Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 3 (32). С. 56–68

Математический анализ

УДК 517.982.45

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ МИКУСИНСКОГО НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ СВЁРТКИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМЫ И НАЧАЛО ПРИМЕНЕНИЯ

И. Л. Коган

Российский государственный аграрный университет — МСХА им. К. А. Тимирязева,
Россия, 127550, Москва, Тимирязевская ул., 49.

E-mail: ik_@list.ru

Рассматривается аппарат операторного исчисления Микусинского, основанного на использовании алгебры свёртки обобщённых функций D'_+ и D'_-. Сформулированы и доказаны основные теоремы. Приводятся примеры использования, которые иллюстрируют дополнительные возможности: распространение решений на область отрицательных значений аргумента, снятие ограничений на рост функций, стоящих в правых частях неоднородных уравнений, получение новых методов решений неоднородных уравнений с разрывной правой частью.

Ключевые слова: *исчисление Микусинского, пространство обобщённых функций, свёртка обобщённых функций, алгебра свёртки, преобразование Лапласа.*

Введение. Настоящая работа является продолжением [1]. Как и в указанной работе, формулировки теорем операторного исчисления, если не оговорено особо, излагаются одновременно для пространств D'_+ и D'_-, при этом отличительные положения, относящиеся к D'_-, даются в скобках. Учитывая, что для функций в классическом понимании в этих пространствах формулы соответствия между функцией-оригиналом и её изображением отличаются лишь знаком, выкладки и формулы приводятся только в случае D'_+. Для обозначения новых теорем и формул используется нумерация начиная с единицы; в скобках даётся сквозная нумерация теорем, продолжающая нумерацию [1]. На приведённых примерах проиллюстрированы дополнительные возможности операторного исчисления: распространение решений на область отрицательных значений аргумента, снятие ограничений на рост функций, стоящих в правых частях неоднородных уравнений, получение новых методов решений неоднородных уравнений с разрывной правой частью.

1. Основные теоремы (продолжение).

Теорема 1(7). *Для любой функции $f(t) \in K_+$ (K_-) существует изображение, представляющее аналитическую функцию в полуплоскости $s = \operatorname{Re} p \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$. Для этого изображения выполняется предельное соотно-*

Иосиф Леонидович Коган (к.т.н.), ст. преподаватель, каф. высшей математики.

шение

$$\lim_{s\to+\infty} F(p) = 0,\ f(t) \in K_+ \quad \bigl(\lim_{s\to-\infty} F(p) = 0,\ f(t) \in K_-\bigr). \tag{1}$$

Доказательство основано на том, что всякая кусочно-непрерывная функция на любом интервале непрерывности, согласно теоремам Вейерштрасса и Фейера, может быть выражена как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических или степенных многочленов. Изображение этих многочленов, независимо от представления, есть аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки, являющейся нулём для этой функции. Таким образом, любая непрерывная на конечном интервале функция, по крайней мере, локально отображается на аналитическую функцию комплексного переменного, соответствующую требованиям теоремы. В случае, когда рассматриваемый интервал такой функции включает точку разрыва, нетрудно показать, воспользовавшись теоремами линейности [1, теорема 2] и запаздывания (теорема 6, приведенная ниже), что также выполнены утверждения теоремы: условие аналитичности изображения соблюдено, имеют место предельные соотношения (1) и, в силу теоремы 6, только они. □

Следствие. *Изображения функций $f(t) \in K_+$ (K_-) можно формально сколь угодно много раз дифференцировать по параметру p. Это же, естественно, относится к изображениям операторов дифференцирования или импульсных функций, а также к изображениям операторов интегрирования.*

Замечание 1. Особым оригиналом, как и для преобразования Лапласа, является функция $(t-\tau)^\lambda$ при $-1 < \lambda < 0$, для которой точка $t = \tau$ является точкой разрыва второго рода, а изображением — аналитическая функция.

Теорема 2(8). *Если $f(t) \in K_+$ (K_-) и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то общий вид обратной функции в алгебре свёртки D'_+ (D'_-) :*

$$f^{-1}(t) = c_0\delta + \sum_{i=1}^{n} c_i(\delta')^i + R(t) \quad \left(f^{-1}(t) = c_0\delta + \sum_{i=1}^{n} c_i(\delta')^i - R(t)\right), \tag{2}$$

где $R(t) \in K_+$ (K_-), n — порядок полюса для функции $F^{-1}(p)$ в бесконечно удалённой точке.

