

УДК 536.24.023

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ*И. В. Кудинов, А. Н. Бранфилева, А. В. Еремин, М. П. Скворцова*Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.**Аннотация**

Применительно к турбулентному пограничному слою с использованием полуэмпирической теории турбулентности Прандтля выведены уравнения динамического и теплового пограничных слоев. С использованием эмпирической зависимости распределения скорости и толщины турбулентного динамического пограничного слоя разработана методика получения аналитического решения краевой задачи, моделирующей формирование в турбулентном динамическом пограничном слое теплового пограничного слоя. Методика основана на определении фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий. Физический смысл дополнительных условий заключается в том, что их выполнение равносильно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничной точке и на фронте температурного возмущения. Так как диапазон изменения фронта температурного возмущения включает весь диапазон изменения поперечной пространственной переменной, то, следовательно, чем большее количество дополнительных условий будет использовано, тем лучше будет выполняться исходное дифференциальное уравнение внутри теплового пограничного слоя. Детальный анализ получаемых решений позволил заключить, что толщина теплового пограничного слоя в пределах турбулентного динамического пограничного слоя более чем в два раза меньше толщины теплового слоя при ламинарном динамическом пограничном слое. Исследование теоретически полученного в настоящей работе критериального уравнения показало, что в диапазоне $20000 \leq Re \leq 30000$ отличие получаемых по этому уравнению коэффициентов теплоотдачи от их экспериментальных значений не превышает 7 %.

Ключевые слова: турбулентный динамический и тепловой пограничные слои, полуэмпирическая теория турбулентности, интегральный метод теплового баланса, фронт температурного возмущения, дополнительные граничные условия, критериальное уравнение теплоотдачи.

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Кудинов И. В., Бранфилева А. Н., Еремин А. В., Скворцова М. П. Моделирование теплообмена в турбулентном пограничном слое с использованием полуэмпирической теории турбулентности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4 (37). С. 157–169. doi: [10.14498/vsgtu1356](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1356).

Сведения об авторах

Игорь Васильевич Кудинов (к.т.н., доц.; igor-kudinov@bk.ru), доцент, каф. теоретические основы теплотехники и гидромеханика.

Анастасия Николаевна Бранфилева (OV_branfilevaAN@samaragilpro.ru), аспирант, каф. теоретические основы теплотехники и гидромеханика.

Антон Владимирович Еремин (к.т.н.; a.v.eremin@list.ru; автор, ведущий переписку), ст. преподаватель, каф. теоретические основы теплотехники и гидромеханика.

Марина Петровна Скворцова (marina.dorozhkina.88@mail.ru), аспирант, каф. теоретические основы теплотехники и гидромеханика.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1356>

1. Постановка задачи. При обтекании плоской поверхности потоком жидкости вблизи стенки образуется ламинарный динамический пограничный слой $\delta_{\text{л}}$ (рис. 1). При больших скоростях потока на некотором расстоянии $x_{\text{кр}}$ происходит срыв ламинарного потока и течение в пограничном слое становится турбулентным. В пределах турбулентного пограничного слоя $\delta_{\text{т}}$ вблизи поверхности пластины сохраняется тонкий вязкий подслой $\delta_{\text{п}}$ с ламинарным течением.

При турбулентном течении происходят неравномерные изменения во времени скоростей, давлений и температур, называемые пульсациями. Для анализа турбулентного течения выполняется его разложение на осредненное и пульсационное движения. Актуальное (мгновенное) значение составляющей скорости v , осредненное во времени, обозначается через \bar{v} , а пульсационная составляющая — через v' . Отсюда можно записать

$$v = \bar{v} + v'; \quad \nu = \bar{\nu} + \nu'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad t = \bar{t} + t', \quad (1)$$

где v — скорость; ν — кинематическая вязкость; p — давление; t — температура.

За осредненное значение принимается среднее актуальное значение физической величины за некоторый интервал времени, выбранный так, чтобы осредненное значение не зависело от величины этого интервала. Таким образом, пульсация физической величины представляет разность между её актуальным и осредненным значениями.

Уравнения движения для турбулентного пограничного слоя выводятся так же, как и для ламинарного, с использованием при этом соотношения (1). Выведенное таким путем уравнение движения имеет вид (без учета градиента давления)

$$\rho \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \rho \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{v'_x v'_y} \right), \quad (2)$$

где v'_x, v'_y — продольная и поперечная пульсационные скорости.

