Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 3 (32). С. 46–55

УДК 517.956.47

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Т. К. Юлдашев, А. И. Середкина

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева,
Россия, 660014, Красноярск, пр. газеты имени «Красноярский рабочий», 31.

E-mails: `tursunbay@rambler.ru`, `anytik888@yandex.ru`

Предлагается методика изучения обратной задачи для некоторых классов квазилинейных уравнений в частных производных высокого порядка. Доказывается теорема о существовании и единственности решения данной обратной задачи.

Ключевые слова: *обратная задача, квазилинейное уравнение в частных производных, суперпозиция дифференциальных операторов, метод характеристик, существование и единственность решения.*

1. Постановка задачи. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков.

Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, начала формироваться еще в XVIII веке. Характеристики замечательны тем, что выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции по направлению вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных первого порядка как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристики.

Основная идея, на которой основан развиваемый в статье подход, состоит в том, что выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В области $D \equiv D_T \times \mathbb{R}$ рассматривается нелинейное уравнение вида

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)^n L_0[u(t,x)] = f(t,x,\vartheta(t)) \qquad (1)$$

с начальными

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^i u(t,x)}{\partial t^i}\Big|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,2n}, \qquad (2)$$

Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доц.), докторант, доцент, каф. высшей математики. *Анна Игоревна Середкина*, магистрант, инженер, каф. высшей математики.

и дополнительными

$$\int_0^t P(t,s)u(s,x)ds\Big|_{x=x_0} = \psi(t), \quad t \in D_T, \tag{3}$$

$$\vartheta(t)\big|_{t=0} = \varphi_0 = \mathrm{const} \tag{4}$$

условиями, где

$$L_0[u(t,x)] \equiv u_t + au_x, \quad a = a\left(t, x, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right);$$

$\psi(0) = 0$; $u(t,x)$ и $\vartheta(t)$ — неизвестные функции; $f(t,x,\vartheta) \in C(D \times D_T)$; $P(t,s) \in C(D_T^2)$; $a(t,x,u) \in C^{2n,2n}(D \times \mathbb{R})$; $K(t,x) \in C(D)$; $\varphi_i(x) \in C^{2n+2}(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, 2n+1}$; $\psi(t) \in C(D_T)$; $D_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$; n — произвольное натуральное число.

Изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиографию многих публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, можно найти в [1–3]. В настоящей работе изучается обратная задача, где восстанавливаемая функция $\vartheta(t)$ нелинейно входит в уравнение. При решении обратной задачи (1)–(4) относительно восстанавливаемой функции получается нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое с помощью неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода. Задание условия (4) при преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке $t = 0$, т. е. $\vartheta(0) = \varphi_0$. Обратные задачи для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка ранее рассматривались в работах [4, 5].

Определение. Решением обратной задачи (1)–(4) называется пара непрерывных функций $\{u(t,x) \in C^{2n+1,2n+1}(D), \vartheta(t) \in C(D_T)\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(4).

2. Задача Коши (1), (2). Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n L_0[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_0[u] = L_2^n\Big[L_1^n\big[L_0[u]\big]\Big],$$

где

$$L_2\Big[L_1^n\big[L_0[u]\big]\Big] \equiv \big(L_1^n\big[L_0[u]\big]\big)_t - \big(L_1^n\big[L_0[u]\big]\big)_x, \quad L_1\big[L_0[u]\big] \equiv (L_0[u])_t + (L_0[u])_x.$$

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$L_2^n\Big[L_1^n\big[L_0[u]\big]\Big] = f(t,x,\vartheta(t)). \tag{5}$$

Из (5) видно, что уравнение (1) имеет одну однократную характеристику:

$$x - \int_0^t a\left(s, x, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)ds = C_1;$$

две n-кратные характеристики:

$$x - t = C_2, \quad x + t = C_3,$$

где C_i — произвольные постоянные, $i = 1, 2, 3$.