Доказательство. Действительно, $F^{-1}(p) = 1/F(p)$. Поэтому, согласно теореме 1, $F^{-1}(p)$ — аналитическая функция и $\lim_{p(s)\to\infty} F^{-1}(p) \to \infty$. Отсюда бесконечно удалённая точка является полюсом конечного порядка n для этого изображения. Из разложения в ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки получаем

$$F^{-1}(p) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i(p)^i + R(p).$$

Здесь

$$R(p) = \sum_i c_{-i}p^{-i}$$

уже удовлетворяет предельному соотношению (1), т. е. $R(p) \leftrightarrow R(t) \in K_+$ (K_-). На основании этого представления следует (2). □

При доказательстве следующих двух теорем примем, что оригинал $f(t)$ является фундаментальным решением некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, отвечающим нулевым начальным условиям. В этом случае связь между оригиналом и его изображением известна [1, теорема 3]. Это допущение нисколько не ограничивает общности доказательств, т. к. функция, являющаяся оригиналом в классическом понимании, либо представляет указанное фундаментальное решение, либо, учитывая обоснование теоремы 1, на любом конечном интервале непрерывности может быть сколь угодно точно выражена через линейную комбинацию такого рода решений.

Теорема 3(9). Теорема смещения изображения. *Если* $f(t) \in K_+$ (K_-) *и* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *то для любого числа* $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(p-\lambda). \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, исходя из нашего допущения имеет место свёрточное уравнение

$$L(\delta') * f(t) = \delta(t),$$

где

$$L(\delta') = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} (\delta')^i \quad (a_0 = 1),$$

или дифференциальное уравнение

$$L(D) f(t) = \delta(t).$$

Здесь и в дальнейшем D — оператор дифференцирования в смысле теории обобщённых функций, $L(D)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, соответствующий $L(\delta')$. Кроме этого, $(L(p))^{-1} = F(p)$ [1, теорема 3]. Введём функцию $y(t) = e^{\lambda t} f(t)$, откуда $f(t) = e^{-\lambda t} y(t)$. По известному свойству оператора $L(D)$ в случае нулевых начальных условий

$$L(D) e^{-\lambda t} y(t) = e^{-\lambda t} L(D-\lambda) y(t) = \delta(t).$$

Из этого уравнения получаем

$$L(D-\lambda) y(t) = e^{\lambda t} \delta(t) = \delta(t)$$

или

$$L(\delta' - \lambda) * y(t) = \delta(t).$$

Отсюда $*e^{\lambda t} f(t) = *(L(\delta'-\lambda))^{-1}$ и следует (3). □

Теорема 4(10). Теорема подобия. *Если* $f(t) \in K_+(K_-)$ *и* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *то для любого числа* $\tau \in \mathbb{R}_+$

$$f(\tau t) \leftrightarrow (1/\tau) F(p/\tau). \tag{4}$$

Доказательство. Введём вместо переменной t новую переменную τt. Учитывая, что при нулевых начальных условиях $(\delta'/\tau)^n * f(\tau t) = f^{(n)}(\tau t)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и исходя из нашего допущения перед теоремами 3 и 4 приходим к уравнению для этой переменной:

$$L(\delta'/\tau) * f(\tau t) = \delta(\tau t).$$

Так как $\delta(\tau t) = (1/\tau)\delta(t)$ $(\tau > 0)$, из последнего уравнения

$$*f(\tau t) = *(1/\tau)(L(\delta'/\tau))^{-1}$$

и следует (4). □

Теорема 5(11). Теорема о дифференцировании по параметру. *Пусть*

$$f(t, \lambda) \leftrightarrow F(p, \lambda)$$

для любого числа $\lambda \in I \subset \mathbb{C}$ и существуют производные по λ от левой и правой частей этого соотношения. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda) \leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda}(p, \lambda), \quad \lambda \in I. \tag{5}$$