В уравнении (2) первое слагаемое правой части описывает микроскопическое движение молекул, а второе — макроскопическое движение турбулентных объемов. Осредненное во времени значение $\overline{v'_x v'_y}$ по теории Л. Прандтля в предположении, что продольная пульсация скорости равна поперечной ее

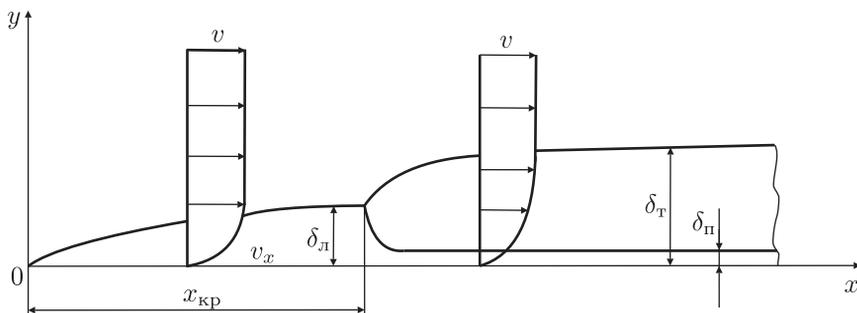


Рис. 1. Схема ламинарного $\delta_{\text{л}}$ и турбулентного $\delta_{\text{т}}$ пограничных слоев: $\delta_{\text{п}}$ — ламинарный вязкий подслой; v — скорость невозмущенного потока; $x_{\text{кр}}$ — критическая величина координаты

пульсации $v'_x = v'_y = l d\bar{v}_x/dy$, записывается в виде

$$\overline{v'_x v'_y} = l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2,$$

где l — длина пути перемешивания — расстояние по оси y , на которое должен переместиться элементарный объем жидкости из одного слоя (с его средней скоростью) в другой, причем так, чтобы разность скоростей этого элемента и соседнего слоя была равна осредненной пульсации скорости первоначального слоя [1].

Л. Прандтль предложил следующую зависимость длины пути перемешивания от координаты y :

$$l = \chi y,$$

где $\chi = 0.4$ — коэффициент, найденный Л. Прандтлем экспериментально.

Уравнение (2) содержит четыре неизвестных величины \bar{v}_x , \bar{v}_y , v'_x , v'_y . Для исключения неизвестных v'_x и v'_y Ж. В. Буссинеск предположил, что турбулентное касательное напряжение определяется формулой, аналогичной уравнению закона трения Ньютона $\tau = \mu du/dy$ и имеющей вид

$$\tau_T = \rho \overline{v'_x v'_y} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right), \quad (3)$$

где μ — динамическая вязкость; μ_T — динамическая турбулентная вязкость.

В отличие от μ , μ_T характеризует не физическое свойство жидкости, а режим её движения.

Уравнение (2) с учетом (3) запишется как [2, 3]

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right), \quad (4)$$

где $\nu = \mu/\rho$, $\nu_T = \mu_T/\rho$ — кинематическая и кинематическая турбулентная вязкости жидкости; ρ — плотность.

Кинематическая турбулентная вязкость, согласно гипотезам Прандтля и Буссинеска [1, 2, 3], находится из соотношения

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|.$$

Как следует из уравнения (4), пульсационное движение со скоростями v'_x и v'_y оказывает влияние на осредненное движение со скоростями \bar{v}_x и \bar{v}_y таким образом, что в осредненном движении как бы увеличивается вязкость.

Если осредненные значения величин, характеризующих турбулентное течение, не изменяются во времени, то оно называется стационарным.

Сопоставляя уравнения движения для ламинарного и турбулентного пограничного слоя, можно заметить, что во втором уравнении появляется дополнительное слагаемое, представляющее собой турбулентное касательное напряжение $\tau_T = \mu_T \partial \bar{v}_x / \partial y$. Отсюда полное касательное напряжение для турбулентного потока жидкости:

$$\tau_{\Pi} = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}.$$

Уравнение (4) содержит две неизвестные величины \bar{v}_x и \bar{v}_y . Для его замыкания необходимо еще добавить уравнение сплошности, которое выполняется как для пульсационных, так и для осредненных скоростей:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Получение аналитических (или численных) решений уравнений (4), (5) существенно усложняется тем, что математическая постановка задачи в данном случае включает также уравнение движения для ламинарного вязкого подслоя при необходимости выполнения условий сопряжения между слоями. Подобные задачи сложны и их решения в настоящее время не получены. В связи с этим для оценки распределения скорости в пределах турбулентного пограничного слоя используют различные эмпирические зависимости. В частности, при решении краевой задачи о распределении температуры в турбулентном пограничном слое для расчета распределения скорости будем использовать эмпирическую формулу [3, 4]

$$\frac{v_x}{v} = \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^n, \quad (6)$$

где v — скорость невозмущенного потока; $\delta(x)$ — толщина турбулентного пограничного слоя; n — показатель степени, принимаемый, исходя из эмпирических данных [1, 4].

