Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 4 (33). С. 7–14

Алгебра

УДК 512.572

МНОГООБРАЗИЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

О. И. Череватенко

Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова,
Россия, 432063, Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, 4.

E-mail: chai@pisem.net

Приведён обзор результатов о многообразиях линейных алгебр полиномиального роста. Приводятся эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий ассоциативных алгебр, многообразий алгебр Ли, многообразий алгебр Лейбница, многообразий алгебр Пуассона и многообразий алгебр Лейбница—Пуассона. Показано, что при изучении многообразий линейных алгебр полиномиального роста важную роль играют многообразия почти полиномиального роста.

Ключевые слова: *ассоциативная алгебра, алгебра Пуассона, алгебра Ли, многообразие алгебр, рост многообразия.*

Введение. На протяжении всей работы предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле имеет нулевую характеристику.

Пусть $K(X)$ — свободная алгебра над полем K, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счётное множество свободных образующих. Обозначим через A некоторую PI-алгебру. Совокупность всех тождеств алгебры A образует T-идеал $Id(A)$ в свободной алгебре $K(X)$. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр, порождённое алгеброй A. Тогда алгебра $K(X, \mathbf{V}) = K(X)/Id(A)$ является относительно свободной алгеброй многообразия $\mathbf{V}$.

Пусть P_n — подпространство в пространстве $K(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в его полилинейных компонентах $P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V}))$, $n = 1, 2, \dots$. Асимптотическое поведение последовательности $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост, если существуют такие константы C и k, что для любого n выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) \leqslant Cn^k$.

Пространство $P_n(\mathbf{V})$ наделено структурой левого S_n-модуля, где S_n — симметрическая группа степени n. Напомним, что последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ называют *разбиением числа* n и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k > 0$. Пусть χ_λ — характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующий разбиению λ числа n. Тогда в силу вполне приводимости модуля $P_n(\mathbf{V})$ для многообразия $\mathbf{V}$ имеет место разложение

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi_n(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda, \qquad (1)$$

Ольга Ивановна Череватенко (к.ф.-м.н.), доцент, каф. высшей математики.

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ — степени неприводимых представлений, соответствующих разбиению λ числа n. *Кодлина* многообразия определяется как сумма

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}).$$

Если λ — разбиение некоторого числа n, то будем обозначать символом λ' сопряженное разбиение к λ.

В следующей теореме приводится критерий полиномиального роста для общего случая.

Теорема 1 [1]. *Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие линейных алгебр. Последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ ограничена полиномом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) *существует такая константа C, что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если либо выполнено условие $n - \lambda_1 > C$, либо $n - \lambda'_1 > C$;*

(ii) *существуют такие константы C и k, что для любого n существует $m \leqslant Cn^k$ расстановок скобок $T_1, T_2, \ldots, T_m$ таких, что любой элемент $f \in P_n(\mathbf{V})$ может быть записан как*

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i \pmod{Id(\mathbf{V})},$$

где $f_i \in P_n^{T_i}(\mathbf{V})$.

Далее будут приведены более конкретные эквивалентные условия полиномиального роста для конкретных случаев.

Договоримся опускать скобки при их левонормированной расстановке:

$$((ab)c) = abc.$$

Ассоциативные алгебры. В теории ассоциативных алгебр очень важную роль играет бесконечно порожденная алгебра Грассмана Λ и алгебра верхнетреугольных матриц порядка 2, которую обозначим через UT_2.

Теорема 2 [2]. *Для алгебры Λ верны следующие утверждения:*

(i) *полилинейное тождество $[x, y, z] = 0$ порождает идеал тождеств алгебры Грассмана Λ;*

(ii) *рост многообразия $var(\Lambda)$, порождённого алгеброй Λ, является почти полиномиальным, причём $c_n(\Lambda) = 2^{n-1}$;*

(iii) *базис полилинейной компоненты $P_n(\Lambda)$ состоит из элементов вида*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] \ldots [x_{i_{2p-1}}, x_{i_{2p}}] x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_q},$$

где $\{i_1, \ldots, i_{2p}, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_{2p}$, $j_1 < \cdots < j_q$.

