Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА

Н. Н. Попов, О. О. Чернова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: ponick25@gmail.com, chernova_olga@citydom.ru

Разработан аналитический метод решения нелинейной стохастической задачи ползучести плоскости с учётом повреждённости материала и третьей стадии ползучести. Определяющие соотношения ползучести принимаются в соответствии с энергетическим вариантом нелинейной теории вязкого течения в стохастической форме. Стохастичность материала определяется двумя случайными функциями координат x_1 и x_2. Произведена линеаризация задачи относительно номинальных напряжений на основе метода малого параметра. Найдены дисперсии случайного поля напряжений в предположении, что процессы ползучести и накопления повреждённости являются независимыми. В качестве примера рассмотрен случай, когда плоскость растягивается в двух ортогональных направлениях пропорционально некоторому параметру. Приведённый анализ показал, что на третьей стадии ползучести происходит увеличение величины флуктуации напряжений по сравнению с величиной на стадии установившейся ползучести.

Ключевые слова: *метод малого параметра, третья стадия ползучести, повреждённость, стохастическая задача, флуктуация напряжений, случайная функция.*

Одним из основных методов решения стохастических краевых задач является метод малого параметра, который позволяет свести статистически нелинейную задачу к последовательности статистически линейных задач. Однако уже использование второго приближения метода малого параметра при решении плоской нелинейной стохастической задачи ползучести приводит к громоздким выражениям [1, 2]. Аналитические методы решения стохастических задач с учетом накопления повреждённости и третьей стадии ползучести были разработаны лишь для равномерного растяжения плоскости на основе первого приближения метода малого параметра [3].

В данной работе в общем виде приводится решение нелинейной стохастической задачи ползучести неоднородной плоскости с учётом повреждённости материала. В силу стохастической неоднородности среды компоненты тензоров напряжений и деформаций в декартовой ортогональной системе координат будут являться случайными функциями координат x_1 и x_2 и времени t. Упругие деформации считаются малыми настолько, что ими можно пренебречь.

Николай Николаевич Попов, к.ф.-м.н., доц., доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Ольга Олеговна Чернова*, младший научный сотрудник, каф. прикладной математики и информатики.

Определяющие соотношения ползучести с учётом третьей стадии принимаются в соответствии с энергетическим вариантом [4] нелинейной теории вязкого течения в стохастической форме [3]:

$$\dot{p}_{ij} = c\bar{s}^{n-1}\Big(\bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\bar{\sigma}_{kk}\Big)\big(1+\alpha_1 U_1(x_1,x_2)\big),\ \bar{s}^2 = \frac{1}{2}\left(3\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ii}\bar{\sigma}_{jj}\right), \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}(1+\omega), \quad \dot{\omega} = b\left(1+\alpha_2 U_2(x_1,x_2)\right)\bar{\sigma}_{ij}\dot{p}_{ij}, \quad (2)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$ — компоненты тензора истинных напряжений; σ_{ij} — компоненты тензора номинальных напряжений, $\dot{p}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера; c, b, n, α_1, α_2 — постоянные материала; ω — скалярный параметр повреждённости, $U_i(x_1,x_2)$ — случайные однородные функции, описывающие стохастические свойства материала с математическим ожиданием $\langle U_i\rangle = 0$ и дисперсией $\langle U_i^2\rangle = 1$. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

К определяющим соотношениям ползучести (1) присоединяются уравнения равновесия для номинальных напряжений и условие совместности деформаций, сформулированное для скоростей деформаций ползучести:

$$\sigma_{ij},_j = 0, \quad i,j = 1,2, \quad (3)$$

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk},_{il} = 0, \quad (4)$$

где Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор.

Поставленная задача в дальнейшем решается относительно номинальных напряжений σ_{ij} на основе линеаризации методом малого параметра. Очевидно, что при $\omega = 0$ соотношения (1)–(4) задают нелинейную стохастическую задачу установившейся ползучести при плоском напряжённом состоянии без учёта накопления повреждённости и третьей стадии ползучести, аналитические методы решения которой приведены в работах [1,2].

