, определяемая условиями $\eta_{ij} \lambda_m^i \lambda_n^j = \eta_{mn}$. Это все те проективные преобразования P_5 , которые квадрику (1) переводят в себя и оставляют неподвижной точку X_0 .

Из уравнений (2) вытекают следующие формулы преобразования компонент матрицы конформной связности:

1) преобразования перенормировки

$$\widetilde{\omega}_0^0 = \omega_0^0 + \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \widetilde{\omega}^i = \lambda \omega^i, \quad \widetilde{\omega}_i = \frac{1}{\lambda} \omega_i, \quad \widetilde{\omega}_i^j = \omega_i^j;$$

2) преобразования нормализации

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_0^0 &= \omega_0^0 - \lambda_k \omega^k, \quad \widetilde{\omega}^i = \omega^i, \quad \widetilde{\omega}_i^j = \omega_i^j + \lambda_i \omega^j - \eta^{mj} \lambda_m \eta_{ik} \omega^k, \\ \widetilde{\omega}_i &= \omega_i + d\lambda_i - \lambda_k \omega_i^k + \lambda_i \omega_0^0 - \lambda_i \lambda_k \omega^k + \frac{1}{2} \eta^{mn} \lambda_m \lambda_n \eta_{ik} \omega^k; \end{aligned}$$

3) преобразования Лоренца

$$\widetilde{\omega}_0^0 = \omega_0^0, \quad \widetilde{\omega}^i = (\lambda^{-1})_k^i \omega^k, \quad \widetilde{\omega}_i = \lambda_i^k \omega_k, \quad \widetilde{\omega}_i^j = (\lambda^{-1})_m^j d\lambda_i^m + (\lambda^{-1})_m^j \omega_k^m \lambda_i^k,$$

где $(\lambda^{-1})_i^k$ — матрица, обратная к матрице Лоренца (λ_i^j) .

Из этих формул видно, что квадратичная форма $\psi = \eta_{ij} \omega^i \omega^j$ изменяется только при перенормировке:

$$\widetilde{\psi} = \lambda^2 \psi.$$

Она называется *угловой метрикой*.

В свою очередь, калибровочные преобразования матрицы конформной связности Ω индуцируют преобразования компонент матрицы Φ конформной кривизны:

1) преобразования перенормировки

$$\widetilde{\Phi}_0^0 = \Phi_0^0, \quad \widetilde{\Phi}^i = \lambda \Phi^i, \quad \widetilde{\Phi}_i = \frac{1}{\lambda} \Phi_i, \quad \widetilde{\Phi}_i^j = \Phi_i^j; \quad (4)$$

2) преобразования нормализации

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_0^0 &= \Phi_0^0 - \lambda_k \Phi^k, \\ \widetilde{\Phi}^i &= \Phi^i, \\ \widetilde{\Phi}_i^j &= \Phi_i^j + \lambda_i \Phi^j - \eta^{mj} \lambda_m \eta_{ik} \Phi^k, \\ \widetilde{\Phi}_i &= \Phi_i - \lambda_k \Phi_i^k + \lambda_i \Phi_0^0 - \lambda_i \lambda_k \Phi^k + \frac{1}{2} \eta^{mn} \lambda_m \lambda_n \eta_{ik} \Phi^k; \end{aligned} \quad (5)$$

3) преобразования Лоренца

$$\widetilde{\Phi}_0^0 = \Phi_0^0, \quad \widetilde{\Phi}^i = (\lambda^{-1})_k^i \Phi^k, \quad \widetilde{\Phi}_i = \lambda_i^k \Phi_k, \quad \widetilde{\Phi}_i^j = (\lambda^{-1})_m^j \Phi_k^m \lambda_i^k. \quad (6)$$

Так как в этих формулах внешние 2-формы Φ^k преобразуются только через самих себя, они образуют геометрический объект, называемый *кручением*. Внешние 2-формы $\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi_0^0$ также образуют геометрический объект, который не получил в литературе никакого названия. Но в [2] мы называем многообразие конформной связности *беззарядным* при равенстве нулю этих внешних форм, имея в виду сам этот геометрический объект называть *зарядом*. Если на беззарядном многообразии конформной связности выполняются уравнения Эйнштейна $\Phi_{ijk}^k = 0$, то Картан назвал этот случай *нормальной* конформной связностью. Заметим, что судя по ссылке [7, с. 178], Картан знал, что условие $\Phi_{ijk}^k = 0$ — уравнения Эйнштейна. Всё изложенное выше составляет основу понятия многообразия конформной связности и введено Картаном в [7]. Только Картан рассматривал случай многообразия произвольной размерности, а квадратичную форму угловой метрики считал положительно определённой. Нормальная конформная связность Картана (НКСК) в современной литературе является объектом интенсивного исследования (см., например, [8–13]).

Точку X_0 репера мы считаем общей точкой базы и слоя. Из (2) следует, что при $\omega^i = 0$ получается $dX_0 = X_0 \omega_0^0$, поэтому пфаффовы формы ω^i должны

быть базисными. Если u^α — локальные координаты базового многообразия, то имеют место равенства

$$\omega^i = B_\alpha^i du^\alpha. \quad (7)$$

Величины B_α^i зависят от локальных координат и образуют невырожденную квадратную матрицу 4-го порядка. Они задают вложение касательного векторного слоя (размерности 4) в 5-мерный проективный слой. Образом служит 4-мерная аффинная плоскость, которая получается удалением из проективной 4-плоскости, натянутой на точки X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 , проективной 3-плоскости, натянутой на 4 точки

$$Y_\alpha = l_\alpha X_0 + B_\alpha^i X_i,$$

где l_α — коэффициенты разложения пфаффовой формы $\omega_0^0 = l_\alpha du^\alpha$. В модуле над кольцом гладких функций, порождённом дифференциалами du^α , действует группа общекоординатных преобразований. Но в этом же модуле, взяв за базис пфаффовы формы ω^i , с помощью формул $\tilde{\omega}^i = \lambda \omega^i$ и $\tilde{\omega}^i = (\lambda^{-1})^i_k \omega^k$ можно задать действие калибровочных преобразований перенормировки и Лоренца, действие преобразований нормализации в этом случае является тождественным.

Как указано в [3], мы не умеем решать уравнения Янга—Миллса на 4-многообразии конформной связности с кручением, поэтому мы вынуждены ограничиться многообразиями с нулевым кручением, $\Phi^i = 0$. В этом случае уравнения Янга—Миллса во многих случаях становятся уже решаемыми в конечном виде [4–6].