Толщина турбулентного пограничного слоя без учета ламинарного вязкого подслоя, то есть в предположении, что турбулентный пограничный слой формируется непосредственно начиная от кромки пластины, описывается следующей полученной из эмпирических данных формулой [5]:

$$\delta(x) = 0.37x/\text{Re}^{0.2}. \quad (7)$$

Уравнение энергии для турбулентного двумерного пограничного слоя без учета диссипативной функции имеет вид

$$\rho c_p \bar{v}_x \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \rho c_p \bar{v}_y \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho c_p \overline{v_y' t'} \right), \quad (8)$$

где \bar{t} , t' — соответственно осредненная и пульсационная температура; c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Для замыкания уравнения (8) необходимо исключить из него пульсационные величины. Аналогично, как это было сделано для уравнения (2), предположим, что слагаемое, содержащее пульсационные величины, можно выразить через градиент осредненной температуры следующим образом:

$$-\rho c_p \overline{v_y' t'} = \lambda_\tau \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right), \quad (9)$$

где λ_τ — коэффициент турбулентной теплопроводности, характеризующий не физическое свойство жидкости, а режим течения.

Уравнение (8) с учетом (9) приводится к виду (здесь и далее черта над осредненными величинами опускается)

$$v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((a + a_\tau) \frac{\partial t}{\partial y} \right), \quad (10)$$

где $a_T = \lambda_T / (\rho c_p)$ — коэффициент турбулентной теплопроводности.

Найдем решение уравнения (10) для случая, когда сумма коэффициентов молекулярной и турбулентной теплопроводности и теплопроводности представлены в виде некоторых эквивалентных величин

$$\lambda_{\text{э}} = \lambda + \lambda_T; \quad a_{\text{э}} = a + a_T. \quad (11)$$

Полный тепловой поток в этом случае запишется как

$$q_{\text{п}} = q + q_T = (\lambda + \lambda_T) \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Уравнение (10) с учетом (11) приводится к виду [1]

$$v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} = a_{\text{э}} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \quad (12)$$

Уравнение (12) совпадает с уравнением Польшаузена для ламинарного пограничного слоя. Граничные условия для него:

$$t(x, 0) = t_{\text{ст}}; \quad (13)$$

$$t(x, \Delta) = t_{\text{ср}}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial t(x, \Delta)}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

где $t_{\text{ст}}$ — температура стенки; $t_{\text{ср}}$ — температура невозмущенного потока; $\Delta(x)$ — толщина теплового пограничного слоя (граница фронта температурного возмущения, см. рис. 2).

Согласно соотношению (13), температура среды непосредственно на стенке $y = 0$ равна температуре стенки. Условия (14), (15) представляют собой условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Согласно (14), температура на границе теплового пограничного слоя (на границе фронта температурного возмущения) равна температуре невозмущенного потока. Из (15) следует, что тепловой поток не распространяется за пределы фронта температурного возмущения, несмотря на движение последнего в направлении координаты y . Это условие обеспечивает плавное сопряжение профиля температуры пограничного слоя с линией температуры невозмущенного потока $t_{\text{ср}} = \text{const}$.

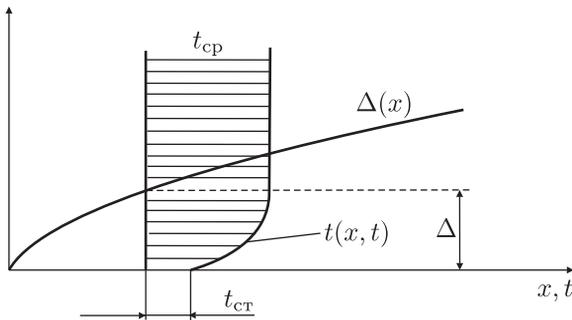


Рис. 2. Схема теплового пограничного слоя на плоской поверхности при $t_{\text{ст}} < t_{\text{ср}}$: $t_{\text{ст}}$ — температура стенки; $t_{\text{ср}}$ — температура невозмущенного потока; $\Delta(x)$ — толщина теплового пограничного слоя

Обоснование метода решения. Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не уравнению (12), а некоторому осредненному, то есть уравнению (12), проинтегрированному в пределах толщины теплового пограничного слоя $0 \leq y \leq \Delta(x)$:

$$\int_0^{\Delta} v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} dy + \int_0^{\Delta} v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} dy = a \int_0^{\Delta} \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} dy.$$

Выполняя интегрирование по частям и используя уравнение неразрывности (5), находим

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x (t_{\text{ср}} - t(x, y)) dy = a \frac{\partial t(x, 0)}{\partial y}. \quad (16)$$

Соотношение (16) представляет собой интегральное уравнение (интеграл теплового баланса).

