Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.6

О ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. В. Тарасенко

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: tarasenko.a.v@mail.ru

Для уравнения смешанного типа исследована однозначная разрешимость задачи с обобщёнными операторами дробного интегро-дифференцирования в краевом условии. Доказана теорема единственности решения нелокальной задачи, доказательство существования решения эквивалентно сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: *краевая задача, обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования, гипергеометрическая функция Гаусса, уравнение Фредгольма второго рода.*

Введение. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y} u, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, \quad m = \mathrm{const} > 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$, от функции $u(x,y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$(D^{\alpha}_{0+,y} u)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x,t)\,dt}{(y-t)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad y > 0.$$

В последнее время появились публикации [2–5], посвящённые исследованию уравнений вида (1). Это связано с их применением в различных задачах физики, химии, механики, в частности, их приложений к процессам субдиффузии и супердиффузии [6, с. 30–34].

Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1) в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости

$$D^+ = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\, y > 0\}$$

и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости ($y < 0$) и ограниченной характеристиками

$$AC : \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

Анна Валерьевна Тарасенко, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

и отрезком $[0,\,1]$ прямой $y=0$. Обозначим через $I=(0,\,1)$ единичный интервал прямой $y=0$, а через $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,\,0)\in I$ соответственно с характеристиками AC и BC.

Пусть $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ — операторы обобщённого дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$, введённые в [7] (см. также [1, с. 326–327]) и имеющие при действительных α, β, η и $x>0$ вид

$$\begin{aligned}
&(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)=\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x}\Big)f(t)\,dt,\\
&\qquad\qquad 0<x<1,\ \alpha>0,\ \beta,\ \eta\in C;\\
&(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)=\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x),\\
&\qquad\qquad 0<x<1,\ \alpha<0,\ \beta,\ \eta\in C, n=[-\alpha]+1;
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)=\frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;\frac{t-x}{1-x}\Big)f(t)\,dt,\\
&\qquad\qquad 0<x<1,\ \alpha>0,\ \beta,\ \eta\in C;\\
&(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)=\Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n(I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x),\\
&\qquad\qquad 0<x<1,\ \alpha<0,\ \beta,\ \eta\in C, n=[-\alpha]+1,
\end{aligned}\tag{3}$$

в частности
$$(I_{0+}^{0,0,\eta}f)(x)=(I_{1-}^{0,0,\eta}f)(x)=f(x).$$

Заметим, что если $\alpha>0$, то справедливы формулы

$$\begin{aligned}
(I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta}f)(x)&=(I_{0+}^{\alpha}f)(x),\quad (I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}f)(x)=(D_{0+}^{\alpha}f)(x),\\
(I_{1-}^{\alpha,-\alpha,\eta}f)(x)&=(I_{1-}^{\alpha}f)(x),\quad (I_{1-}^{-\alpha,\alpha,\eta}f)(x)=(D_{1-}^{\alpha}f)(x),
\end{aligned}$$

где $(I_{0+}^{\alpha}f)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha}f)(x)$ и $(D_{0+}^{\alpha}f)(x)$, $(D_{1-}^{\alpha}f)(x)$ — операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля порядка $\alpha>0$ [1, с. 42, 44].

Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную задачу. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$y^{1-\alpha}u\big|_{y=0}=0,\quad -\infty<x\leqslant 0,\ 1\leqslant x<\infty;\tag{4}$$

$$\begin{aligned}
a(x)\big(I_{0+}^{-\beta,0,2\beta-1}u[\Theta_0(t)]\big)(x)+b(x)\big(I_{1-}^{-\beta,0,2\beta-1}u[\Theta_1(t)]\big)(x)+&\\
+c(x)u(x,0)+d(x)u_y(x,0)=g(x),\quad x\in I,&
\end{aligned}\tag{5}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-}u(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y),\quad x\in\overline{I},\tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0-}u_y(x,y)=\beta(x)\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y,\quad x\in I.\tag{7}$$

Здесь $\beta=m/(2m+4)$; $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $g(x)$ — заданные функции, такие, что

$$
\begin{aligned}
&a(x),\ b(x),\ c(x),\ d(x),\ g(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^2(I),\\
&\alpha(x),\ \beta(x) \in C^2(\overline{I}) \cap C^3(I),\\
&\alpha(x)\beta(x) > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}[\alpha(x)\beta(x)] \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Будем искать решение $u(x, y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что

$$
y^{1-\alpha}u(x,y) \in C(\overline{D^+}), \quad u(x,y) \in C(\overline{D^-}),
$$

$$
y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y \in C(D^+ \cup \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}),
$$

$$
u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-), \quad u_{yy} \in C(\overline{D^-}),
$$

$$
u(x,y) \quad \text{стремится к нулю при} \quad (x^2 + y^2) \to \infty.
$$

1. Единственность решения задачи.