Доказательство. Действительно, по свойству линейности для указанных значений параметра λ

$$\frac{f(t, \lambda + \Delta\lambda) - f(t, \lambda)}{\Delta\lambda} \leftrightarrow \frac{F(p, \lambda + \Delta\lambda) - F(p, \lambda)}{\Delta\lambda}.$$

Переходя к пределам при $\Delta\lambda \to 0$, получаем (5). □

Приложение. *Изображение смещённой дельта-функции Дирака (экспоненциальное представление $\delta(t - \tau)$ или оператора сдвига). Примем по определению* [2, 3]

$$\delta(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}, \tag{6}$$

где число $\tau \in \mathbb{R}$. Следуя [2], *покажем корректность этого определения, а именно*:

1) *операция дифференцирования по параметру τ соотношения* (6) *не меняет соответствия между оригиналом и его изображением, заданным этой формулой*;
2) *на основании* (6) *справедливо функциональное уравнение*

$$e^{-(\tau+\mu)p} = e^{-\tau p} e^{-\mu p}. \tag{7}$$

Доказательство. Дифференцирование левой и правой частей (6) по параметру τ даёт соответственно

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\delta(t - \tau) = -\delta'(t - \tau) \quad \text{и} \quad -pe^{-p\tau}.$$

Пользуясь теоремой умножения [1, теорема 4] и (6), можем записать

$$pe^{-p\tau} \leftrightarrow \delta'(t) * \delta(t-\tau) = \delta'(t-\tau).$$

Следовательно, $\delta'(t-\tau) \leftrightarrow pe^{-p\tau}$ и первое утверждение доказано. Теперь докажем (7). Раскрывая правую часть и используя (6), приходим к левой части этой формулы:

$$e^{-\tau p}e^{-\mu p} \leftrightarrow \delta(t-\tau) * \delta(t-\mu) = \delta(t-(\tau+\mu)) \leftrightarrow e^{-(\tau+\mu)p}.$$

Если $\tau = -\mu$, то $\delta(t) \leftrightarrow e^0 = 1$. Аналогично, из левой части (7) можно прийти к правой части формулы. Таким образом, введённое определение корректно. □

Теорема 6(12). Теорема запаздывания оригинала. *Пусть* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тогда для любого числа* $\tau \in \mathbb{R}_+$ $(\tau \in \mathbb{R}_-)$

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p).$$

Доказательство. Действительно, используя (6) и теорему умножения, имеем $f(t-\tau) = \delta(t-\tau) * f(t) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p)$. □

Теорема 7(13). Теорема дифференцирования изображения. *Если* $f(t) \in K_+(K_-)$ *и* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тогда*

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrow (-1)^n t^n f(t). \tag{8}$$

Доказательство. На основании теоремы 5 продифференцируем соотношение (3) (теорема смещения изображения) по параметру λ. Это законно, т. к. $F(p)$, согласно теореме 1, — аналитическая функция. Тогда

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrow (-1)^n t^n f(t).$$

Опять применяя к полученному соотношению теорему смещения изображения, имеем

$$e^{-\lambda t}(te^{\lambda t}f(t)) = tf(t) \leftrightarrow -F'(p) \quad \text{или} \quad F'(p) \leftrightarrow -tf(t).$$

Повторное использование полученной формулы приводит к общему выражению (8).□

Теорема 8(14). Теорема интегрирования изображения для пространства D'_+. *Пусть* $f(t) \leftrightarrow F(p)$ $(f(t) \in K_+)$ *и несобственный интеграл*

$$\int_p^\infty F(p)dp = \Phi_+(p)$$

сходится, если весь путь интегрирования (p, ∞) *лежит в области* $s > 0$, *тогда*

$$f(t)/t \leftrightarrow \int_p^\infty F(p)dp \quad (t \in \mathbb{R}_+). \tag{9}$$

Доказательство. На основании теоремы 1 $F(p)$ — аналитическая функция и $\lim_{p(s)\to+\infty} F(p) = F(\infty) = 0$. Поэтому $\lim_{p(s)\to+\infty} \Phi_+(p) = 0$ и $\Phi_+(p)$ является изображением функции класса K_+. Далее находим функцию $\varphi(t)$, для которой $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi_+(p)$. Применяя к этому соотношению предыдущую теорему, находим

$$-\varphi(t)t \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial p}\Phi_+(p) = -F(p).$$

Таким образом, $\varphi(t)t = f(t)$ или $\varphi(t) = f(t)/t$. Откуда следует (9). $\square$

Теорема 9(15). Первая теорема разложения. *Если изображение $F(p)$ имеет при $|p| \geqslant s_0$ разложение в ряд Лорана*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k/p^k,$$

то оригиналом для $F(p)$ является целая функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1},$$

удовлетворяющая неравенству $|f(t)| \leqslant Me^{s_0|t|}$. Справедливо и обратное утверждение.