Суть использования интегрального уравнения (16) в том, что при получении решения задачи (12)–(15) требуется выполнение не исходного дифференциального уравнения в частных производных (12), а уравнение некоторого осредненного по толщине теплового пограничного слоя, которое в конечном итоге сводится к интегральному уравнению вида (16). Разумеется, подобное осреднение снижает точность решения исходного уравнения (12). Однако, как будет показано ниже, применение дополнительных граничных условий позволяет найти такое приближенное аналитическое решение, которое в зависимости от числа приближений удовлетворяет уравнению (12) практически с заданной степенью точности (точность решения температурной задачи).

Первое дополнительное граничное условие находится путём требования выполнения искомым решением уравнения (12) в точке $y = 0$. Так как при $y = 0$ имеем $v_x = v_y = 0$, уравнение (12) приводится к соотношению

$$\frac{\partial^2 t(x, 0)}{\partial y^2} = 0, \quad (17)$$

которое может быть использовано в качестве дополнительного граничного условия.

Введем избыточную температуру по соотношению $T = t - t_{\text{ср}}$. Тогда $T_{\text{ср}} = t_{\text{ср}} - t_{\text{ср}}$. Интегральное уравнение (16) и граничные условия (13)–(15), (17) для избыточной температуры принимают вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x (T_{\text{ср}} - T(x, y)) dy = a \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y}; \quad (18)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad T(x, \Delta) = T_{\text{ср}}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial T(x, \Delta)}{\partial y} = 0; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, 0)}{\partial y^2} = 0. \quad (21)$$

Сопоставляя уравнения (4) и (10), можно убедиться, что при $\nu_3 = a_3$, где $\nu_3 = \nu + \nu_{\text{r}}$, то есть, когда $\text{Pr} = \nu_3/a_3 = 1$, по форме записи они полностью совпадают. Если привести математические постановки задач к безразмерному

виду, принимая однослойную модель, то полностью идентичными оказываются и граничные условия. Это означает, что безразмерные решения этих двух задач будут одинаковыми, а размерные распределения скоростей и температур вдоль оси x взаимно подобны [1]. Следовательно, отношение теплового и динамического слоев не зависит от координаты x . Это условие будет использовано ниже при решении обыкновенных дифференциальных уравнений относительно толщины теплового пограничного слоя $\Delta(x)$.

Возникновение пограничных слоев (динамического и теплового) обусловлено переносом импульса и теплоты по направлению поперечной координаты y . Следовательно, толщина каждого из пограничных слоев определяется интенсивностью соответствующего процесса переноса. Так как характеристикой интенсивности переноса импульса является кинематическая вязкость, а теплоты — коэффициент температуропроводности, соотношение толщин этих двух пограничных слоев должно зависеть от соотношения коэффициентов переноса, то есть от величины числа $Pr = \nu/a$. Чем больше величина критерия Прандтля, тем более интенсивным является поперечный перенос импульса по сравнению с переносом теплоты и, следовательно, тем больше в этом случае будет толщина динамического слоя по сравнению с тепловым.

Ввиду того, что толщины динамического и теплового пограничных слоев должны подчиняться условию $\Delta(x) \leq \delta(x)$, величина критерия Прандтля должна быть $Pr \geq 1$. Последнее условие приближенно выполняется для газов и для неэлектропроводных жидкостей и не выполняется для жидких металлов ввиду высокого значения коэффициента температуропроводности ($10^{-3} \leq Pr \leq 10^{-2}$).

Решение задачи (18)–(21) принимается в виде

$$T(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k(\Delta) y^k, \quad (22)$$

где $a_k(\Delta)$ — неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (19)–(21); $\Delta(x)$ — толщина теплового пограничного слоя.

Подставим (22), ограничиваясь четырьмя членами ряда, в граничные условия (19)–(21), относительно неизвестных $a_k(\Delta)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) получим систему четырёх алгебраических линейных уравнений. Её решение

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{3}{2} \frac{T_{cp}}{\Delta}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{T_{cp}}{2\Delta^3}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), находим

$$\frac{T}{T_{cp}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\Delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^3. \quad (24)$$

Отметим, что при $\Delta \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ возникает неопределенность $[0/0]$, раскрывая которую, получаем $T/T_{cp} = 0$, что соответствует значению температуры, определяемой граничным условием (19).