Решение уравнений Янга—Миллса для центрально-симметрической метрики из [4], выражающееся через эллиптическую функцию Вейерштрасса, многократно использовалось в статьях [14, 15] для исследования структуры кварков, адронов, атомного ядра и других целей. Уравнения Янга—Миллса на 4-многообразиях с конформной структурой изучались в работах [8–10]. Однако в отличие от нашей работы [3] в них уравнения Эйнштейна не выводятся из уравнений Янга—Миллса, а постулируются путём наложения соответствующих условий на компоненты связности, и только после этого составляются уравнения Янга—Миллса. В [8] рассматривается частный случай конформной связности, именно, НКСК. Но выше мы уже отмечали, что в определение НКСК входит условие $\Phi_{ijk}^k = 0$, а это и есть уравнение Эйнштейна. В работах [9, 10] вместо конформной связности рассматривается эквивалентная ей твисторная связность специального вида, компоненты которой удовлетворяют условию

$$\Phi_{(ij)k}^k = 0 \quad (\text{в обозначениях Меркулова: } P_{mn} = Q_{(mn)} = \frac{1}{2}R_{mn} - \frac{1}{12}Rg_{mn}).$$

В [8] не только выведены уравнения Янга—Миллса, но и найдено их решение для однородной метрики Феттермана.

При $\Phi^i = 0$ формулы (4), (5) и (6) существенно упрощаются:

$$\widetilde{\Phi}_0^0 = \Phi_0^0, \quad \widetilde{\Phi}_i = \frac{1}{\lambda}\Phi_i, \quad \widetilde{\Phi}_i^j = \Phi_i^j; \quad (8)$$

$$\widetilde{\Phi}_0^0 = \Phi_0^0, \quad \widetilde{\Phi}_i^j = \Phi_i^j, \quad \widetilde{\Phi}_i = \Phi_i - \lambda_k \Phi_i^k + \lambda_i \Phi_0^0; \quad (9)$$

$$\widetilde{\Phi}_0^0 = \Phi_0^0, \quad \widetilde{\Phi}_i = \lambda_i^k \Phi_k, \quad \widetilde{\Phi}_i^j = (\lambda^{-1})_i^k \Phi_k^m \lambda_m^j. \quad (10)$$

Все калибровочно-инвариантные тензоры могут быть найдены только на основе преобразований (8), (9) и (10), если к ним добавить еще оператор Ходжа $*$, действующий на базисные внешние 2-формы согласно правилу [4, с. 352]

$$\begin{aligned} *(\omega^1 \wedge \omega^2) &= \omega^3 \wedge \omega^4, & *(\omega^1 \wedge \omega^3) &= -\omega^2 \wedge \omega^4, \\ *(\omega^1 \wedge \omega^4) &= \omega^2 \wedge \omega^3, & *(\omega^2 \wedge \omega^3) &= -\omega^1 \wedge \omega^4, \\ *(\omega^2 \wedge \omega^4) &= \omega^1 \wedge \omega^3, & *(\omega^3 \wedge \omega^4) &= -\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned} \quad (11)$$

и продолженный на остальные 2-формы по линейности.

Из формул (8)–(10) видим, что внешняя 2-форма Φ_0^0 , а также $*\Phi_0^0$ инвариантны относительно всех калибровочных преобразований, а формы Φ_i^j (и $*\Phi_i^j$) изменяются только при лоренцевых преобразованиях по формуле (10). Поскольку это закон преобразования аффинора относительно линейной группы лоренцевых преобразований, а техника работы с аффинорами хорошо известна, калибровочные преобразования (10) никаких хлопот не доставляют. К тому же, используя (7), можно получить $\Phi_\alpha^\beta = B_j^\beta \Phi_i^j B_\alpha^i$, где (B_j^β) — обратная матрица для (B_α^i) .

Величины Φ_α^β относительно координатных преобразований образуют аффинор, инвариантный относительно всех калибровочных преобразований. Аффинор Φ_i^j (или равносильно Φ_α^β) мы назвали в [1] *основным аффинором* многообразия конформной связности без кручения. Однако имеется много других калибровочно-инвариантных тензоров. Их отыскание и является целью настоящей статьи. При решении этой задачи преобразования перенормировки (8) тоже не создают проблем. Но преобразования нормализации (9) выражают внешние 2-формы $\widetilde{\Phi}_i$ через все внешние формы Φ_i , Φ_i^k и Φ_0^0 — в этом все сложности. Заметим, что представление тензоров через греческие индексы $\alpha, \beta, \dots$ называется *голономным представлением*, а через латинские $i, j, \dots$ — *неголономным представлением*. Взаимный переход между греческими и латинскими индексами осуществляется с помощью величин B_α^i . В большинстве случаев работать с неголономным представлением удобнее, так как, во-первых, сигнатура угловой метрики $\psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j$ задана в явном виде, а в голономном представлении $\psi = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ она глубоко скрыта в коэффициентах $g_{\alpha\beta}$; во-вторых, оператор Ходжа в неголономном представлении задан чрезвычайно простыми формулами (11), а в голономном представлении он намного сложнее. Но когда приходится решать уравнения Янга—Миллса или Эйнштейна, без голономного представления не обойтись. Так как $g_{\alpha\beta} = \eta_{ij}B_\alpha^i B_\beta^j$ и $\det(\eta_{ij}) = -1$,

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \det(g_{\alpha\beta}) = -(\det(B_\alpha^i))^2. \quad (12)$$

Отметим, что закон изменения угловой метрики при перенормировке $\widetilde{\psi} = \lambda^2\psi$ в неголономном представлении возникает за счет формул $\widetilde{\omega}^i = \lambda\omega^i$, при этом коэффициенты тензора Минковского η_{ij} не меняются. В голономном представлении, наоборот, не меняются дифференциалы du^α , но меняются коэффициенты

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} = \lambda^2 g_{\alpha\beta}. \quad (13)$$

1. Формы и тензоры, выражаемые через Φ_0^0 и Φ_i^j . Если $\omega_0^0 = l_i \omega^i$, то преобразование нормализации с $\lambda_i = l_i$ приводит к $\omega_0^0 = 0$, что мы и предполагаем выполненным. Положим

$$\omega_i = b_{ij} \omega^j, \quad \Phi_i^j = \frac{1}{2} \Phi_{imn}^j \omega^m \wedge \omega^n, \quad \Phi_{ijmn} = \eta_{ik} \Phi_{jmn}^k.$$