Формулировка и доказательство полностью совпадают с теоремой для преобразования Лапласа, например [4].

Теорема 10(16). Вторая теорема разложения. *Если изображение $F(p) = A(p)/B(p)$ представляет правильную дробно-рациональную функцию, то оригиналом для $F(p)$ является функция*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(t)} \left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{c_i^{(k)}}{(n_k-i-1)!} t^{n_k-i-1} \right), \tag{10}$$

где

$$c_i^{(k)} = \frac{1}{i!} \lim_{p\to\lambda_k} \frac{d^i}{dp^i} F(p)(p-\lambda_k)^{n_k}, \tag{11}$$

n — число корней знаменателя, λ_k — значения этих корней, а n_k — их кратности.

Доказательство. Действительно, правильная дробно-рациональная функция может быть единственным образом разложена на простейшие дроби:

$$F(p) = A(p)/B(p) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \frac{c_i^{(k)}}{(p-\lambda_k)^{n_k-i}} \right),$$

где $c_i^{(k)}$ можно найти по формуле (11). Используя $e^{\lambda t}t^n \leftrightarrow n!/(p-\lambda)^{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ и свойство линейности, приходим к (10). $\square$

Замечание 2. Формулу (10) с учётом (11) можно представить в привычном для преобразования Лапласа виде:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to\lambda_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}(F(p)(p-\lambda_k)^{n_k}e^{pt}).$$

Можно показать, что оригинал, определённый по формуле (10), удовлетворяет неравенству $|f(t)|\leqslant Me^{s_0t}$, где M и s_0 — некоторые постоянные.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: основные теоремы преобразования Лапласа и операторного исчисления в пространстве D'_+ полностью идентичны. Кроме того, операторное исчисление не только позволяет распространить метод на пространствоD'_-, но и имеет собственные теоремы (представлены теоремы 1 и 2), которые также расширяют возможности этого исчисления. Так, теорема 1 определяет существование изображений у любых функций класса $K_+(K_-)$, в том числе имеющих при $|t|\to\infty$ рост больший, чем экспоненциальный. Это дает возможность в ряде случаев обойти ограничения на используемые функции, накладываемые преобразованием Лапласа.

2. Применение к интегрально-дифференциальным уравнениям. Рассмотрим интегрально-дифференциальное уравнение

$$L(D)x(t)+\int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau=f(t), \tag{12}$$

где $L(D)=D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\dots+a_n$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами при ненулевых начальных условиях

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1,\ \dots,\ x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}. \tag{13}$$

Уравнение (12) имеет следующие частные случаи:

а) простейшее интегрально-дифференциальное уравнение, если

$$K(t)\equiv c=\text{const};$$

б) обыкновенное дифференциальное уравнение, если

$$K(t)\equiv 0;$$

в) интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода типа свёртки, если

$$L(D)\equiv 1;$$

г) интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода типа свёртки, если

$$L(D)\equiv 0.$$

Начальные условия (13) для последних двух частных случаев не требуются.