Тогда, интегрируя уравнения (5) n раз вдоль линии третьей характеристики, получаем

$$L_2^{n-1}\Big[L_1^n\big[L_0[u]\big]\Big] = \Phi_1(x+t) + \int_0^t f(s, x, \vartheta(s))ds, \tag{6}$$

$$L_2^{n-2}\Big[L_1^n\big[L_0[u]\big]\Big] = \Phi_2(x+t) + \Phi_1(x+t)t + \int_0^t (t-s) f(s, x, \vartheta(s))ds, \tag{7}$$

$$\vdots$$

$$L_1^n\big[L_0[u]\big] = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x+t)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s, x, \vartheta(s))ds, \tag{8}$$

где $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ — произвольные непрерывные функции, которые подлежат дальнейшему определению.

Из (6) в силу начального условия (2) имеем $\Phi_1(x) = \varphi_{2n+1}$. Так как вдоль третьей характеристики $(x + t = C_3)$

$$\frac{dL_1^n\big[L_0[u]\big]}{dt} = \frac{\partial L_1^n\big[L_0[u]\big]}{\partial t} + \frac{\partial L_1^n\big[L_0[u]\big]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \Big(L_1^n\big[L_0[u]\big]\Big)_t - \Big(L_1^n\big[L_0[u]\big]\Big)_x,$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n L_1^n\big[L_0[u]\big]}{dt^n} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)^n L_1^n\big[L_0[u]\big], \tag{9}$$

в силу условия (2) из (7) и (8) имеем

$$\Phi_2(x) = \varphi_{2n}(x), \ldots, \Phi_n(x) = \varphi_{n+2}(x).$$

Тогда уравнение (8) приобретает следующий вид интегро-дифференциального уравнения:

$$L_1^n\big[L_0[u]\big] = \sum_{i=1}^n \varphi_{n+i+1}(x+t)\frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s, x, \vartheta(s))ds. \tag{10}$$

Аналогично, интегрируя уравнения (10) n раз вдоль второй характеристики, получаем

$$L_1^{n-1}\big[L_0[u]\big] = \Phi_{n+2}(x-t) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_{n+j+1}(x+s)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds + \\ + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f(s, x, \vartheta(s))ds, \tag{11}$$

$$L_1^{n-2}\big[L_0[u]\big] = \Phi_{n+3}(x-t) + \Phi_{n+2}(x-t)t +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t (t-s)\varphi_{n+j+1}(x+s)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1!}f(s,x,\vartheta(s))ds, \quad (12)$$

$$\vdots$$

$$L_0[u] = \sum_{i=n+1}^{2n}\Phi_{i+1}(x-t)\frac{t^{2n-i}}{(2n-i)!} + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{n+j+1}(x+s)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds +$$
$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1!}f(s,x,\vartheta(s))ds, \quad (13)$$

где $\Phi_i(x)$, $i=\overline{n+1,2n}$ — произвольные непрерывные функции, которые подлежат дальнейшему определению.

Из (11) в силу начального условия (2) имеем $\Phi_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x)$.

Вдоль третьей характеристики справедливо (9). А вдоль второй характеристики имеем

$$\frac{dL_0[u]}{dt} = \frac{\partial L_0[u]}{\partial t} + \frac{\partial L_0[u]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \Big(L_0[u]\Big)_t + \Big(L_0[u]\Big)_x,$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^n L_0[u]}{dt^n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_0[u]. \quad (14)$$

Тогда в силу (2) из (12) и (13) получаем

$$\Phi_{n+2}(x) = \varphi_n(x), \ldots, \Phi_{2n}(x) = \varphi_2(x).$$

Отсюда имеем следующее квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_0[u] = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{i+1}(x-t)\frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{n+j+1}(x+s)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds +$$
$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1!}f(s,x,\vartheta(s))ds. \quad (15)$$

Интегрируя (15) один раз вдоль линии первой характеристики, с учётом начального условия (2) получаем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра (см. [4,5]):

$$u(t,x) \equiv \Theta_1(t,x;u,\vartheta) = \varphi_1\left(x - \int_0^t a\Big(s,x,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i+1}(x-t)\frac{t^i}{i!} + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{n+j+1}(x+s)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!} f(s,x,\vartheta(s))ds, \quad (16)$$

где x играет роль параметра.