Теорема. *В области D не может существовать более одного решения задачи* (1), (4)–(7), *если*

$$
\frac{a(1)}{E(1)} + \frac{b(0)}{E(0)} \geqslant 0, \tag{9}
$$

$$
E(x) = \gamma_1[a(x) + b(x)] + c(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{I},
$$

$$
\left[\frac{a(x)}{E(x)}\right]' \leqslant 0, \quad \left[\frac{b(x)}{E(x)}\right]' \geqslant 0, \quad \frac{d(x)}{E(x)} \geqslant 0 \quad \forall\, x \in \overline{I}, \tag{10}
$$

где

$$
\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}.
$$

Доказательство. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введём обозначения

$$
\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0-} u(x,y) = \tau_2(x), \tag{11}
$$

$$
\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = \nu_1(x), \quad \lim_{y\to 0-} u_y(x,y) = \nu_2(x). \tag{12}
$$

Известно (см., например, [3, с. 639]), что решение уравнения (1) в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее условию (4) и условию

$$
\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{13}
$$

даётся формулой

$$
u(x,y) = \int_0^1 G(x,y,t)\tau_1(t)\,dt, \tag{14}
$$

где

$$
G(x,y,t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2} y^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{1,\frac{\alpha}{2}}_{1,\frac{\alpha}{2}}\left(-|x-t|y^{-\frac{\alpha}{2}}\right),
$$

$$e_{b,c}^{p,q}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(p+kb)\Gamma(q-ck)},\quad b>c.$$

Заметим, что решение $u(x,y)$ в формуле (14) может быть выражено в терминах специальной функции Райта $\varphi(\gamma,\delta;z)$, определяемой для действительных γ, δ и комплексного z посредством степенного ряда [8, с. 225]:

$$\varphi(\gamma,\delta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma(\gamma k+\delta)}.$$

Согласно этому соотношению

$$e_{1,\frac{\alpha}{2}}^{1,\frac{\alpha}{2}}(z)=\varphi\Big(-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2};z\Big)$$

и, следовательно,

$$u(x,y)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\,y^{\frac{\alpha}{2}-1}\int_0^1\varphi\Big(-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2};-|x-t|y^{-\frac{\alpha}{2}}\Big)\tau_1(t)\,dt.$$

Также известно (см., например, [3, с. 639]), что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесённое из параболической части D^+ на линию $y=0$, имеет вид

$$v_1(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x).\tag{15}$$

Найдём соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесённое на линию $y=0$ из гиперболической части D^- области D.

Используя решение задачи Коши [9, с. 152]

$$u(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1\tau_2\Big[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\Big]t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt+$$
$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\,y\int_0^1\nu_2\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]t^{\beta-1}(1-t)^{-\beta}\,dt$$

и соотношения (2), (3), получим

$$u[\Theta_0(x)]=\gamma_1\big(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau_2(t)\big)(x)-\gamma_2\big(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu_2(t)\big)(x),$$
$$u[\Theta_1(x)]=\gamma_1\big(I_{1-}^{\beta,0,\beta-1}\tau_2(t)\big)(x)-\gamma_2\big(I_{1-}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu_2(t)\big)(x),$$

где

$$\gamma_2=\frac{1}{2}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}.$$

Подставляя $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ в краевое условие (5) и опираясь на полугрупповые свойства обобщённых операторов [1, с. 327]:

$$\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f)(t)\big)(x)=(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f)(x),\quad \gamma>0,$$

$$\big(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f)(t)\big)(x) = (I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f)(x), \quad \gamma > 0,$$

после некоторых преобразований получим соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесённое на линию $y = 0$ из гиперболической части D^- смешанной области D:

$$\tau_2(x) = a_1(x)(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2)(x) + b_1(x)(I_{1-}^{1-2\beta}\nu_2)(x) + c_1(x)\nu_2(x) + g_1(x), \tag{16}$$

где

$$a_1(x) = \gamma_2\,\frac{a(x)}{E(x)}, \quad b_1(x) = \gamma_2\,\frac{b(x)}{E(x)}, \quad c_1(x) = -\frac{d(x)}{E(x)}, \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{E(x)}.$$

Теперь рассмотрим соответствующую однородную задачу ($g(x) \equiv 0$) и оценим интеграл

$$I^* = \int_0^1 \tau_2(x)\nu_2(x)\,dx. \tag{17}$$

Согласно (11), (6) и (12), (7)

$$\tau_2(x) = \alpha(x)\tau_1(x), \quad \nu_2(x) = \beta(x)\nu_1(x) \tag{18}$$

и поэтому в силу равенства (15) имеем

$$I^* = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \alpha(x)\beta(x)\tau_1(x)\tau_1''(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что согласно (4) и (13), $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, получаем

$$I^* = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \tau_1^2(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(\alpha(x)\beta(x)\right)\,dx - \int_0^1 (\tau_1'(x))^2\alpha(x)\beta(x)\,dx\right]. \tag{19}$$

Отсюда в силу (8) вытекает оценка сверху для интеграла (17):

$$I^* \leqslant 0. \tag{20}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы $I^* \geqslant 0$.