Предложение. *Для любой функции $f(t) \in K_+$ (K_-) и ядра $K(t) \in M \subset K_+$ (для пространства D'_- считаем, что $K(t) \in M$, если $t \in \mathbb{R}_+$; в случаях а) и б) $K(t)$ задано) уравнение (12) с начальными условиями (13) всегда имеет единственное решение.*

Во всех случаях, за исключением случая г), справедливы следующие утверждения:

1) *решение находится в том же классе функций, что и правая часть исходного уравнения;*
2) *если функция $f(t)$ задана единым аналитическим выражением на всей оси, то решение, полученное с помощью свёрточного преобразования в пространстве D'_+, можно распространить на область отрицательных значений аргумента.*

В случае г) найденные решения в пространствах D'_+ и D'_- могут не совпадать. Для совпадения решений в указанных пространствах и получения решений в виде функций в классическом понимании необходимо, чтобы $f(t) \in C^n(\mathbb{R})$ и

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Здесь n — порядок полюса $K^{-1}(p)$ в бесконечно удалённой точке, $K(p) \leftrightarrow K(t)$. Если $K(t)$, $f(t) \in {}^1(\mathbb{R})$ и $K(0) \neq 0$, то дифференцированием исходное уравнение приводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода.

Доказательство. Применим к (12) с начальными условиями (13) свёрточное преобразование в пространстве D'_+ $(f(t) \in K_+)$. Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$. По условию $K(t) \in M$, поэтому $K(p)$ можно определить непосредственно. Тогда после очевидных преобразований с использованием обозначений e_k из [5, с. 145] приходим к уравнению для изображений

$$X(p) = (L_1(p))^{-1}\left(F(f(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} e_k p^k\right), \tag{14}$$

где

$$L_1(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n + K(p);$$

$$e_k = x_{n-1-k} + a_1 x_{n-2-k} + \dots + a_{n-k-1} x_0.$$

Выпишем $L_1(p)$ в частных случаях уравнения (12):

а) $L_1(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n + c/p$;
б) $L_1(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n$;
в) $L_1(p) = 1 + K(p)$, $e_k \equiv 0$;
г) $L_1(p) = K(p)$, $e_k \equiv 0$.

Из уравнения (14) сразу видно два подхода к определению решения $x(t)$. Первый подход (традиционный) связан с определением изображения для функции $f(t)$ и нахождением оригинала от полученного произведения (отношения) изображений. Второй подход (метод фундаментального решения $E_0(t)$) применяется, если в правой части исходного уравнения $f(t) = \delta(t)$ и рассматриваются нулевые начальные условия. Этот подход основан на применении теоремы умножения или непосредственно алгебры свёртки: из (14)

$E_0(t) \leftrightarrow (L_1(p))^{-1}$. Этот оригинал в общем случае, когда $L(D) \neq \mathrm{const}$, представляет собой функцию в классическом понимании, т. к. его изображением является аналитическая функция, для которой выполняется первое предельное соотношение (1). В случаях а) и б) найти $E_0(t)$ не составляет труда, т. к. изображение этого оригинала представляет правильную дробно-рациональную функцию. Поэтому с учётом того, что свёртка для функций класса K_+ существует всегда, находится решение, принадлежащее этому же классу функций:

$$x(t) = E_0(t) * \left(f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} e_k (\delta')^k \right) = \int_0^t E_0(t-\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} e_k E_0^{(k)}(t). \quad (15)$$

В случае в) $E_0(t) \leftrightarrow (1+K(p))^{-1}$. Заметим, что $(1+K(p))^{-1} = 1+R(p)$, где $R(p) = -K(p)/(1+K(p))$, уже является изображением некоторой функции $R(t) \in K_+(M)$. Здесь также $x(t) \in K_+$, т. к. $E_0(t) = \delta(t) + R(t)$ и, следовательно,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

В случае г) $E_0(t) \leftrightarrow K^{-1}(p)$ и на основании теоремы 2

$$E_0(t) = c_0\delta + \sum_{i=1}^{n} c_i (\delta')^i + R(t),$$

где $R(t) \in K_+(M)$, n — порядок полюса $K^{-1}(p)$ в бесконечно удалённой точке. Отсюда получаем

$$x(t) = c_0 f(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i D^i f + \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (17)$$

где D^i — оператор дифференцирования i-того порядка. Здесь $x(t) \in K_+$, если $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$ и $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, т. к. только в этом случае $D^i f = f^{(i)}(t)$.