Функция

$$\varphi_1\Big(x-\int_0^t a\Big(s,x,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\Big)$$

является первым интегралом уравнения $u_t + au_x = 0$ и она постоянна вдоль решения этого уравнения. Производные этой функции вдоль первой характеристики равны нулю и сама функция удовлетворяет данному уравнению.

В (16) также отметим, что функции $\varphi_2(x-t), \varphi_3(x-t), \ldots, \varphi_{n+1}(x-t)$ являются первыми интегралами уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(t,x) = 0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Производные этих функций вдоль второй характеристики равны нулю и сами эти функции удовлетворяют данному уравнению.

А функции $\varphi_{n+2}(x+t), \varphi_{n+3}(x+t), \ldots, \varphi_{2n+1}(x+t)$ являются первыми интегралами уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(t,x) = 0$$

и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Вдоль третьей характеристики эти функции удовлетворяют данному уравнению.

Исходя из этих соображений покажем, что интегральное уравнение (16) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (1). Путём $(2n+1)$-кратного дифференцирования из (16) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^{2n+1}u(t,x)}{dt^{2n+1}} = f(t,x,\vartheta(t)), \quad (17)$$

где x играет роль параметра.

Так как вдоль третьей характеристики справедливо (9), а вдоль второй характеристики — (14), имеем

$$\frac{d^{2n+1}u(t,x)}{dt^{2n+1}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_0[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n (u_t + au_x).$$

Отсюда заключаем, что из обыкновенного дифференциального уравнения (17) следует диффференциальное уравнение в частных производных (1).

3. Уравнение для восстанавливаемой функции. Используя условие (4), из (16) получаем

$$\psi(t) = \alpha(t)\varphi_1\left(x_0-\int_0^t a\Big(s,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)+$$
$$+\int_0^t P(t,s)\left(\sum_{i=1}^n \varphi_{i+1}(x_0-t)\frac{s^i}{i!}+\sum_{j=1}^n \varphi_{n+j+1}(x_0+t)\frac{s^{n+j}}{(n+j)!}\right)ds+$$

$$+\int_0^t P(t,s)\frac{(t-s)^{2n+1}}{(2n+1)!}f(s,x_0,\vartheta(s))ds,\ \alpha(t)=\int_0^t P(t,s)ds$$

или

$$\int_0^t h(t,s,\vartheta(s))ds=g(t)-$$
$$-\alpha(t)\varphi_1\left(x_0-\int_0^t a\Big(s,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right),\quad (18)$$

где

$$h(t,s,\vartheta(s))=P(t,s)\frac{(t-s)^{2n+1}}{(2n+1)!}f(s,x_0,\vartheta(s)),$$

$$g(t)=\psi(t)-\int_0^t P(t,s)\left(\sum_{i=1}^n\varphi_{i+1}(x_0-t)\frac{s^i}{i!}+\sum_{j=1}^n\varphi_{n+j+1}(x_0+t)\frac{s^{n+j}}{(n+j)!}\right)ds.$$

Относительно восстанавливаемой функции $\vartheta(t)$ уравнение (18) является нелинейным интегральным уравнением Вольтерра первого рода. Его с помощью классических методов невозможно свести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, к которому мы могли бы применять метод последовательных приближений. Уравнение (18) запишем в виде [6]

$$\vartheta(t)+\int_0^t G(s)\vartheta(s)ds=\vartheta(t)+g(t)-$$
$$-\alpha(t)\varphi_1\left(x_0-\int_0^t a\Big(s,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)+$$
$$+\int_0^t\Big[G(s)\vartheta(s)-h(t,s,\vartheta(s))\Big]ds,\quad (19)$$