Подставляя (6) и (24) в интегральное уравнение (18), относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$vT_{cp} \frac{343}{1160} \frac{d}{dx} (\beta^{8/7} \delta(x)) = a \frac{3}{2} \frac{T_{cp}}{\beta \delta(x)},$$

где $\beta = \Delta(x)/\delta(x)$. Ввиду независимости величины β от координаты x последнее соотношение приводится к виду

$$\frac{343}{1740} \nu \beta^{15/7} \delta(x) d\delta(x) = a dx, \quad (25)$$

где $\delta(x)$ определяется по формуле (7).

Интегрируя уравнение (25) при начальном условии $\Delta(0) = 0$, находим

$$\Delta(x) = \frac{1.99625 (a \operatorname{Re}^{2/5} \nu^{14} x^{14})^{7/15}}{x^6 \nu^7 \operatorname{Re}^{1/15}}. \quad (26)$$

Соотношения (24), (26) представляют собой решение задачи (12)–(15), (17) в первом приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (24) точно удовлетворяет граничным условиям (13)–(15), (17) и интегральному уравнению (18). Уравнение (12), как это следует из (18), в данном случае удовлетворяется лишь в среднем.

Для повышения точности решения задачи (12)–(15), (17) следует увеличивать степень полинома (22), для определения неизвестных коэффициентов которого необходимо привлекать дополнительные граничные условия. Первое из них имеет вид (21). Методы получения последующих дополнительных граничных условий изложены в работе [7] и некоторых других. В частности, для получения решения во втором приближении к граничным условиям (18)–(21) следует добавить условия

$$\frac{\partial T^2(x, \Delta)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 T(x, \Delta)}{\partial y^3} = 0, \quad (27)$$

выполняющиеся на границе пограничного слоя.

Подставим (22), ограничиваясь шестью членами ряда ($k = 0, 1, \dots, 5$), в граничные условия (19)–(21), (27), относительно неизвестных коэффициентов

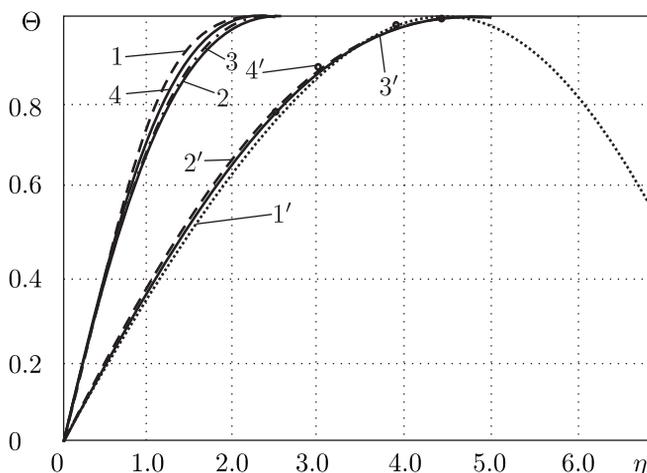


Рис. 3. Распределение безразмерной температуры $\Theta = T/T_{cp}$ в зависимости от безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{\nu/(\nu x)}$. 1, 2, 3, 4 — первое, второе, третье и четвертое приближения (турбулентное течение); 1', 2', 3' — соответственно первое, второе и третье приближения (ламинарное течение); 4' — точное решение [6] (ламинарное течение)

a_k будем иметь цепочную систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы значения коэффициентов a_k в (22), находим

$$\frac{T(x, y)}{T_{\text{cp}}} = \frac{5}{2} \frac{y}{\Delta} - 5 \left(\frac{y}{\Delta} \right)^3 + 5 \left(\frac{y}{\Delta} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\Delta} \right)^5. \quad (28)$$

Подставляя (28) в интегральное уравнение (18), после вычисления интегралов относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$v T_{\text{cp}} \frac{16807}{89784} \frac{d}{dx} (\beta^{8/7} \delta(x)) = a \frac{5}{2} \frac{T_{\text{cp}}}{\beta \delta(x)}. \quad (29)$$

Ввиду независимости величины $\beta = \Delta(x)/\delta(x)$ от координаты x соотношение (29) приводится к виду

$$\frac{16807}{224460} v \beta^{15/7} \delta(x) d\delta(x) = a dx. \quad (30)$$

Интегрируя уравнение (30) при начальном условии $\Delta(0) = 0$, находим

$$\Delta(x) = \frac{3.137 (a \text{Re}^{2/5} v^{14} x^{14})^{7/15}}{x^6 v^7 \text{Re}^{1/5}}. \quad (31)$$

Соотношения (28), (31) представляют собой решение задачи (12)–(15), (17) во втором приближении. Результаты расчетов безразмерных температур $\Theta = T/T_{\text{cp}}$ по формуле (28) даны на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что уточнение решения во втором приближении по сравнению с первым составляет около 3% для $0.5 \leq \eta \leq 3.0$, где $\eta = y\sqrt{v/(\nu x)}$.