Аналогично к уравнению (12) с начальными условиями (13) можно применить свёрточное преобразование в пространстве D'_-. Учитывая, что для функций в классическом понимании формулы свёртки и формулы соответствия между функцией-оригиналом и её изображением отличаются в пространствах D'_+ и D'_- лишь знаком, а также формулы дифференцирования в этих пространствах [1, теорема 6], придём к тем же самым выражениям (15), (16) и (17). Таким образом, наше предложение полностью доказано. □

3. Метод интеграла Дюамеля с точки зрения теории обобщенных функций [6]. Рассмотрим метод на примере решения уравнения (12). В случае, если правая часть этого уравнения $f(t)$ — разрывная функция, бывает удобно определять решение через оператор дифференцирования Df. Покажем, как прийти к методу с помощью операторного исчисления. Ограничимся пространством D'_+. Преобразуем уравнение (14) для изображений, умножив и разделив правую часть этого уравнения на p:

$$X(p) = \left[\frac{1}{p}(L_1(p))^{-1}\right] pF(f(t)) + \left[\frac{1}{p}(L_1(p))^{-1}\right] \sum_{k=0}^{n-1} e_k p^{k+1}. \tag{18}$$

Отсюда, используя теоремы умножения и дифференцирования [1, теорема 5], приходим к формуле для интеграла Дюамеля:

$$x(t) = x_1 * Df + \sum_{k=0}^{n-1} e_k x_1^{(k+1)}, \quad f(t) \in K_+, \tag{19}$$

где $x_1 \leftrightarrow \frac{1}{p}(L_1(p))^{-1}$ или

$$x_1 = \vartheta(t) * E_0(t) = \int_0^t E_0(\tau)d\tau$$

— решение уравнения (12) для правой части $f(t) = 1$, отвечающее нулевым начальным условиям. Отметим, что формальные преобразования (14), (18) и (19) эквивалентны преобразованию в алгебре свёртки D'_+:

$$(L_1(p))^{-1}F(f(t)) \leftrightarrow E_0(t) * f(t) = E_0(t) * \vartheta(t) * \delta'(t) * f(t) = x_1 * Df.$$

Особенно просто этим методом определяются решения, если правая часть уравнения (12) — ступенчатая функция:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \vartheta(t - t_i),$$

где c_i — постоянные. В этом случае

$$Df = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta(t - t_i)$$

и на основании (19)

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \vartheta(t - t_i) x_1(t - t_i) + \sum_{k=0}^{n-1} e_k x_1^{(k+1)}. \tag{20}$$

Практические формулы реализации метода интеграла Дюамеля приведены в [6].

4. Пример 1. Найти решение уравнения

$$x'' - \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t)$$

при $x(0) = 0$ и $x'(0) = 2$, если 1) $f(t) = e^{t^2}$; 2) $f(t) = \vartheta(t-1) - \vartheta(t-2)$.

1. Уравнение для изображений в алгебре D'_+ с учётом начального условия имеет вид
$$X(p)\Big(p^2 - \frac{1}{p^2}\Big) = F(f(t)) + 2 = F\big(f(t) + 2\delta(t)\big).$$
Отсюда получаем операторное уравнение для определения фундаментального решения:
$$E_0(p)\Big(p^2 - \frac{1}{p^2}\Big) = 1.$$
Следовательно,
$$E_0(p) = \frac{p^2}{p^4-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^2+1}\Big) \quad \text{и} \quad E_0(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t).$$
Отсюда
$$x(t) = E_0(t) * \big(f(t) + 2\delta(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{(t-\tau)^2}(\operatorname{sh}\tau + \sin\tau)d\tau + \operatorname{sh} t + \sin t.$$

2. Используя метод интеграла Дюамеля (формулы (19), (20)), преобразуем формулу для решения:
$$x(t) = E_0(t) * (f(t) + 2\delta(t)) = x_1 * Df + 2E_0(t) =$$
$$= \vartheta(t-t_1)x_1(t-t_1) - \vartheta(t-t_2)x_1(t-t_2) + 2E_0(t),$$
где
$$E_0(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t), \quad x_1 = \vartheta(t) * E_0(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t).$$
Таким образом,
$$x(t) = \frac{1}{2}\vartheta(t-1)\big(\operatorname{ch}(t-1) - \cos(t-1)\big) - \frac{1}{2}\vartheta(t-2)\big(\operatorname{ch}(t-2) - \cos(t-2)\big) + \operatorname{sh} t + \sin t.$$

Полученные решения справедливы на всей числовой оси.