Теорема 3 [2]. *Для алгебры UT_2 верны следующие утверждения:*

(i) *полилинейное тождество $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 0$ порождает идеал тождеств алгебры UT_2;*

(ii) *рост многообразия $var(UT_2)$, порождённого алгеброй UT_2, является почти полиномиальным, причём $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$;*

(iii) *базис полилинейной компоненты* $P_n(UT_2)$ *состоит из элементов вида*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}]x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_q},$$

где $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\}$, $j_1 < \cdots < j_q$ *и переменные в коммутаторе* $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}]$ *упорядочены следующим образом*:

$$i_1 > i_2 < i_3 < \cdots < i_p.$$

Теорема 4 [3]. *Для многообразия ассоциативных алгебр* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) *последовательность* $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ *ограничена полиномом*;
(ii) $UT_2 \notin \mathbf{V}$, $\Lambda \notin \mathbf{V}$;
(iii) *существует такая константа* C, *что в сумме* (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ *в случае, если выполнено условие* $n - \lambda_1 > C$;
(iv) *кодлина многообразия* $\mathbf{V}$ *является конечной.*

Алгебры Ли. Пусть $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством $[[x_1, x_2], \ldots, [x_{2s+1}, x_{2s+2}]] = 0$. В работе [4] показано, что многообразие $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ имеет почти полиномиальный рост.

Теорема 5 [5, 6]. *Для многообразия алгебр Ли* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) *многообразие* $\mathbf{V}$ *имеет полиномиальный рост*;
(ii) *для некоторого* s *выполнено условие* $\mathbf{N}_2\mathbf{A} \not\subseteq \mathbf{V} \subset \mathbf{N}_s\mathbf{A}$;
(iii) *существует такая константа* C, *что в сумме* (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ *в случае, если выполнено условие* $n - \lambda_1 > C$.

Обозначим через $\mathbf{A}^2$ метабелево многообразие алгебр Ли, которое определяется тождеством $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 0$. Хорошо известно, что многообразие $\mathbf{A}^2$ является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Ли роста не ниже полиномиального, то есть если рост некоторого многообразия $\mathbf{V}$ не ниже полиномиального, то $\mathbf{A}^2 \subseteq \mathbf{V}$.

Алгебры Лейбница. Алгебры Лейбница — неантикоммутативные алгебры Ли, которые определяются тождеством Лейбница

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]].$$

Тождество Лейбница представляет собой следующее условие: оператор правого умножения на любой элемент алгебры является дифференцированием.

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождеством

$$[[x_1, x_2], \ldots, [x_{2s+1}, x_{2s+2}]] = 0.$$

Понятно, что многообразие $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ с тождеством $[x, x] = 0$ — в точности многообразие $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$.

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ многообразие алгебр Лейбница, определенное тождеством $[x_1, [x_2, x_3], [x_4, x_5]] = 0$. Данное многообразие имеет почти полиномиальный рост (см. [7]).

Теорема 6 [8, 9]. *Для многообразия алгебр Лейбница* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) *многообразие* $\mathbf{V}$ *имеет полиномиальный рост*;
(ii) *для некоторого* s *выполнено условие*

$$\mathbf{N}_2\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{V}}_1 \not\subseteq \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}};$$

(iii) *существует такая константа* C, *что в сумме* (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ *в случае, если выполнено условие* $n - \lambda_1 > C$.

Пусть $\mathbf{B}$ — многообразие алгебр Лейбница, определённое тождеством

$$[x, [y, z]] = 0.$$

В работе [10] показано, что многообразия $\mathbf{A}^2$ и $\mathbf{B}$ исчерпывают весь список минимальных многообразий среди всех многообразий алгебр Лейбница роста не ниже полиномиального, то есть если рост некоторого многообразия $\mathbf{V}$ не ниже полиномиального, то либо $\mathbf{A}^2 \subseteq \mathbf{V}$, либо $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$.

Алгебры Пуассона. Алгебра $A = A(+, \cdot, \{\ ,\ \}, K)$ над произвольным полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{\ ,\ \}, K)$ — алгебра Ли с операцией умножения $\{\ ,\ \}$, которая называется скобкой Пуассона, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \qquad a, b, c \in A.$$

Пусть Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей и операцией умножения $\wedge$. Введём в алгебре Λ два новых умножения:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \qquad a, b \in \Lambda.$$

Нетрудно проверить, что алгебра $(\Lambda, +, \cdot, \{\ ,\ \})$ будет алгеброй Пуассона, которую обозначим через G.