где $0<G(t)$ — произвольная функция такая, что

$$\exp\Big\{-\int_0^t G(s)ds\Big\}\ll 1.$$

Применяя к (19) метод резольвенты ядра $[-G(s)]$, получаем

$$\vartheta(t)=\vartheta(t)+g(t)-\alpha(t)\varphi_1\left(x_0-\int_0^t a\Big(s,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)+$$
$$+\int_0^t\Big[G(s)\vartheta(s)-h(t,s,\vartheta(s))\Big]ds-\int_0^t G(s)\exp\Big\{-\mu(t,s)\Big\}\Big\{\vartheta(s)+g(s)-$$
$$-\alpha(s)\varphi_1\left(x_0-\int_0^s a\Big(\theta,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi,y)u(\xi,y)dyd\xi\Big)d\theta\right)+$$
$$+\int_0^s\Big[G(\theta)\vartheta(\theta)-h(s,\theta,\vartheta(\theta))\Big]d\theta\Big\}ds,\quad (20)$$

где

$$\mu(t,s)=\int_s^t G(\theta)d\theta, \quad \mu(t,0)=\mu(t).$$

После несложных преобразований из (20) имеем

$$\begin{aligned}\vartheta(t)\equiv\Theta_2(t;u,\vartheta)=\Big\{\vartheta(t)+g(t)-\\
-\alpha(t)\varphi_1\left(x_0-\int_0^t a\Big(s,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)+\\
+\int_0^t\Big[G(s)\vartheta(s)-h(t,s,\vartheta(s))\Big]ds\Big\}\exp\Big\{-\mu(t)\Big\}+\\
+\int_0^t G(s)\exp\Big\{-\mu(t,s)\Big\}\Big\{g(t)-g(s)+\vartheta(t)-\vartheta(s)-\\
-\alpha(t)\varphi_1\left(x_0-\int_0^t a\Big(s,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\Big)ds\right)+\\
+\alpha(s)\varphi_1\left(x_0-\int_0^s a\Big(\theta,x_0,\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi,y)u(\xi,y)dyd\xi\Big)d\theta\right)+\\
+\int_0^t\Big[G(s)\vartheta(s)-h(t,s,\vartheta(s))\Big]ds-\int_0^s\Big[G(\theta)\vartheta(\theta)-h(s,\theta,\vartheta(\theta))\Big]d\theta\Big\}ds.\end{aligned}\tag{21}$$

Уравнение (18) при начальном условии (4) эквивалентно уравнению (21).

4. Разрешимость обратной задачи (1)–(4). Итак, мы получаем, что разрешимость обратной задачи (1)–(4) эквивалентна разрешимости следующей системы нелинейных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}u(t,x)\equiv\Theta_1(t,x;u,\vartheta),\\ \vartheta(t)\equiv\Theta_2(t;u,\vartheta),\end{cases}\tag{22}$$

где x играет роль параметра.

Для произвольной непрерывной в области D функции $h(t,x)$ норму вводим следующим образом:

$$\|h(t,x)\|=\max_{(t,x)\in D}|h(t,x)|,$$

где x играет роль параметра. Аналогично вводится норма для функции одной переменной.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $|\varphi_i(x)|\leqslant M_i$, $0<\sum\limits_{i=1}^{2n+1}M_i\dfrac{T^i}{i!}\leqslant\Delta_0<\infty$;

2) $f(t,x,\vartheta)\in\mathrm{Bnd}(M_0(t))\cap\mathrm{Lip}\{L_0(t)|_\vartheta\}$;

3) $0<\displaystyle\int_0^T\frac{(T-s)^{2n}}{(2n)!}M_0(s)ds\leqslant\Delta_1<\infty$;