Тогда, согласно (3),

$$\Phi_0^0 = \frac{1}{2} b_{[ij]} \omega^j \wedge \omega^i,$$

где $b_{[ij]} \stackrel{\text{def}}{=} b_{ij} - b_{ji}$. В [1, с. 401] доказано, что тензор Φ_{ijmn} допускает следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$\Phi_{ijmn} = C_{ijmn} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \circ E_{mn} + \frac{1}{2} \eta_{ij} \circ b_{[mn]} - \frac{1}{6} \Lambda \eta_{ij} \circ \eta_{mn}. \quad (14)$$

Здесь C_{ijmn} — тензор Вейля конформной кривизны для квадратичной формы угловой метрики ψ ,

$$\begin{aligned} E_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} R_{mn} - \frac{1}{4} R \eta_{mn} - b_{(mn)} + \frac{1}{2} b \eta_{mn}, \\ \Lambda &= \frac{1}{4} (R - 6b), \quad b_{(mn)} \stackrel{\text{def}}{=} b_{mn} + b_{nm}, \end{aligned} \quad (15)$$

R_{mn} — тензор Риччи этой же квадратичной формы, $R = \eta^{mn} R_{mn}$, $b = \eta^{mn} b_{mn}$, кружком обозначено произведение Кулкарни—Номидзу двух тензоров:

$$a_{ij} \circ c_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} a_{im} c_{jn} + a_{jn} c_{im} - a_{in} c_{jm} - a_{jm} c_{in}.$$

Напомним [1, с. 395], что для 4-валентного тензора a_{ijmn} , кососимметричного как по первой паре индексов, так и по второй, символом $*a_{ijmn}$ мы обозначаем результат действия оператора Ходжа на левую пару индексов ij , а a_{ijmn}^* — результат его действия на правую пару индексов mn . Тензор a_{ijmn} называется *равнодуальным*, если $*a_{ijmn} = a_{ijmn}^*$, и *косодуальным*, если $*a_{ijmn} = -a_{ijmn}^*$. Перечислим несколько свойств равнодуальности и косодуальности.

1. Тензор a_{ijmn} равнодуален (косодуален) тогда и только тогда, когда $*a_{ijmn}^* = -a_{ijmn}$ ($*a_{ijmn}^* = a_{ijmn}$).
2. Если тензор a_{ijmn} равнодуален (косодуален), то таковы же и тензоры $*a_{ijmn}$ и a_{ijmn}^* .
3. Если тензор a_{mn} кососимметричен, то тензор $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ равнодуален.
4. Если тензор a_{mn} симметричен, то тензор $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ косодуален тогда и только тогда, когда $\eta^{ij} a_{ij} = 0$.
5. Если тензор a_{mn} симметричен, то тензор $\eta_{ij} \circ a_{mn}$ равнодуален тогда и только тогда, когда $a_{mn} = \lambda \eta_{mn}$.

В разложении (14) второе слагаемое косодуальное, т.к. $\eta^{mn} E_{mn} = 0$ (свойство 4), последние два равнодуальны (свойства 3 и 5). Тензор Вейля C_{ijmn} также равнодуален [1, с. 397]. Применяя свойство 1, из формулы (14) получаем следующее разложение на неприводимые слагаемые:

$$* \Phi_{ijmn}^* = -C_{ijmn} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \circ E_{mn} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \circ b_{[mn]} + \frac{1}{6} \Lambda \eta_{ij} \circ \eta_{mn}. \quad (16)$$

Так как $\Phi_{ijmn} = R_{ijmn} + \eta_{ij} \circ b_{mn}$ [1, формулы (22) и (23)], при $b_{mn} = 0$ формулы (14) и (16) переходят в разложения на неприводимые слагаемые для тензора Римана:

$$\begin{aligned} R_{ijmn} &= C_{ijmn} - \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ \left(R_{mn} - \frac{1}{4}R\eta_{mn}\right) - \frac{1}{24}R\eta_{ij} \circ \eta_{mn}, \\ {}^*R_{ijmn}^* &= -C_{ijmn} - \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ \left(R_{mn} - \frac{1}{4}R\eta_{mn}\right) + \frac{1}{24}R\eta_{ij} \circ \eta_{mn}. \end{aligned}$$

Путём свёртки равенств (14) и (16) с η^{in} , используя формулу

$$\eta^{in}(\eta_{ij} \circ c_{mn}) = -2c_{jm} - \eta^{in}c_{in}\eta_{jm},$$

получим ещё два разложения на неприводимые слагаемые:

$$\begin{aligned} \eta^{in}\Phi_{ijmn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{jm} = E_{jm} - b_{[jm]} + \Lambda\eta_{jm}, \\ \eta^{in}({}^*\Phi_{ijmn}^*) &= E_{jm} + b_{[jm]} - \Lambda\eta_{jm}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тензор E_{mn} из (15) естественно назвать *конформным тензором Эйнштейна*, так как его обращение в нуль даёт уравнение Эйнштейна с космологическим членом [1, с. 398]. Роль космологической константы играет скаляр $\Lambda = \frac{1}{4}(R - 6b)$, но только он не является константой. Это функция на 4-многообразии, которая изменяется только при преобразовании перенормировки по закону

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\Lambda. \quad (18)$$

Тензор E_{mn} имеет нулевой след: $\eta^{mn}E_{mn} = 0$. В голономном представлении он записывается в виде

$$E_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}Rg_{\alpha\beta} - b_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}bg_{\alpha\beta}.$$

Здесь левая часть калибровочно-инвариантна, а слагаемые в правой части — нет. Для получения калибровочно-инвариантного выражения запишем равенство (17) в голономном представлении

$$E_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta} + b_{[\alpha\beta]} - \Lambda g_{\alpha\beta}. \quad (19)$$

Здесь все 4 тензора калибровочно-инвариантны. Симметризуя это равенство, получим другое калибровочно-инвариантное представление тензора $E_{\alpha\beta}$:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Phi_{(\alpha\beta)} - \Lambda g_{\alpha\beta}, \quad \Phi_{(\alpha\beta)} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\alpha}. \quad (20)$$

Уравнения Эйнштейна без космологического члена также можно записать в трёх эквивалентных формах:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta} = b_{(\alpha\beta)}, \quad \Phi_{\alpha\beta} + b_{[\alpha\beta]} = 0, \quad \Phi_{(\alpha\beta)} = 0. \quad (21)$$

Свёртывая первое из этих уравнений с $g^{\alpha\beta}$, убеждаемся, что $\Lambda = 0$.