Теорема 7 [11]. *Для алгебры* G *верны следующие утверждения*:

(i) *полилинейное тождество* $\{x, y, z\} = 0$ *порождает идеал тождеств алгебры Пуассона* G;
(ii) *рост многообразия* $var(G)$, *порождённого алгеброй* G, *является почти полиномиальным, причём* $c_n(G) = 2^{n-1}$;
(iii) *базис полилинейной компоненты* $P_n(G)$ *состоит из элементов вида*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{i_{2p-1}}, x_{i_{2p}}\} \cdot x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_q},$$

где $\{i_1, \ldots, i_{2p}, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_{2p}$, $j_1 < \cdots < j_q$.

Пусть A_L — некоторая ненулевая алгебра Ли с лиевым умножением $[\ ,\ ]$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = A_L \oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{\ ,\ \}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} (a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta, \\ \{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \quad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K. \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\ ,\ \}, K)$ будет являться алгеброй Пуассона.

Пусть U_2^L — двумерная метабелева алгебра Ли с базисом $\{a, b\}$ и таблицей умножения $[a, b] = a$, $[b, a] = -a$, $[a, a] = [b, b] = 0$. Обозначим через U_2 алгебру Пуассона $U_2^L \oplus K$ с операциями (2).

Теорема 8 [12]. *Для алгебры U_2 верны следующие утверждения:*

(i) *полилинейные тождества*

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры Пуассона U_2;

(ii) *рост многообразия $var(U_2)$, порождённого алгеброй U_2, является почти полиномиальным, причём $c_n(U_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$;*

(iii) *базис полилинейной компоненты $P_n(U_2)$ состоит из элементов вида*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}\} \cdot x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_q},$$

где $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, \ldots, n\}$, $j_1 < \cdots < j_q$ и переменные в мономе $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\}$ упорядочены следующим образом:

$$i_1 > i_2 < i_3 < \cdots < i_p.$$

Следующая теорема показывает, что в случае алгебр Пуассона алгебры U_2 и G играют ту же роль, что и алгебры UT_2 и Λ в ассоциативном случае.

Теорема 9 [12]. *Для многообразия алгебр Пуассона* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) *последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ ограничена полиномом;*

(ii) $U_2 \notin \mathbf{V}$, $G \notin \mathbf{V}$;

(iii) *существует такая константа C, что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$;*

(iv) *кодлина многообразия $\mathbf{V}$ является конечной.*

Пусть N_3^L — трёхмерная нильпотентная алгебра Ли с базисом $\{a, b, c\}$ и таблицей умножения $[b, a] = c$, $[a, c] = [b, c] = 0$. Обозначим через N_3 алгебру Пуассона $N_3^L \oplus K$ с операциями (2).

Пусть Λ_{2n} — алгебра Грассмана с единицей и $2n$ образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$. Определим в алгебре Λ_{2n} операции умножения (). Полученную алгебру Пуассона обозначим через G_{2n}.

Следующая теорема показывает, что многообразие, порождённое либо алгеброй N_3, либо алгеброй G_2, является наименьшим многообразием алгебр Пуассона в классе всех многообразий алгебр Пуассона, имеющих рост не ниже полиномиального.

Теорема 10 [13]. *Для алгебр N_3 и G_2 верны следующие утверждения:*

(i) $var(N_3) = var(G_2) = \mathbf{V}$;

(ii) *тождества $\{x_1, x_2, x_3\} = 0$, $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ порождают идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$;*

(iii) *для любого n выполнено равенство $c_n(\mathbf{V}) = 1 + n(n-1)/2$;*

(iv) *многообразие $\mathbf{V}$ является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона роста не ниже полиномиального, то есть если рост некоторого многообразия $\mathbf{W}$ не ниже полиномиального, то $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$.*

Алгебры Лейбница—Пуассона. В данном пункте рассматриваются алгебры Пуассона с неантикоммутативной операцией $\{\ ,\ \}$, которые будем называть алгебрами Лейбница—Пуассона. Более точно векторное пространство A над полем K с двумя K-биллинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{\ ,\ \}$ называется алгеброй Лейбница—Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{\ ,\ \}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad \{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где $a, b, c \in A$.