Соотношение (28) точно удовлетворяет всем основным (13)–(15), (17) и дополнительным граничным условиям (27), а также интегральному уравнению (18). По сравнению с первым приближением в данном случае наблюдается более точное выполнение уравнения (12) ввиду выполнения дополнительных граничных условий, согласно которым уравнение (12) точно выполняется в точках $y = 0$ и $y = \Delta(x)$, то есть на границе фронта температурного возмущения. Так как фронт температурного возмущения изменяется в диапазоне всего рассматриваемого участка координаты y , следовательно, уточнение выполнения уравнения (12) происходит внутри всей области изменения искомой функции.

Дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи в третьем приближении, имеют вид [7]

$$\frac{\partial T^3(x, 0)}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 T(x, \Delta)}{\partial y^4} = 0, \quad \frac{\partial^5 T(x, \Delta)}{\partial y^5} = 0. \quad (32)$$

Отсюда можно записать общую формулу дополнительных граничных условий в любом приближении:

$$\frac{\partial T^i(x, 0)}{\partial y^i} = 0, \quad \frac{\partial^i T(x, \Delta)}{\partial y^i} = 0, \quad \frac{\partial^{i+1} T(x, \Delta)}{\partial y^{i+1}} = 0, \quad (33)$$

где $i = 2, 3, 4, \dots$ — соответствует второму, третьему, четвертому и последующим приближениям. Отметим, что в каждом последующем приближении, начиная с третьего, необходимо использовать по три дополнительных граничных условия (использование меньшего их количества не приводит к заметному повышению точности решения).

Граничные условия (19)–(21), (27), (32) позволяют найти уже девять неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ ($k = 0, 1, \dots, 8$) ряда (22) и получить решение в третьем приближении. Подставляя (22) в перечисленные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ получим цепочную систему алгебраических линейных уравнений. После их определения и подстановки в (22) находим

$$\frac{T(x, y)}{T_{\text{ср}}} = \frac{8}{3} \frac{y}{\Delta} - \frac{70}{3} \left(\frac{y}{\Delta}\right)^4 + 56 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^5 - 56 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^6 + \frac{80}{3} \left(\frac{y}{\Delta}\right)^7 - 5 \left(\frac{y}{\Delta}\right)^8. \quad (34)$$

Подставляя (34) в интегральное уравнение (18), относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$v T_{\text{ср}} \frac{5764801}{35294400} \frac{d}{dx} (\beta^{8/7} \delta(x)) = a \frac{8}{3} \frac{T_{\text{ср}}}{\beta \delta(x)}.$$

Учитывая, что $\beta = \Delta(x)/\delta(x)$ не зависит от координаты x , находим

$$\frac{17294403}{282355200} v \beta^{15/7} \delta(x) d\delta(x) = a dx. \quad (35)$$

Интегрируя уравнение (35) при начальном условии $\Delta(0) = 0$, получим

$$\Delta(x) = \frac{3.445 (a \text{Re}^{2/5} v^{14} x^{14})^{7/15}}{x^6 v^7 \text{Re}^{1/5}}. \quad (36)$$

Соотношения (34), (36) представляют собой решение задачи (12)–(15), (17) в третьем приближении. Результаты расчетов по формуле (34) даны на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что отклонение полученных по формуле (34) безразмерных температур от их значений во втором приближении не превышает 1%, что свидетельствует о сходимости приближений.

Дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи (12)–(15), (17) в четвертом приближении, находятся по формулам (33). После определения неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ ($k = 0, 1, \dots, 11$) соотношение (22) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{\text{ср}}} = & \frac{11}{4} \frac{y}{\Delta} - \frac{231}{2} \frac{y^5}{\Delta^5} + 462 \frac{y^6}{\Delta^6} - 825 \frac{y^7}{\Delta^7} + \\ & + 825 \frac{y^8}{\Delta^8} - \frac{1925}{4} \frac{y^9}{\Delta^9} + 154 \frac{y^{10}}{\Delta^{10}} - 21 \frac{y^{11}}{\Delta^{11}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\Delta(x)$ в данном случае запишется как

$$v T_{\text{ср}} \frac{3107227739}{20511275200} \frac{d}{dx} (\beta^{8/7} \delta(x)) = a \frac{11}{4} \frac{T_{\text{ср}}}{\beta \delta(x)}.$$

Учитывая, что $\beta = \Delta(x)/\delta(x)$ не зависит от координаты x , находим

$$\frac{3107227739}{20511275200} v \beta^{15/7} \delta(x) d\delta(x) = a dx. \quad (38)$$

Интегрируя уравнение (38), при начальном условии $\Delta(0) = 0$ получаем

$$\Delta(x) = \frac{3.62 (a \operatorname{Re}^{2/5} v^{14} x^{14})^{7/15}}{x^6 v^7 \operatorname{Re}^{1/5}}. \quad (39)$$

Анализ полученных результатов. Соотношения (37), (39) представляют собой решение задачи (12)–(15), (17) в четвертом приближении. Результаты расчетов по формуле (37) даны на рис. 3 (см. кривую 4). На этом же рисунке приведены также результаты и для ламинарного пограничного слоя (см. кривые 1', 2', 3', 4'). Анализ полученных результатов позволяет заключить, что толщина турбулентного теплового пограничного слоя более чем в два раза меньше толщины ламинарного пограничного слоя.

На основе полученных зависимостей для температуры в пределах турбулентного пограничного слоя, используя дифференциальное уравнение конвективной теплоотдачи, можно определить коэффициент теплоотдачи [4, 5]:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{y=0} = \alpha (T_{\text{cp}} - T_{\text{ст}}), \quad \alpha = \frac{\lambda}{(T_{\text{cp}} - T_{\text{ст}})} \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y}.$$

Если использовать решение в первом приближении (соотношение (24)), то для коэффициента теплоотдачи получим формулу

$$\alpha = 1.5\lambda/\Delta(x).$$

Для решения (37) в четвертом приближении будем иметь

$$\alpha = 2.75\lambda/\Delta(x). \quad (40)$$

Подставляя (39) в (40), находим

$$\operatorname{Nu}_x = 0.75 \operatorname{Re}^{0.48} \operatorname{Pr}^{0.47}, \quad (41)$$

где $\operatorname{Nu}_x = (\alpha x)/\lambda$ — критерий Нуссельта; λ — коэффициент теплопроводности жидкости. Экспериментальная зависимость величины Nu_x [4] для воды имеет вид

$$\operatorname{Nu}_x = 0.037 \operatorname{Re}^{0.8} \operatorname{Pr}^{0.43} (\operatorname{Pr}_x/\operatorname{Pr}_c)^{0.25},$$

где для воды $\operatorname{Pr}_x/\operatorname{Pr}_c = 0.98$ ($T = 20^\circ\text{C}$).

В диапазоне чисел Рейнольдса $20\,000 \leq \operatorname{Re} \leq 30\,000$ отклонение значений критерия Нуссельта, определяемых по критериальному уравнению (41), от экспериментальных его величин составляет около 7%.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВПО «СамГТУ». Код проекта: 1273.

ORCID

Игорь Васильевич Кудинов: <http://orcid.org/0000-0002-9422-0367>

Анастасия Николаевна Бранфилова: <http://orcid.org/0000-0001-6805-2059>

Антон Владимирович Еремин: <http://orcid.org/0000-0002-2614-6329>

Марина Петровна Скворцова: <http://orcid.org/0000-0003-1812-4178>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юдаев Б. Н. *Теплопередача*. М.: Высшая школа, 1981. 319 с.
2. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
3. Исаев С. И., Кожин И. А., Кофанов В. И. и др. *Теория теплообмена* / ред. А. И. Леонтьев. М.: Высшая школа, 1979. 496 с.
4. Михеев М. А., Михеева И. М. *Основы теплопередачи*. М.: Энергия, 1977. 344 с.
5. Прибытков И. А., Левицкий И. А. *Теоретические основы теплотехники*. М.: Академия, 2004. 465 с.
6. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. М.: Наука, 1969. 742 с.
7. Кудинов В. А., Стефанюк Е. В. Получение аналитических решений уравнений гидродинамического и теплового пограничных слоев на основе введения дополнительных граничных условий // *ТБТ*, 2010. Т. 48, № 2. С. 290–302.