При $\Lambda \neq 0$ последнее слагаемое в равенстве (19) задаёт на 4-многообразии калибровочно-инвариантную метрику

$$ds^2 = \Lambda \eta_{ij} \omega^i \omega^j = \Lambda g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta. \quad (22)$$

Если мы точку X_0 4-многообразия конформной связности без кручения снабдим множителем $\sqrt{|\Lambda|}$, то получим калибровочно-инвариантный объект $\sqrt{|\Lambda|}X_0$, который будем называть материальной точкой. Метрика (22) позволяет составить функционал действия для движения материальной точки

$$S_M = \int |ds| = \int \sqrt{|\Lambda|} \sqrt{|g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta|}.$$

В силу закона преобразования (18) Λ можно свести к константе в некоторой окрестности точки x_0 4-многообразия путем подходящей перенормировки. Тогда, полагая равной нулю вариацию δS_M , придём к известным в общей теории относительности уравнениям движения материальной точки

$$\sqrt{|\Lambda|} \left(\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} \right) = 0.$$

Здесь $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — символы Кристоффеля квадратичной формы $g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$, а s — инвариантный параметр. Это позволяет нам трактовать величину $\sqrt{|\Lambda|}$ как массу. Таким образом, масса непосредственно связана с космологическим скаляром. Отсюда следует, что уравнения Эйнштейна с космологическим членом предпочтительнее уравнений Эйнштейна без него, так как при выполнении последних, как мы видели, $\Lambda = 0$, следовательно, в пространстве-времени нет массы.

Итак, при $\Lambda \neq 0$ многообразие конформной связности без кручения является лоренцевым многообразием с дополнительной структурой. Дополнительная структура задается конформным тензором Эйнштейна $E_{\alpha\beta}$ с нулевым следом, кососимметрическим тензором $b_{[\alpha\beta]}$, а также внешними формами Φ_i , которые не образуют геометрического объекта, но из них в дальнейшем будет сконструировано несколько тензоров. Калибровочно-инвариантный тензор Вейля $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ не является самостоятельным объектом, так как выражается через вторые частные производные метрического тензора. Калибровочно-инвариантный тензор $\varepsilon_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ оператора Ходжа также алгебраически выражается через метрический тензор. Формула (17) показывает, что разложение тензора $\eta^{in}(*\Phi_{ijmn}^*)$ на неприводимые слагаемые не даёт новых неприводимых тензоров второй валентности. Но априори не исключена возможность образования таких тензоров путём разложения на неприводимые слагаемые тензоров $\eta^{in}(*\Phi_{ijmn})$ и $\eta^{in}\Phi_{ijmn}^*$. Этот вопрос будет исследован в разделе 3.

2. Вариационный принцип для уравнений Эйнштейна с космологическим членом. Космологический скаляр Λ , если он не равен нулю, позволяет сконструировать калибровочно-инвариантную внешнюю 4-форму

$$\Theta = \Lambda^2 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 = \Lambda^2 \det(B_\alpha^i) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \wedge du^4.$$

Отсюда с помощью формулы (12) можно получить неориентированный элемент объёма $dV = \Lambda^2 \sqrt{-g} du^1 du^2 du^3 du^4$. Из законов преобразований (13) и (18) видно, что этот элемент объема калибровочно-инвариантен.

Рассмотрим гравитационный функционал действия

$$S_g = \int \Lambda^2 \sqrt{-g} du^1 du^2 du^3 du^4.$$

Интегрирование осуществляется по координатной окрестности данной точки x_0 многообразия. На границе окрестности никаких ограничений не накладывается. Свёртывая (19) с $g^{\alpha\beta}$, получим

$$\Lambda = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{8} g^{\alpha\beta} \Phi_{(\alpha\beta)}.$$

Будем варьировать функционал S_g по переменным $g^{\alpha\beta}$. При этом $\Phi_{(\alpha\beta)}$ есть калибровочно-инвариантный тензор, не зависящий от $g^{\alpha\beta}$, поэтому

$$\delta \Phi_{(\alpha\beta)} = 0.$$

Следовательно,

$$\delta (\Lambda^2) = 2\Lambda \delta \Lambda = \frac{1}{4} \Phi_{(\alpha\beta)} \delta g^{\alpha\beta}.$$

Вариация от $\sqrt{-g}$ вычислена в [16, с. 351], $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$. Поэтому

$$\delta S_g = \int \frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{1}{2} \Phi_{(\alpha\beta)} - \Lambda g_{\alpha\beta} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} du^1 du^2 du^3 du^4.$$

Так как 10 вариаций $\delta g^{\alpha\beta}$ независимы, то при $\Lambda \neq 0$ равенство $\delta S_g = 0$ возможно только при

$$\frac{1}{2} \Phi_{(\alpha\beta)} - \Lambda g_{\alpha\beta} = 0.$$

Согласно (20), это и есть уравнение Эйнштейна с космологическим членом. Как видим, приведённый вариационный принцип не имеет ничего общего с указанным в [1] вариационным принципом для уравнений Эйнштейна без космологического члена.

3. Разложение на неприводимые слагаемые тензоров $\eta^{in} (*\Phi_{ijmn})$ и $\eta^{in} \Phi_{ijmn}^*$. Мы снова отправляемся от формулы (14). Чтобы иметь возможность вместо 4-валентных тензоров работать с более привычными 2-валентными, применим стандартный приём — использование собирательных индексов:

$$12 \longrightarrow 1, \quad 13 \longrightarrow 2, \quad 14 \longrightarrow 3, \quad 34 \longrightarrow 4, \quad 42 \longrightarrow 5, \quad 23 \longrightarrow 6.$$

Тогда любой тензор a_{ijmn} , кососимметричный как по первой, так и по второй парам индексов, заменится двухвалентным тензором в 6-мерном векторном

пространстве. Поэтому тензор a_{ijmn} может быть задан квадратной матрицей 6-го порядка, которую целесообразно разбить на 4 блока из квадратных матриц 3-го порядка $\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$, где

$$X = \begin{pmatrix} a_{1212} & a_{1213} & a_{1214} \\ a_{1312} & a_{1313} & a_{1314} \\ a_{1412} & a_{1413} & a_{1414} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a_{1234} & a_{1242} & a_{1223} \\ a_{1334} & a_{1342} & a_{1323} \\ a_{1434} & a_{1442} & a_{1423} \end{pmatrix}$$

и т. д. Для тензора a_{ijmn}^* соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & -X \\ V & -U \end{pmatrix}, \quad (23)$$

а для тензора $^*a_{ijmn}$ матрица будет такой:

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \\ -X & -Y \end{pmatrix}.$$

Здесь E — единичная матрица 3-го порядка. Отсюда следует, что матрицы равнодуального и косодуального тензоров имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Будем применять оператор Ходжа к правой паре индексов каждого слагаемого равенства (14). Тензор Вейля C_{ijmn} равнодуален, поэтому его матрица имеет вид 1-й матрицы (24), причём все алгебраические соотношения между его компонентами сводятся к тому, что матрицы X и Y симметричны и имеют нулевые следы [1, с. 400]. Формула (23) даёт для тензора C_{ijmn}^* матрицу $\begin{pmatrix} Y & -X \\ -X & -Y \end{pmatrix}$. Матрицы Y и $(-X)$ по-прежнему симметричны и с нулевыми следами, следовательно, тензор C_{ijmn}^* обладает всеми алгебраическими свойствами тензора Вейля, в частности

$$\eta^{in} C_{ijmn}^* = 0. \quad (25)$$

Второе слагаемое равенства (14) $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{mn}$ косодуально, поэтому его матрица имеет вид 2-й матрицы (24) $\begin{pmatrix} M & N \\ -M & N \end{pmatrix}$, а матрица тензора $(\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{mn})^*$ имеет вид $\begin{pmatrix} N & -M \\ N & M \end{pmatrix}$, где, согласно [1, формула (16)],

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_{11} - E_{22} & -E_{23} & -E_{24} \\ -E_{32} & E_{11} - E_{33} & -E_{34} \\ -E_{42} & -E_{43} & E_{11} - E_{44} \end{pmatrix},$$

$$N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E_{14} & -E_{13} \\ -E_{14} & 0 & E_{12} \\ E_{13} & -E_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покомпонентные вычисления при выполнении операции свёртывания с тензором η^{in} приводят к формуле

$$\eta^{in} \left(\frac{1}{2} \eta_{ij} \circ E_{mn} \right)^* = 0. \quad (26)$$

Третье слагаемое (14) $\frac{1}{2} \eta_{ij} \circ b_{[mn]}$ равнодуально, поэтому его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} U & V \\ V & -U \end{pmatrix}$, где

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -b_{[23]} & -b_{[24]} \\ b_{[23]} & 0 & -b_{[34]} \\ b_{[24]} & b_{[34]} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & b_{[14]} & -b_{[13]} \\ -b_{[14]} & 0 & b_{[12]} \\ b_{[13]} & -b_{[12]} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица тензора $(\frac{1}{2} \eta_{ij} \circ b_{[mn]})^*$ имеет вид $\begin{pmatrix} V & -U \\ -U & -V \end{pmatrix}$. Отсюда, свёртывая с тензором η^{in} , найдём матрицу тензора $\eta^{in} (\frac{1}{2} \eta_{ij} \circ b_{[mn]})^*$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{[34]} & b_{[42]} & b_{[23]} \\ -b_{[34]} & 0 & -b_{[14]} & b_{[13]} \\ -b_{[42]} & b_{[14]} & 0 & -b_{[12]} \\ -b_{[23]} & -b_{[13]} & b_{[12]} & 0 \end{pmatrix}.$$

Это можно записать и так:

$$\eta^{in} \left(\frac{1}{2} \eta_{ij} \circ b_{[mn]} \right)^* = - * b_{[jm]}. \quad (27)$$

Осталось 4-е слагаемое равенства (14). Так как матрица тензора $\eta_{ij} \circ \eta_{mn}$ имеет вид $2 \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, матрица тензора $(\eta_{ij} \circ \eta_{mn})^*$, согласно первой формуле (24), имеет вид $2 \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, матрица тензора $(\frac{1}{6} \Lambda \eta_{ij} \circ \eta_{mn})^*$ такова: $\frac{1}{3} \Lambda \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Свёртывая с η^{in} , получим

$$\eta^{in} \left(\frac{1}{6} \Lambda \eta_{ij} \circ \eta_{mn} \right)^* = 0. \quad (28)$$

Итак, матрица тензора Φ_{ijmn}^* имеет вид

$$\begin{pmatrix} Y & -X \\ -X & -Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N & -M \\ N & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & -U \\ -U & -V \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \Lambda \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь все 4 слагаемых неприводимы. Формулы (25)–(28) приводят к следующему равенству:

$$\eta^{in} \Phi_{ijmn}^* + * b_{[jm]} = 0. \quad (29)$$

В силу косодуальности тензора $\frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{mn}$ и равнодуальности остальных трёх слагаемых равенства (14) формулы (25)–(28) остаются в силе и при перебрасывании в этих формулах знака $*$ справа налево. Поэтому справедлива формула

$$\eta^{in} (*\Phi_{ijmn}) + *b_{[jm]} = 0. \quad (30)$$

Таким образом, новых неприводимых двухвалентных тензоров, линейно выражающихся через матрицу конформной кривизны, кроме $\Lambda g_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$, $b_{[\alpha\beta]}$ (и, конечно, $*b_{[\alpha\beta]}$), не существует. При $b_{\alpha\beta} = 0$ будет $\Phi_{ijmn} = R_{ijmn}$ и формулы (29) и (30) дают два свойства тензора Римана:

$$\eta^{\alpha\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = 0, \quad \eta^{\alpha\delta} (*R_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0.$$

4. Тензоры и формы, порожденные внешними 2-формами Φ_i . В этом разделе мы будем иметь дело с 3-валентными тензорами. Приведём нужные нам факты о разложении таких тензоров на неприводимые компоненты. Согласно схеме Юнга, произвольный 3-валентный тензор T_{ijk} раскладывается на 4 инвариантных и неприводимых относительно линейной группы $GL(4)$ слагаемых:

$$T_{ijk} = \frac{1}{6} (T_{(ijk)} - T_{(jik)}) , \quad T_{ijk} = \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{kji} - T_{jik} - T_{jki}) ,$$

$$T_{ijk} = \frac{1}{6} (T_{ijk} + T_{jik} - T_{kij} - T_{kji}) , \quad T_{ijk} = \frac{1}{6} (T_{(ijk)} + T_{(jik)}) .$$

Мы обозначаем $T_{(ijk)} \stackrel{\text{def}}{=} T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}$. Если $T_{ijk} = -T_{ikj}$, то последний тензор обращается в нуль, и получим разложение

$$T_{ijk} = \frac{1}{3} T_{(ijk)} + \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{kji}) + \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{jik}) . \quad (31)$$