Обозначим через Γ_n пространство в свободной алгебре Лейбница—Пуассона, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \quad s \geqslant 2, \ldots, \ t \geqslant 2.$$

Теорема 11 [14]. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— нетривиальное многообразие алгебр Лейбница—Пуассона над произвольным полем. Тогда либо*

(i) $c_n(\mathbf{V}) \geqslant 2^{n-1}$ *для любого* n,
либо
(ii) *найдётся такой многочлен* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, *что для всех достаточно больших* n *будет выполнено равенство* $c_n(\mathbf{V}) = f(n)$.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница—Пуассона, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$\Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Теорема 12 [14]. *Для многообразия алгебр Лейбница—Пуассона* $\mathbf{V}$ *над произвольным полем следующие условия эквивалентны*:

(i) *последовательность* $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geqslant 1}$ *ограничена полиномом*;
(ii) *для некоторого* $m \geqslant 2$ *в* $\mathbf{V}$ *выполнены полилинейные тождества*

$$\{x_1, \ldots, x_m\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0;$$

(iii) *найдётся такое число* N, *что для любого* $n > N$ *выполнено равенство* $\gamma_n(\mathbf{V}) = 0$;
(iv) *найдётся такое число* N, *что для любого* $n \geqslant N$ *будет выполнено равенство*

$$c_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=2}^{N} C_n^k \cdot \gamma_k(\mathbf{V}).$$

Рассмотрим двумерную алгебру Лейбница L_2 над полем K с базисом a, b и таблицей умножения $[a, b] = a$, $[a, a] = [b, b] = [b, a] = 0$. Обозначим через B^2 алгебру Лейбница—Пуассона $L_2 \oplus K$ с операциями (2).

Теорема 13 [14]. *Для алгебры Лейбница—Пуассона* B^2 *верны следующие утверждения*:

(i) *полилинейные тождества*

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, \{x_2, x_3\}\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры B^2;

(ii) *рост многообразия* $var(B^2)$, *порождённого алгеброй* B^2, *является почти полиномиальным, причём для любого натурального* n *выполнено равенство*

$$c_n(B^2) = n \cdot 2^{n-1} - n + 1;$$

(iii) *базис полилинейной компоненты* $P_n(B^2)$ *состоит из элементов вида*

$$x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s} \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\},$$

где $\{i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_t\} = \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < \cdots < i_s$, $j_2 < \cdots < j_t$.

Обозначим через $\mathbf{W}_s$ многообразие алгебр Лейбница—Пуассона, порождённое полилинейным тождеством

$$\{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_s, y_s\} = 0.$$

Теорема 14 [15]. *Для многообразия алгебр Лейбница—Пуассона* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) *последовательность* $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ *ограничена полиномом*;

(ii) $U_2 \notin \mathbf{V}$, $B^2 \notin \mathbf{V}$ *и для некоторого* $s \geqslant 2$ *выполнено включение* $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}_s$;

(iii) *существует такая константа* C, *что в сумме* (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ *в случае, если выполнено условие* $n - \lambda_1 > C$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *A. Giambruno, S. P. Mishchenko*, “Polynomial growth of the codimentions: a characterization” // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010. Vol. 138, no. 3. Pp. 853–859.
2. *V. Drensky*, Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verlag, 2000. xii+271 pp.
3. *А. Р. Кемер*, “Шпехтовость Т-идеалов со степенным ростом коразмерностей” // *Сиб. матем. журнал*, 1978. Т. 19, № 1. С. 54–69. [*A. R. Kemer*, “Spechtianess of T-ideals with polynomial growth of the co-dimensions” // *Sib. Mat. Zh.*, 1978. Vol. 19, no. 1. Pp. 54–69].
4. *С. П. Мищенко*, “Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом” // *Весцi Акадэмii навук БССР. Сер. фiз.-мат. навук*, 1987. № 6. С. 39–43. [“Varieties of Lie algebras with two–step nilpotent commutant” // *Vestsi Akad. Navuk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 1987. no. 6. Pp. 39–43].
5. *И. И. Бенедиктович, А. Е. Залесский*, “T-идеалы свободных алгебр Ли с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей” // *Весцi Акадэмii навук БССР. Сер. фiз.-мат. навук.*, 1980. № 3. С. 5–10. [*I. I. Benediktovich, A. E. Zalesskiy*, “T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of a sequence of codimensionalities” // *Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 1980. no. 3. Pp. 5–10].
6. *С. П. Мищенко*, “О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль” // *Матем. заметки*, 1986. Т. 40, № 6. С. 713–721; англ. пер.: *S. P. Mishchenko*, “Varieties of polynomial growth of Lie algebras over a field of characteristic zero” // *Math. Notes*, 1986. Vol. 40, no. 6. Pp. 901–905.
7. *S. Mishchenko, A. Valenti*, “A Leibniz variety with almost polynomial growth” // *J. Pure Appl. Algebra*, 2005. Т. 202, № 1–3. С. 82–101.