При $g(x) = 0$, используя методику, восходящую к Ф. Трикоми [10, с. 385] и применённую в работе [11], будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}I^* = -\int_0^\infty t^{2\beta-1}\,dt\int_0^1 a_1'(x)\bigg[\left(\int_0^x \nu_2(\xi)\cos(t\xi)\,d\xi\right)^2 + \\ + \left(\int_0^x \nu_2(\xi)\sin(t\xi)\,d\xi\right)^2\bigg]\,dx + \\ + \int_0^\infty t^{2\beta-1}\,dt\int_0^1 b_1'(x)\bigg[\left(\int_0^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)\,d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)\,d\xi\right)^2\bigg]\,dx + \\ + \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}\int_0^1 c_1(x)\nu_2^2(x)\,dx + \big[a_1(1) + b_1(0)\big]\times\end{gathered}$$

$$\times \int_0^\infty t^{2\beta-1}\,dt\left[\left(\int_0^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)\,d\xi\right)^2+\left(\int_0^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)\,d\xi\right)^2\right].$$

При выполнении условий (9)–(10) теоремы $a_1'(x)\leqslant 0$, $b_1'(x)\geqslant 0$, $c_1(x)\geqslant 0$, $a_1(1)+b_1(0)\geqslant 0$ и, следовательно,

$$I^*\geqslant 0. \tag{21}$$

Из (20) и (21) вытекает, что $I^*=0$, и, таким образом, учитывая (19), имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \tau_1^2(x)\frac{d^2}{dx^2}(\alpha(x)\beta(x))\,dx-\int_0^1\left(\tau_1'(x)\right)^2\alpha(x)\beta(x)\,dx=0.$$

Отсюда в силу условий

$$\alpha(x)\beta(x)>0,\quad \frac{d^2}{dx^2}(\alpha(x)\beta(x))\leqslant 0$$

и равенств $\tau_1(0)=\tau_1(1)=0$ получаем $\tau_1(x)=0$ для всех $x\in\overline{I}$.

Это согласно формуле (14) означает, что $u(x,y)\equiv 0$ в области D^+.

Поскольку $\tau_2(x)=\alpha(x)\tau_1(x)$ ($\tau_2(x)=0$, если $\tau_1(x)=0$), $\nu_2(x)=\beta(x)\nu_1(x)$ и $\nu_1(x)=0$ на основании соотношения (15) при $\tau_1(x)=0$, то и $\nu_2(x)=0$. Поэтому $u(x,y)\equiv 0$ и в области D^- как решение задачи Коши с нулевыми данными, что и доказывает единственность решения исходной задачи. $\square$

2. Существование решения задачи. Согласно (14) для доказательства существования решения исходной задачи достаточно найти $\nu_1(x)$. Для этого воспользуемся соотношением

$$\Gamma(1+\alpha)\nu_1(x)=\tau_1''(x).$$

Проинтегрируем его дважды от 0 до x:

$$\tau_1(x)=\Gamma(1+\alpha)\int_0^x (x-\xi)\nu_1(\xi)\,d\xi. \tag{22}$$

В силу равенств (18), принимая во внимание (16) и (22), будем иметь

$$\frac{a_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)}\int_0^x\frac{\beta(t)\nu_1(t)}{(x-t)^{2\beta}}dt+\frac{b_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)}\int_x^1\frac{\beta(t)\nu_1(t)}{(t-x)^{2\beta}}dt-$$
$$-\alpha(x)\Gamma(1+\alpha)\int_0^x(x-\xi)\nu_1(\xi)\,d\xi+\beta(x)c_1(x)\nu_1(x)=-g_1(x).$$

Последнему уравнению придадим вид

$$\beta(x)c_1(x)\nu_1(x)+\int_0^1\frac{\nu_1(\xi)K(x,\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{2\beta}}=-g_1(x), \tag{23}$$

где

$$K(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{a_1(x)\beta(\xi)}{\Gamma(1-2\beta)}-\Gamma(1+\alpha)\alpha(x)(x-\xi)^{1+2\beta}, & \xi\leqslant x,\\ \dfrac{b_1(x)\beta(x)}{\Gamma(1-2\beta)}, & \xi\geqslant x.\end{cases}$$

При $c_1(x) \neq 0$ или, что то же самое, $d(x) \neq 0$ уравнение (23) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре, правая часть которого $g_1(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$.

Безусловная разрешимость уравнения (23) в требуемом классе функций следует из единственности решения исследуемой задачи.