Но если группу $GL(4)$ уменьшить до линейной подгруппы группы инвариантности уравнения $\eta_{ij}\omega^i\omega^j = 0$, последние два слагаемых в (31) уже не будут неприводимыми. В этом случае неприводимые слагаемые будут иметь вид

$$\begin{aligned} T_{ijk} = \frac{1}{3} T_{(ijk)}, \quad T_{ijk} = \frac{1}{3} \left(T_{ijk} + T_{kji} - \frac{1}{3} \eta_{ij} T_k - \frac{1}{3} \eta_{jk} T_i + \frac{2}{3} \eta_{ik} T_j \right), \\ T_{ijk} = \frac{1}{3} \left(T_{ijk} + T_{jik} - \frac{2}{3} \eta_{ij} T_k + \frac{1}{3} \eta_{jk} T_i + \frac{1}{3} \eta_{ik} T_j \right), \\ T_{ijk} = \frac{1}{9} (\eta_{ij} T_k + \eta_{jk} T_i - 2\eta_{ik} T_j), \quad T_{ijk} = \frac{1}{9} (2\eta_{ij} T_k - \eta_{jk} T_i - \eta_{ik} T_j), \end{aligned} \quad (32)$$

где $T_k \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{ij} T_{ijk} = 3\eta^{ij} T_{ijk} = \frac{3}{2} \eta^{ij} T_{ijk}$. При этом $\eta^{ij} T_{ijk} = 0$ при $p = 1, 2, 3$; $\eta^{ij} T_{(ijk)} = 0$ при $p = 2, 3, 4, 5$; $T_{(ijk)} = T_{(ijk)}$.

Приступим к конструированию калибровочно-инвариантных тензоров. Наша задача состоит в том, чтобы в равенствах (9)

$$\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i - \lambda_k(\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0) \quad (33)$$

(δ_i^k — символ Кронекера) исключить параметры λ_k преобразования нормализации.

I. Самый простой способ — умножить (33) внешне на ω^i и воспользоваться тождеством Бианки $(\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0) \wedge \omega^i = 0$ [3, формула (18)]. Получим $\widetilde{\Phi}_i \wedge \omega^i = \Phi_i \wedge \omega^i$. Так как ω^i не меняется при преобразовании нормализации, $\widetilde{\Phi}_i \wedge \omega^i = \Phi_i \wedge \omega^i$. Это означает, что 3-форма

$$\Psi_1 = \Phi_i \wedge \omega^i \quad (34)$$

инвариантна относительно преобразования нормализации. Из законов преобразований ω^i и Φ_i , описанных во введении, легко установить, что Ψ_1 также инвариантна относительно преобразований Лоренца и перенормировки. Если положить

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \Phi_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k, \quad \Psi_1 = \frac{1}{6} \Psi_{ijk} \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k,$$

то из (34) получаем инвариантный относительно преобразования нормализации тензор

$$\Psi_{ijk} = \Phi_{(ijk)}.$$

Тензор $\Phi_{\alpha\beta\gamma} = B_\alpha^i B_\beta^j B_\gamma^k \Phi_{(ijk)}$ инвариантен относительно всех калибровочных преобразований. Поскольку он кососимметричен по всем трём индексам, то неприводим. Ковектор $\eta^{im} * \Phi_{imn}$ имеет своими компонентами величины $\Phi_{(ijk)}$, следовательно, их инвариантность равносильна инвариантности относительно преобразования нормализации ковектора $\eta^{im} * \Phi_{imn}$.

II. Запишем равенство (33) в компонентах:

$$\widetilde{\Phi}_{imn} = \Phi_{imn} - \lambda_k(\Phi_{imn}^k + \delta_i^k b_{[mn]}). \quad (35)$$

Свернём эти равенства с η^{im} . Введя обозначения

$$B_n = \eta^{im} \Phi_{imn}, \quad \widetilde{B}_n = \eta^{im} \widetilde{\Phi}_{imn}$$

и используя разложение (17), получим

$$\widetilde{B}_n = B_n - \lambda_k(\eta^{ki} E_{in} + \Lambda \delta_n^k). \quad (36)$$

Обозначим

$$\eta^{ki} E_{in} + \Lambda \delta_n^k \stackrel{\text{def}}{=} A_n^k = \frac{1}{2} \eta^{ki} \Phi_{(in)}.$$

Тогда из (36) получим

$$\lambda_k = (B_n - \widetilde{B}_n)(A_2^{-1})_k^n.$$

Подставим это в (33):

$$\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i + (\widetilde{B}_n - B_n)(A_2^{-1})_k^n (\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0). \quad (37)$$

Учитывая, что матрица A_n^k , а вместе с ней и обратная матрица $(A_2^{-1})_k^n$, инвариантны относительно преобразований нормализации, мы можем переписать равенства (37) в виде

$$\widetilde{\Phi}_i - \widetilde{B}_n (\widetilde{A_2^{-1}})_k^n (\widetilde{\Phi}_i^k - \delta_i^k \widetilde{\Phi}_0^0) = \Phi_i - B_n (A_2^{-1})_k^n (\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0).$$

Это означает, что внешние 2-формы

$$\Psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_i - B_n (A_2^{-1})_k^n (\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0) \quad (38)$$

инвариантны относительно преобразования нормализации. Отсюда легко получить, что внешние 2-формы $\Psi_\alpha = \Psi_i B_\alpha^i$ инвариантны относительно всех калибровочных преобразований и преобразуются по ковекторному закону относительно координатных преобразований.

Свёртка компонентной записи равенства (38)

$$\Psi_{imn} = \Phi_{imn} - B_p (A_2^{-1})_k^p (\Phi_{imn}^k - \delta_i^k b_{[nm]})$$

с η^{im} даёт $\eta^{im} \Psi_{imn} = 0$, следовательно, в формулах (32) 4-й и 5-й тензоры равны нулю, поэтому разложение на неприводимые слагаемые имеет вид (31):

$$\Psi_{ijk} = \frac{1}{3} \Psi_{(ijk)} + \frac{1}{3} (\Psi_{ijk} + \Psi_{kji}) + \frac{1}{3} (\Psi_{ijk} + \Psi_{jik}).$$