8. *С. П. Мищенко, О. И. Череватенко*, “Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница” // *Фундамент. и прикл. матем.*, 2006. Т. 12, № 8. С. 207–215; англ. пер.: *S. P. Mishchenko, O. I. Cherevatenko*, “Necessary and sufficient conditions for a variety of Leibniz algebras to have polynomial growth” // *J. Math. Sci.*, 2008. Vol. 152, no. 2. Pp. 282–287.
9. *С. П. Мищенко, О. И. Череватенко*, “Многообразия алгебр Лейбница слабого роста” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2012. № 9(49). С. 19–23. [*S. P. Mishchenko, O. I. Cherevatenko*, “Variety of Leibniz algebras of weak growth” // *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2012. no. 9(49). Pp. 19–23].
10. *О. И. Череватенко*, “О нильпотентных алгебрах Лейбница” // *Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика*, 2012. № 17(136). С. 132–136. [*O. I. Cherevatenko*, “On nilpotent Leibnitz algebras” // *Nauchnyye vedomosti BelGU. Matematika. Fizika*, 2012. no. 17(136). Pp. 132–136].
11. *S. P. Mishchenko, V. M. Petrogradsky, A. Regev*, “Poisson PI algebras” // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007. Т. 359, № 10. С. 4669–4694.
12. *С. М. Рацеев*, “Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона” // *Вестн. Моск. унив. Сер. 1. Математика. Механика*, 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13; англ. пер.:*S. M. Ratseev*, “Equivalent conditions of polynomial growth of a variety of Poisson algebras” // *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2012. Vol. 67, no. 5–6. Pp. 195–199.
13. *С. М. Рацеев*, “Алгебры Пуассона полиномиального роста” // *Сиб. матем. журн.*, 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711; англ. пер.: *S. M. Ratseev*, “Poisson algebras of polynomial growth” // *Siberian Math. J.*, 2013. Vol. 54, no. 3. Pp. 555–565.
14. *С. М. Рацеев*, “Коммутативные алгебры Лейбница–Пуассона полиномиального роста” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2012. № 3/1(94). С. 54–65. [*S. M. Ratseev*, “Commutative Leibniz–Poisson algebras of polynomial growth” // *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2012. no. 3/1(94). Pp. 54–65].
15. *С. М. Рацеев*, “Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Лейбница—Пуассона” // *Изв. вузов. Матем.*, 2014. № 3. С. 33–39; англ. пер.: *S. M. Ratseev*, “Necessary and sufficient conditions of polynom ial growth of varieties of Leibniz–Poisson algebras” // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014. Vol. 58, no. 3 (to appear).

Поступила в редакцию 27/IX/2013;
в окончательном варианте — 12/X/2013.

MSC: 16R10, 17A32, 17B01, 17B63

VARIETIES OF LINEAR ALGEBRAS OF POLYNOMIAL GROWTH

O. I. Cherevatenko

Ulyanovsk State I. N. Ulyanov Pedagogical University,
4, Ploshchad’ 100-letiya so dnya rozhdeniya V. I. Lenina, 432063, Ulyanovsk, Russia.

E-mail: `chai@pisem.net`

The paper is survey of results of investigations on varieties of linear algebras of polynomial growth. We give equivalent conditions of the polynomial codimension growth of a variety of associative algebras, Lie algebras, Leibniz algebras, Poisson algebras, Leibniz-Poisson algebras. It is shown that in the study of varieties of linear algebras of polynomial growth varieties of almost polynomial growth play an important role.

Keywords: *associative algebra, Poisson algebra, Lie algebra, variety of algebras, growth of a variety.*

Original article submitted 27/IX/2013;
revision submitted 12/X/2013.

Olga I. Cherevatenko (Ph. D. Phys. & Math.), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.