Представим определяющие соотношения (1), (2) в виде

$$\dot{p}_{ij} = \dot{r}_{ij}(1+\omega)^n, \quad (5)$$

$$\dot{\omega} = b\big(1+\alpha_2 U_2(x_1,x_2)\big)\sigma_{ij}\dot{r}_{ij}(1+\omega)^{n+1}, \quad (6)$$

где

$$\dot{r}_{ij} = cs^{n-1}\Big(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}\Big)\big(1+\alpha_1 U_1(x_1,x_2)\big).$$

Здесь s — интенсивность номинальных напряжений.

Разделим переменные в уравнении (6):

$$\frac{\dot{\omega}}{(1+\omega)^{n+1}} = b\left(1+\alpha_2 U_2(x_1,x_2)\right)\sigma_{ij}\dot{r}_{ij}$$

и проинтегрируем полученное при начальном условии $\omega(0) = 0$:

$$\frac{1}{n}\left[1 - \frac{1}{(1+\omega)^n}\right] = b\big(1+\alpha_2 U_2(x_1,x_2)\big)\int_0^t \sigma_{ij}\dot{r}_{ij}d\tau. \quad (7)$$

Выразим величину $(1+\omega)^n$ из последнего соотношения:

$$(1+\omega)^n = \left(1 - bn\big(1+\alpha_2 U_2(x_1,x_2)\big)\int_0^t \sigma_{ij}\dot{r}_{ij}d\tau\right)^{-1} \quad (8)$$

и проведём линеаризацию правой части соотношения (8):

$$(1+\omega)^n \approx 1 + bn\big(1+\alpha_2 U_2(x_1,x_2)\big)\int_0^t \sigma_{ij}\dot{r}_{ij}d\tau. \tag{9}$$

Тогда соотношение (5) с учётом (9) приводится к виду

$$\dot{p}_{ij} = \dot{r}_{ij}\bigg(1 + bn\big(1+\alpha_2 U_2(x_1,x_2)\big)\int_0^t \sigma_{ij}\dot{r}_{ij}d\tau\bigg). \tag{10}$$

Пусть тензор номинальных напряжений представлен в виде суммы детерминированного слагаемого σ_{ij}^0 и флуктуации σ_{ij}^*:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \quad \langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma_{ij}^0. \tag{11}$$

Линеаризация соотношения (7) была произведена в работе [5] при условии, что величины вида $\sigma_{ij}^*\sigma_{kl}^*$ и $\alpha_1 U\sigma_{ij}^*$ малы и ими можно пренебречь:

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{11} &= \dot{r}_{11}^0 + A\left(2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^* + (\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2 + 6\sigma_{12}^* l_3)kl_1 + \alpha_1 U_1 l_1\right),\\
\dot{r}_{22} &= \dot{r}_{22}^0 + A\left(2\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + (\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2 + 6\sigma_{12}^* l_3)kl_2 + \alpha_1 U_1 l_2\right),\\
\dot{r}_{12} &= \dot{r}_{12}^0 + 3A\left(\sigma_{12}^* + (\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2 + 6\sigma_{12}^* l_3)kl_3 + \alpha_1 U_1 l_3\right),
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{1}{3}cs_0^{n-1}, \quad \dot{r}_{11}^0 = Al_1, \quad \dot{r}_{22}^0 = Al_2, \quad \dot{r}_{12}^0 = 3Al_3, \quad k = \frac{n-1}{2s_0^2},$$

$$s_0^2 = \left(\sigma_{11}^0\right)^2 + \left(\sigma_{22}^0\right)^2 - \sigma_{11}^0\sigma_{22}^0 + 3\left(\sigma_{12}^0\right)^2, \; l_1 = 2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0, \; l_2 = 2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0, \; l_3 = \sigma_{12}^0.$$