Замечание 1. Рассмотрим частный случай, когда $\alpha(x) = k_1 = \text{const}$, $\beta(x) = k_2 = \text{const}$, $a_1(x) = k_3 = \text{const}$, $b_1(x) = c_1(x) \equiv 0$.

При таких условиях соотношение (16) в силу (18) принимает вид

$$k_1\tau_1(x) = k_2k_3\big(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_1(t)\big)(x) + g_1(x). \tag{24}$$

Дифференцируя обе части равенства (24) дважды по x, имеем

$$k_1\tau_1''(x) = k_2k_3\frac{d^2}{dx^2}\big(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_1(t)\big)(x) + g_1''(x)$$

или

$$k_1\tau_1''(x) = k_2k_3\big(D_{0+}^{1+2\beta}\nu_1(t)\big)(x) + g_1''(x). \tag{25}$$

Используя результаты работы [3], можно выписать явный вид решения уравнения (25).

Замечание 2. Если $\beta(x) \neq k_2$, то существование решения исследуемой задачи эквивалентно сводится к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода, что установлено в работе [12].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев*, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev*, Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
2. *А. Н. Кочубей*, “Диффузия дробного порядка” // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670; англ. пер.: *A. N. Kochubei*, “Fractional-order diffusion” // *Differ. Equ.*, 1990. Vol. 26, no. 4. Pp. 485–492.
3. *А. А. Килбас, О. А. Репин*, “Аналог задачи Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной” // *Диффер. уравн.*, 2003. Т. 39, № 5. С. 638–644; англ. пер.: *A. A. Kilbas, O. A. Repin*, “An analog of the Bitsadze-Samarskiy problem for a mixed type equation with a fractional derivative” // *Differ. Equ.*, 2003. Vol. 39, no. 5. Pp. 674–680.
4. *А. В. Псху*, Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с. [*A. V. Pskhu*, Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005. 199 pp.]
5. *З. А. Нахушева*, Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: КБНЦ РАН, 2011. 196 с. [*Z. A. Nakhusheva*, Nonlocal boundary value problems for the main and mixed types of differential equations. Nalchik: KBNTs RAN, 2011. 196 pp.]
6. *В. А. Нахушева*, Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с. [*V. A. Nakhusheva*, Differential equations of mathematical models of nonlocal processes. Moscow: Nauka, 2006. 173 pp.]
7. *M. Saigo*, “A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions” // *Math. Rep. College General Educ., Kyushu Univ.*, 1978. Vol. 11, no. 2. Pp. 135–143.

8. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 301 с.; ориг.:*A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi*, Higher transcendental functions. Vol. 3. New York: McGraw-Hill, 1955. xii+292 pp.
9. *М. М. Смирнов*, Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с. [*M. M. Smirnov*, Equations of mixed type. Moscow: Nauka, 1970. 295 pp.]
10. *Ф. Трикоми*, Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Иностр. лит., 1957. 443 с.; ориг.: *F. G. Tricomi*, Equazioni a derivate parziali. Rome: Edizioni Cremonese, 1957. xii+392 pp.
11. *О. А. Репин, С. К. Кумыкова*, "Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области" // *Диффер. уравн.*, 2012. Т. 48, № 8. С. 1140–1149; англ. пер.: *O. A. Repin, S. K. Kumykova*, "On a boundary value problem with shift for an equation of mixed type in an unbounded domain" // *Differ. Equ.*, 2012. Vol. 48, no. 8. Pp. 1127–1136.
12. *А. А. Килбас, О. А. Репин*, "Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с частной производной Римана–Лиувилля и операторами обобщенного дробного интегрирования в краевом условии" // *Тр. Инст. мат., Минск*, 2004. Т. 12, № 2. С. 75–81. [*A. A. Kilbas, O. A. Repin*, "A non-local problem for the equation of mixed type with the partial Riemann–Liouvile fractional derivative and generalized integro-differentiation operators in boundary condition" // *Tr. Inst. Mat., Minsk*, 2004. Vol. 12, no. 2. Pp. 75–81].

Поступила в редакцию 14/VI/2013;
в окончательном варианте — 24/VIII/2013.

MSC: 35M12; 35M10, 35R11, 35A02

ON A PROBLEM WITH A DISPLACEMENT FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

A. V. Tarasenko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: tarasenko.a.v@mail.ru

The unique solvability of the problem with the generalized operators of fractional integro-differentiation in the boundary condition is investigated for the mixed type equation. The uniqueness theorem for the nonlocal problem is proved. The proof of existence of the problem solution is reduced to the demonstration of solvability of Fredholm integral equation of the second kind.

Key words: *boundary value problem, generalized operator of fractional integro-differentiation, Gauss hypergeometric function, Fredholm equation of the second kind.*

Original article submitted 14/VI/2013;
revision submitted 24/VIII/2013.

Anna V. Tarasenko, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.