5. Пример 2. Найти решения уравнений Вольтерра:

1) $x(t) = f(t) + \displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$;

2) $\displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}\cos(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t)$,

в которых $f(t) \in K_+(K_-)$.

1. Выпишем операторное уравнение в алгебре D'_+ для определения $E_0(t)$:
$$E_0(p)\Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big) = 1,$$
откуда
$$E_0(p) = \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big)^{-1} = 1 + \frac{1}{p-2} \quad \text{и} \quad E_0(t) = \delta(t) + e^{2t}.$$

Следовательно,

$$x(t) = E_0(t) * f(t) = f(t) + \int_0^t e^{2(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

2. Выпишем операторное уравнение в алгебре D'_+ для определения $E_0(t)$:

$$E_0(p)\Big(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}\Big) = 1,$$

откуда

$$E_0(p) = p - 1 + \frac{1}{p-1},$$

т. е. мы имеем полюс первого порядка в бесконечно удалённой точке, и

$$E_0(t) = \delta'(t) - \delta(t) + \vartheta(t) e^t.$$

Следовательно,

$$x(t) = E_0(t) * f(t) = -f(t) + Df + \int_0^t e^{t-\tau} f(\tau) d\tau,$$

а при $f(t) \in C^1(\mathbb{R})$ и $f(0) = 0$ имеем классическое решение

$$x(t) = -f(t) + f'(t) + \int_0^t e^{t-\tau} f(\tau) d\tau.$$

Полученные решения справедливы на всей числовой оси.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *И. Л. Коган*, "Построение операторного исчисления Микусинского на основе алгебры свёртки обобщённых функций. Основные положения" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №2(27). С. 44–52. [*I. L. Kogan*, "Construction of Mikusinski operational calculus based on the convolution algebra of distributions. Basic provisions" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 2(27). Pp. 44–52].
2. *R. Courant, D. Hilbert*, Methods of mathematical physics. Vol. 2: Partial differential equations. New York: Interscience Publ., 1962. 830 pp.; русск. пер.: *Р. Курант*, Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
3. *В. П. Маслов*, Операторные методы. М.: Наука, 1973. 543 с. [*V. P. Maslov*, Operator methods. Moscow: Nauka, 1973. 543 pp.]
4. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*, Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с. [*M. A. Lavrent'ev, B. V. Shabat*, Methods of the theory of functions in a complex variable. Moscow: Nauka, 1987. 688 pp.]
5. *L. Schwartz*, Methodes mathematiques pour les sciences physiques. Paris: Hermann, 1961. 392 pp.; русск. пер.: *Л. Шварц*, Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
6. *И. Л. Коган*, "Метод интеграла Дюамеля для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с точки зрения теории обобщенных функций" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. №1(20). С. 37–45. [*I. L. Kogan*, "Method of Duhamel Integral for Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients in Respect to the Theory of Distributions" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(20). Pp. 37–45].

Поступила в редакцию 01/X/2012;
в окончательном варианте — 27/II/20013.

MSC: 44A40; 46F10, 46T30

CONSTRUCTION OF MIKUSINSKI OPERATIONAL CALCULUS BASED ON THE CONVOLUTION ALGEBRA OF DISTRIBUTIONS. THE THEOREMS AND THE BEGINNING OF USE

I. L. Kogan

Russian State Agrarian University — Moscow Agricultural Academy after K. A. Timiryazev,
49, Timiryazevskaya str., Moscow, 127550, Russia.

E-mail: `ik_@list.ru`

We consider the Mikusinski operational calculus based on the convolution algebra of distributions D'_+ and D'_-. We state and prove the basic theorems, and give examples of Mikusinski operational calculus using, which demonstrate its additional possibilities, such as extension of solutions to the domain of negative argument values, removing the growth limits of right-hand functions and obtaining the new methods for solving the nonhomogeneous equations with discontinuous right part.

Key words: *calculus of Mikusinski, space of distributions, convolution of distributions, convolution algebra, Laplace transform.*

Original article submitted 01/X/2012;
revision submitted 27/II/20013.

Iosif L. Kogan (Ph. D. Techn.), Senior Teacher, Dept. of Higher Mathematics.