Вычислим первое слагаемое. Так как $(\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0) \wedge \omega^i = 0$ [3, формула 18], из (38) имеем $\Psi_i \wedge \omega^i = \Phi_i \wedge \omega^i$, что равносильно

$$\Psi_{(ijk)} = \Phi_{(ijk)}. \quad (39)$$

III. Вместо свёртывания с η^{im} имеется другой способ исключения параметров λ_i преобразования нормализации в равенствах (33), основанный на внешнем умножении. Равенства (33) можно умножить внешне 4-мя способами: на Φ_0^0 , Φ_i^n , $*\Phi_0^0$, $*\Phi_i^n$. Обозначим

$$\begin{aligned} (\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0) \wedge \Phi_0^0 &= A_3^k \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4, & \Phi_i \wedge \Phi_0^0 &= B_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4, \\ (\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0) \wedge \Phi_n^i &= A_4^n \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4, & \Phi_i \wedge \Phi_n^i &= B_4 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4, \\ (\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0) \wedge *\Phi_0^0 &= A_5^k \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4, & \Phi_i \wedge *\Phi_0^0 &= B_5 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4, \end{aligned}$$

$$\left(\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0\right) \wedge * \Phi_n^i = A_n^k \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4, \quad \Phi_i \wedge * \Phi_n^i = B_n \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4.$$

Тогда теми же рассуждениями, что и в п. II этого раздела, доказывается, что внешние 2-формы

$$\Psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_i - B_n (A^{-1})_p^n (\Phi_i^k - \delta_i^k \Phi_0^0), \quad p = 3, 4, 5, 6, \quad (40)$$

инвариантны относительно преобразований нормализации, а внешние формы $\Psi_\alpha = \Psi_i B_\alpha^i$ инвариантны относительно всех калибровочных преобразований и преобразуются по ковекторному закону относительно координатных преобразований. Формула (39) остаётся в силе:

$$\Psi_{(ijk)} = \Phi_{(ijk)}, \quad p = 3, 4, 5, 6, \quad (41)$$

но теперь, записывая (40) в компонентах и свёртывая с η^{im} , имеем

$$\eta^{im} \Psi_{imn} = B_n - B_j (A^{-1})_p^j A_n^k \neq 0, \quad p = 3, 4, 5, 6, \quad (42)$$

и поэтому каждый тензор Ψ_{ijk} имеет в разложении 5 неприводимых слагаемых вида (32), хотя 1-е слагаемое у них одно и то же — (41). Формулы (42) дают 4 ковектора $\eta^{im} \Psi_{imn}$, инвариантных относительно преобразований нормализации. В голономном представлении будем иметь 4 ковектора $g^{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta\gamma}$, инвариантных относительно всех калибровочных преобразований, кроме перенормировки. Но если $\Lambda \neq 0$, то получим 4 калибровочно-инвариантных ковектора $\Lambda^{-1} g^{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta\gamma}$, $p = 3, 4, 5, 6$.

IV. Применяя оператор Ходжа к внешним 2-формам Ψ_i , $p = 2, 3, 4, 5, 6$, заданных формулами (38) и (40), получим 5 ковекторов с компонентами из внешних 2-форм:

$$* \Psi_i \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_i = * \Phi_i - B_n (A^{-1})_p^n (* \Phi_i^k - \delta_i^k * \Phi_0^0), \quad p = 2, 3, 4, 5, 6, \quad (43)$$

инвариантных относительно преобразований нормализации. Переходя к голономному представлению $\Psi_\alpha = \Psi_i B_\alpha^i$ и выписывая компоненты, получим новые 5 тензоров валентности три $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$, инвариантные относительно всех калибровочных преобразований. Они все приводимы. Но следует иметь в виду, что неприводимые компоненты пары тензоров $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ и $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ не имеют ничего общего. Например, свёртка компонентной записи (43)

$$\Psi_{imn} = * \Phi_{imn} - B_j (A^{-1})_p^j \left((\Phi_{imn}^k)^* - \delta_i^k * b_{[nm]} \right)$$

с η^{im} в силу (29) даёт один и тот же ковектор $\eta^{im} * \Phi_{imn}$ (найденный в п. 1), поэтому в разложении $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ на неприводимые компоненты (32) последние два слагаемых одинаковые при $p = 2, 3, 4, 5, 6$, но первые слагаемые, в отличие от $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$, — разные.

Замечание. В специальных случаях некоторые из матриц A_n^k могут оказаться вырожденными. Понятно, что в таких случаях конструкция соответствующего ковектора Ψ_i из внешних 2-форм не проходит. Например, если выполняются уравнения Эйнштейна (21) $\Phi_{(in)} = 0$, то матрица $A_n^k = \frac{1}{2}\eta^{ik}\Phi_{(in)}$ является нулевой, поэтому, вследствие (36), получаем вместо 3-валентного тензора Ψ_{imn} лишь инвариантный относительно преобразования нормализации ковектор $B_n = \eta^{im}\Phi_{imn}$. Справедливо и обратное: если ковектор B_n инвариантен относительно преобразования нормализации, то выполняются уравнения Эйнштейна. В самом деле, свертывая (35) с η^{im} , получим

$$\lambda_k \eta^{im} (\Phi_{imn}^k - \delta_i^k b_{[nm]}) = \lambda_k A_n^k = \frac{1}{2} \lambda_k \eta^{ki} \Phi_{(in)} = 0.$$

Так как λ_k — произвольные функции, приходим к требуемому $\Phi_{(in)} = 0$. Таким образом, доказано, что в пространстве конформной связности без кручения уравнения Эйнштейна без космологического члена выполняются тогда и только тогда, когда ковектор $B_n = \eta^{im}\Phi_{imn}$ является инвариантным относительно преобразования нормализации.

Эта характеристика конформных многообразий Эйнштейна [1, с. 394] позволяет классифицировать их по типу ковектора B_n на времениподобные, пространственноподобные, светоподобные и изотропные (когда ковектор B_n нулевой). Хотя конформные многообразия Янга—Миллса [3, с. 437] автоматически являются конформными многообразиями Эйнштейна, эта классификация для них бесполезна, так как они всегда изотропны. Это объясняется тем, что компонентны тензора $\eta^{im}\Phi_{imn}$ (с точностью до знака и порядка) такие же, как компоненты внешней 3-формы $*\Phi_i \wedge \omega^i$, которая в конформном многообразии Янга—Миллса равна нулю [2, с. 440].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, “Уравнения Эйнштейна на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения” // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 2012. Т. 5, № 3. С. 393–408. [L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov, “Einstein's equations on a 4-manifold of conformal torsion-free connection”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 393–408 (In Russian)].
2. Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, “Связь уравнений Янга—Миллса с уравнениями Эйнштейна” // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 9. С. 69–74; L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov, “The relationship between the Einstein and Yang-Mills equations”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 9, pp. 62–66 doi: [10.3103/S1066369X09090072](https://doi.org/10.3103/S1066369X09090072).
3. Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, “Связь уравнений Янга—Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла” // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 2009. Т. 2, № 4. С. 432–448.