4) $0 < \displaystyle\int_0^T \frac{(T-s)^{2n}}{(2n)!} L_0(s)ds \leqslant \Delta_2 < \infty;$
5) $\varphi_1(x) \in \mathrm{Lip}\{L_1|_x\}$, $0 < L_1 < \infty$;
6) $a(t,x,z) \in \mathrm{Lip}\{L_2(t)|_z\}$,
$0 < L_1 \displaystyle\int_0^T L_2(t) \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)dydsdt \leqslant \Delta_3 < \infty;$
7) $\rho < 1$, *где* $\rho = \max\{\beta_1; \beta_2\}$, $\beta_2 = \max\{\Delta_3; \|\alpha(t)\|\Delta_3 M_0\}$,
$\beta_1 = \max\Big\{\Delta_2; \Big(1 + \displaystyle\int_0^T \|G(t)\|dt + \|P(t,s)\| \frac{T\Delta_2}{2n+1}\Big) M_0\Big\},$
$M_0 = \max\limits_{t \in D_T}\Big\{\exp\{-\mu(t)\} + 2\displaystyle\int_0^t G(s)\exp\{-\mu(t,s)\}ds\Big\} \ll 1.$

Тогда обратная задача (1)–(4) *имеет единственное решение в области* D.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} u_0(t,x) = 0, & u_{k+1}(t,x) \equiv \Theta_1(t,x;u_k,\vartheta_k), \\ \vartheta_0(t) = 0, & \vartheta_{k+1}(t) \equiv \Theta_2(t;u_k,\vartheta_k), \qquad k = 0,1,2,\dots, \end{cases} \tag{23}$$

где x играет роль параметра. Тогда в силу условий теоремы из (23) получаем, что справедливы следующие оценки:

$$\|u_1(t,x) - u_0(t,x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{2n+1} M_i \frac{t^i}{i!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!} M_0(s)ds \leqslant \Delta_0 + \Delta_1; \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\|u_{k+1}(t,x) - u_k(t,x)\| \leqslant \\ &\leqslant L_1 \int_0^t L_2(s) \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)\|u_k(\theta,y) - u_{k-1}(\theta,y)\|dyd\theta ds + \\ &+ \int_0^t \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!} L_0(s)\|\vartheta_k(s) - \vartheta_{k-1}(s)\|ds \leqslant \\ &\leqslant \Delta_3\|u_k(t,x) - u_{k-1}(t,x)\| + \Delta_2\|\vartheta_k(t) - \vartheta_{k-1}(t)\|; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\|\vartheta_1(t) - \vartheta_0(t)\| \leqslant \Big(\|g(t)\| + \|\alpha(t)\|M_1 + \int_0^t \|h(t,s,0,0)\|ds\Big)\Big\{\exp\{-\mu(t)\} + \\ &+ 2\int_0^t G(s)\exp\{-\mu(t,s)\}\Big(\|g(t)\| + \|\alpha(t)\|M_1 + \int_0^t \|h(t,s,0,0)\|ds\Big)ds\Big\} \leqslant \\ &\leqslant \Big(\|g(t)\| + \|\alpha(t)\|M_1 + \int_0^T \|h(T,s,0,0)\|ds\Big)M_0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$M_0 = \max_{t \in D_T}\Big\{\exp\{-\mu(t)\} + 2\int_0^t G(s)\exp\{-\mu(t,s)\}ds\Big\} \ll 1;$$

$$
\begin{gathered}
\|\vartheta_{k+1}(t)-\vartheta_k(t)\| \leqslant \\
\leqslant \|\alpha(t)\| M_0 L_1 \int_0^t L_2(s) \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)\|u_k(\theta,y)-u_{k-1}(\theta,y)\| dy d\theta ds+ \\
+\left\{1+\int_0^t \|G(s)\| ds+\int_0^T \|P(t,s)\| \frac{(T-s)^{2n+1}}{(2n+1)!} L_0(s) ds\right\} M_0 \|\vartheta_k(t)-\vartheta_{k-1}(t)\| \leqslant \\
\leqslant \|\alpha(t)\| \Delta_3 \|u_k(t,x)-u_{k-1}(t,x)\|+ \\
+\left\{1+\int_0^T \|G(t)\| dt+\|P(t,s)\| \frac{T\Delta_2}{2n+1}\right\} M_0 \|\vartheta_k(t)-\vartheta_{k-1}(t)\|. \quad (27)
\end{gathered}
$$