Поступила в редакцию 17/X/2014;
в окончательном варианте — 25/XI/2014;
принята в печать — 27/XI/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.] 2014. Issue 4 (37). Pp.157–169

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1356>

MSC: 80A17, 76F40

HEAT TRANSFER SIMULATION IN STIRRING BOUNDARY LAYER USING THE SEMIEMPIRICAL TURBULENCE THEORY

I. V. Kudinov, A. N. Branfileva, A. V. Eremin, M. P. Skvortsova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The dynamic and thermal boundary layer equations are derived for the stirring boundary layer using Prandtl semiempirical turbulence theory. Based on definition of the thermal perturbations front and supplementary boundary conditions the method of constructing an exact analytical solution of the boundary value problem simulating the formation of the thermal boundary layer in the dynamic boundary layer is obtained and applied to find the exact analytical solutions of thermal boundary layer differential equation almost

© 2014 Samara State Technical University.

How to cite Reference

Kudinov I. V., Branfileva A. N., Eremin A. V., Skvortsova M. P. Heat transfer simulation in stirring boundary layer using the semiempirical turbulence theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 4 (37), pp. 157–169. doi: [10.14498/vsgtu1356](https://doi.org/10.14498/vsgtu1356). (In Russian)

Authors Details

Igor V. Kudinov (Cand. Techn. Sci.; igor-kudinov@bk.ru), Associate Professor, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat-Engineering and Hydromechanics.

Anastasiya N. Branfileva (OV_branfilevaAN@samaragilpro.ru), Assistant, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat-Engineering and Hydromechanics.

Anton V. Eremin (Cand. Techn. Sci.; a.v.eremin@list.ru; Corresponding Author), Associate Professor, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat-Engineering and Hydromechanics.

Marina P. Skvortsova (marina.dorozhkina.88@mail.ru), Assistant, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat-Engineering and Hydromechanics.

with a given degree of accuracy. The velocity distribution in stirring dynamic boundary layer and its thickness were taken by the well — known relations, found from experiments. The supplementary conditions fulfillment is equivalent to the fulfillment of the initial differential equation in the boundary point and in the thermal perturbations front. So, the more supplementary conditions we use the better fulfillment of the initial differential equation in the thermal boundary layer we have, because the range of thermal perturbations front changing includes the whole range of transverse spatial variable changing. Analysis of calculations results allows to conclude that the layer thickness within a stirring dynamic boundary layer more than twice less than thermal layer thickness in a laminar dynamic boundary layer. The study of the received in this paper criteria-based equation shows that the difference of heat transfer coefficients in the range $20\,000 \leq Re \leq 30\,000$ of the Reynolds number on the experimental not exceed 7%.

Keywords: stirring dynamic and thermal border layers, semiempirical theory of turbulence, integral method of heat balance, thermal perturbations front, supplementary boundary conditions, criteria-based heat transfer equation.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1356>

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Ministry of Education and Science within the base portion of the state task to Samara State Technical University, project no. 1273.

ORCID

Igor V. Kudinov: <http://orcid.org/0000-0002-9422-0367>

Anastasiya N. Branfileva: <http://orcid.org/0000-0001-6805-2059>

Anton V. Eremin: <http://orcid.org/0000-0002-2614-6329>

Marina P. Skvortsova: <http://orcid.org/0000-0003-1812-4178>

REFERENCES

1. Yudaev B. N. *Teploperedacha* [Heat Transfer]. Moscow, Vysshaya shkola, 1981, 319 pp. (In Russian)
2. Loytsansky L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Drofa, 2003, 840 pp.
3. Isaev S. I., Kozhinov I. A., Kofanov V. I., etc. *Teoriya teplomassoobmena* [Theory of heat and mass transfer], ed. A. I. Leont'ev. Moscow, Vysshaya shkola, 1979, 496 pp. (In Russian)
4. Mikheev M. A., Mikheeva I. M. *Osnovy teploperedachi* [Fundamentals of heat transfer]. Moscow, Energiya, 1977, 344 pp. (In Russian)
5. Pribytkov I. A., Levitsky I. A. *Teoreticheskie osnovy teplotekhniki* [Theoretical fundamentals of heat engineering]. Moscow, Akademiya, 2004, 465 pp. (In Russian)
6. Shlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloia* [Boundary layer theory]. Moscow, Nauka, 1969, 742 pp. (In Russian)
7. Stefanyuk E. V., Kudinov V. A. Obtaining analytical solutions of equations of hydrodynamic and thermal boundary layers by means of introduction of additional boundary conditions, *High Temperature*, 2010, vol. 48, no. 2, pp. 272–284. doi: [10.1134/S0018151X10020203](https://doi.org/10.1134/S0018151X10020203).

Received 17/X/2014;

received in revised form 25/XI/2014;

accepted 27/XI/2014.