- [L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov, "Connection of Young-Mills Equations with Einstein and Maxwell's Equations", *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 432–448 (In Russian)].
4. Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, "Полное решение уравнений Янга–Миллса для центрально-симметрической метрики" // *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.*, 2011. Т. 4, № 3. С. 350–362. [L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov, "The full decision of Young–Mills equations for the central-symmetric metrics", *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 350–362 (In Russian)].
 5. L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov, "Purely time-dependent solutions to the Yang–Mills equations on a 4-dimensional manifold with conformal torsion-free connection", *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 40–52.
 6. Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов, "Решение уравнений Янга–Миллса для центрально-симметрической метрики при наличии электромагнитного поля" // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2013. № 3. С. 54–63. [L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov, "Solution of Yang–Mills equations for central-symmetric metric in the presence of electromagnetic field", *Prostranstvo, vremya i fundamental'nyye vzaimodeystviya*, 2013, no. 3, pp. 54–63 (In Russian)].
 7. Э. Картан, *Пространства аффинной, проективной и конформной связности*. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с. [É. Cartan, *Prostranstva affinnoy, proektivnoy i konformnoy svyaznosti* [Space of affine, projective and conformal connection], Kazan, Kazan University Publ., 1962, 210 pp. (In Russian)]
 8. M. Korzyński, J. Lewandowski, "The normal conformal Cartan connection and the Bach tensor", *Class. Quantum Grav.*, 2003, vol. 20, no. 16, 3745, arXiv: [gr-qc/0301096](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0301096) doi: [10.1088/0264-9381/20/16/314](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/16/314).
 9. С. А. Меркулов, "Твисторная связность и конформная гравитация" // *ТМФ*, 1984. Т. 60, № 2. С. 311–316; S. A. Merkulov, "Twistor connection and conformal gravitation", *Theoret. and Math. Phys.*, 1984, vol. 60, no. 2, pp. 842–845 doi: [10.1007/BF01018984](https://doi.org/10.1007/BF01018984).
 10. S. A. Merkulov, "A conformally invariant theory of gravitation and electromagnetism", *Class. Quantum Grav.*, 1984, vol. 1, no. 4, 349 doi: [10.1088/0264-9381/1/4/007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/1/4/007).
 11. C. Kozameh, E. T. Newman, P. Nurowski, "Conformal Einstein equations and Cartan conformal connection", *Class. Quantum Grav.*, 2003, vol. 20, no. 14, 3029, arXiv: [gr-qc/0302080](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0302080) doi: [10.1088/0264-9381/20/14/305](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/14/305).
 12. E. Gallo, C. Kozameh, E. T. Newman, K. Perkins, "Cartan normal conformal connections from pairs of second-order PDEs", *Class. Quantum Grav.*, 2004, vol. 21, no. 17, 4063, arXiv: [gr-qc/0404072](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0404072) doi: [10.1088/0264-9381/21/17/004](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/17/004).
 13. K. Perkins, *The Cartan-Weyl Conformal Geometry of a Pair of Second-Order Partial-Differential Equations*, Doctoral Dissertation, University of Pittsburgh, 2006, <http://d-scholarship.pitt.edu/8445/>.
 14. A. P. Trunев, "Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells" // *Scientific Journal of KubSAU*, 2013. № 86(02), 59. 27 с., <http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/59.pdf>
 15. A. P. Trunев, "Cosmology of inhomogeneous rotating universe and reality show", *Scientific Journal of KubSAU*, 2014, no. 95(01), 28, 30 pp., <http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/28.pdf>.
 16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* / Теоретическая физика. Т. 2. М.: Наука, 1973. 504 с. [L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Teoriya polya* [Field Theory], Teoreticheskaya fizika [Theoretical Physics], vol. 2, Moscow, Nauka, 1973, 504 pp. (In Russian)]

Поступила в редакцию 10/XII/2013;
в окончательном варианте — 21/II/2014;
принята в печать — 21/II/2014.

MSC: 53C07, 81T13; 51B20, 83C05, 53Z05

GAUGE-INVARIANT TENSORS OF 4-MANIFOLD WITH CONFORMAL TORSION-FREE CONNECTION AND THEIR APPLICATIONS FOR MODELING OF SPACE-TIME

L. N. Krivonosov¹, V. A. Luk'yanov²¹ Nizhny Novgorod State Technical University,

24, Minina st., Nizhnii Novgorod, 603600, Russian Federation.

² Zavolzhskij Branch of Nizhny Novgorod State Technical University,

1a, Pavlovskogo st., Zavolzh'e, Nizhegorodskaya obl., 606520, Russian Federation.

We calculated basic gauge-invariant tensors algebraically expressed through the matrix of conformal curvature. In particular, decomposition of the main tensor into gauge-invariant irreducible summands consists of 4 terms, one of which is determined by only one scalar. First, this scalar enters the Einstein's equations with cosmological term as a cosmological scalar. Second, metric being multiplied by this scalar becomes gauge invariant. Third, the geometric point, which is not gauge-invariant, after multiplying by the square root of this scalar becomes gauge-invariant object — a material point. Fourth, the equations of motion of the material point are exactly the same as in the general relativity, which allows us to identify the square root of this scalar with mass. Thus, we obtained an unexpected result: the cosmological scalar coincides with the square of the mass. Fifth, the cosmological scalar allows us to introduce the gauge-invariant 4-measure on the manifold. Using this measure, we introduce a new variational principle for the Einstein equations with cosmological term. The matrix of conformal curvature except the components of the main tensor contains other components. We found all basic gauge-invariant tensors, expressed in terms of these components. They are 1- or 3-valent. Einstein's equations are equivalent to the gauge invariance of one of these covectors. Therefore the conformal connection manifold, where Einstein's equations are satisfied, can be divided into 4 types according to the type of this covector: timelike, spacelike, light-like or zero.

Keywords: conformal connection, gauge group, Einstein's equations, cosmological term.

Received 10/XII/2013;

received in revised form 21/II/2014;

accepted 21/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1291>

© 2014 Samara State Technical University.

Citation: L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov, "Gauge-invariant Tensors of 4-Manifold with Conformal Torsion-free Connection and their Applications for Modeling of Space-time", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 180–198. doi: [10.14498/vsgtu1291](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1291). (In Russian)

Authors Details: *Leonid N. Krivonosov* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics. *Vyacheslav A. Luk'yanov*, Senior Lecturer, Dept. of Computer Science and General Disciplines.

E-mail addresses: oxyzt2@ya.ru (L.N. Krivonosov, *Corresponding author*),

oxyzt@ya.ru (V.A. Luk'yanov)