Примем следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
\beta_1=\max\left\{\Delta_2; \left(1+\int_0^T \|G(t)\| dt+\|P(t,s)\| \frac{T\Delta_2}{2n+1}\right) M_0\right\}, \\
\beta_2=\max\left\{\Delta_3; \|\alpha(t)\| \Delta_3 M_0\right\}, \qquad \rho=\max\left\{\beta_1; \beta_2\right\}.
\end{gathered}
$$

Тогда из (25) и (27) имеем

$$
\|U_{k+1}(t,x)-U_k(t,x)\| \leqslant \rho \|U_k(t,x)-U_{k-1}(t,x)\|, \qquad (28)
$$

где $\|U_k(t,x)-U_{k-1}(t,x)\| \equiv \|u_k(t,x)-u_{k-1}(t,x)\|+\|\vartheta_k(t)-\vartheta_{k-1}(t)\|$.

Из оценок (24), (26) и (28) следует, что операторы в правой части системы (22) являются сжимающими. Следовательно, обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение в области D. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *А. М. Денисов*, Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 285 с. [*A. M. Denisov*, Introduction to the theory of inverse problem. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1994. 285 pp.]
2. *В. Г. Романов*, Обратные задачи для математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с. [*V. G. Romanov*, Inverse problem for mathematical physics. Moscow: Nauka, 1984. 264 pp.]
3. *М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев*, Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1999. 330 с. [*M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev*, Linear operators and ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1999. 330 pp.]
4. *Т. К. Юлдашев*, "Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка" // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2012. №2. С. 56–62. [*T. K. Yuldashev*, "On the inverse problem for the quasilinear partial differential equation of the first order" // *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2012. no. 2. Pp. 56–62].
5. *Т. К. Юлдашев*, "Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка" // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика*, 2012. Т. 6, №11(270). С. 35–41. [*T. K. Yuldashev*, "On the inverse problem for a system of quasi-linear partial differential equations of the first order" // *Vestn. YuUrGU. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2012. Vol. 6, no. 11(270). Pp. 35–41].
6. *Т. К. Юлдашев*, "Неявное эволюционное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейным интегральным отклонением" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. №2(19). С. 38–44. [*T. K. Yuldashev*, "Nonexplicit evolution Volterra integral equation of the first kind with nonlinear integral delay" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 2(19). Pp. 38–44].

Поступила в редакцию 06/XI/2012;
в окончательном варианте — 14/III/2013.

MSC: 35K70, 35R30

INVERSE PROBLEM FOR QUAZILINEAR PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER

T. K. Yuldashev, A. I. Seredkina

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
31, pr. "Krasnoyarski Rabochiy", Krasnoyarsk, 660014, Russia.

E-mails: `tursunbay@rambler.ru, anytik888@yandex.ru`

A method of studying an inverse problem for the some classes of quasilinear partial integro-differential equation of the higher order is proposed. A theorem on the existence and uniqueness of the solution of this problem is proved.

Key words: *inverse problem, quasilinear equation, superposition of differential operator, characteristics method, existence and uniqueness of the solution.*

Original article submitted 06/XI/2012;
revision submitted 14/III/2013.

Tursun K. Yuldashev (Ph. D. Phys. & Math.), Doctoral Candidate, Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics. *Ann I. Seredkina*, Graduate Student, Ingineer, Dept. of Higher Mathematics.