Представим величины $\dot{p}_{ij}$, $\dot{r}_{ij}$, σ_{ij} в виде разложения (11) и подставим их в соотношение (10):

$$\dot{p}_{ij}^0 + \dot{p}_{ij}^* = \left(\dot{r}_{ij}^0 + \dot{r}_{ij}^*\right)\bigg(1 + bn\left(1+\alpha_2 U_2\right)\int_0^t \left(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*\right)\left(\dot{r}_{ij}^0 + \dot{r}_{ij}^*\right)d\tau\bigg). \tag{12}$$

Учитывая при раскрытии скобок в (12) только члены первого порядка малости, для флуктуаций скоростей деформаций получим

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{11}^* &= A^2 bnl_1 I + A^2 bn\alpha_2 U_2 l_1 Et +\\
&\quad + A(1+A_1 t)\left(2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^* + kl_1\left(\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2 + 6\sigma_{12}^* l_3\right) + \alpha_1 U_1 l_1\right),\\
\dot{p}_{22}^* &= A^2 bnl_2 I + A^2 bn\alpha_2 U_2 l_2 Et +\\
&\quad + A(1+A_1 t)\left(2\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + kl_2\left(\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2 + 6\sigma_{12}^* l_3\right) + \alpha_1 U_1 l_2\right),\\
\dot{p}_{12}^* &= 3A^2 bnl_3 I + 3A^2 bn\alpha_2 U_2 l_3 Et +\\
&\quad + 3A(1+A_1 t)\left(\sigma_{12}^* + kl_3(\sigma_{11}^* l_1 + \sigma_{22}^* l_2 + 6\sigma_{12}^* l_3) + \alpha_1 U_1 l_3\right),
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$I = I(t,x_1,x_2) = B_1\int_0^t \sigma_{11}^* d\tau + B_2\int_0^t \sigma_{22}^* d\tau + B_3\int_0^t \sigma_{12}^* d\tau,$$

$$A_1 = AbnE, \quad B_1 = l_1(2+kE), \quad B_2 = l_2(2+kE), \quad B_3 = 6l_3(2+kE),$$
$$E = \sigma^0_{11} l_1 + \sigma^0_{22} l_2 + 6\sigma^0_{12} l_3.$$

Если в уравнение совместности для флуктуаций скоростей деформаций, которое можно записать в виде

$$\dot{p}^*_{11},_{22} - 2\dot{p}^*_{12},_{12} + \dot{p}^*_{22},_{11} = 0,$$

подставить (13), то получим следующее соотношение

$$A^2bn\left(l_1 I,_{22} + l_2 I,_{11} - 6l_3 I,_{12}\right) + A^2bnEt\alpha_2\left(l_1U_2,_{22} + l_2U_2,_{11} - 6l_3U_2,_{12}\right) +$$
$$+ A(1+A_1t)\Big(2\sigma^*_{11},_{22} - \sigma^*_{22},_{22} + 2\sigma^*_{22},_{11} - \sigma^*_{11},_{11} - 6\sigma^*_{12},_{12} +$$
$$+ kl_1\left(\sigma^*_{11},_{22}l_1 + \sigma^*_{22},_{22}l_2 + 6\sigma^*_{12},_{22}l_3\right) + kl_2\left(\sigma^*_{11},_{11}l_1 + \sigma^*_{22},_{11}l_2 + 6\sigma^*_{12},_{11}l_3\right) -$$
$$- 6kl_3\left(\sigma^*_{11},_{12}l_1 + \sigma^*_{22},_{12}l_2 + 6\sigma^*_{12},_{12}l_3\right) + \alpha_1(U_1,_{22}l_1 + U_1,_{11}l_2 - 6U_1,_{12}l_3)\Big) = 0. \tag{14}$$

Введём функцию напряжений F для флуктуаций тензора номинальных напряжений такую, что

$$\sigma^*_{11} = F,_{22}, \quad \sigma^*_{22} = F,_{11}, \quad \sigma^*_{12} = -F,_{12}. \tag{15}$$

Очевидно, что уравнения равновесия для флуктуаций напряжений ($\sigma^*_{ij},_j = 0$) удовлетворяются при этом тождественно.

Подставив (15), (13) в (14), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение относительно функции напряжений F:

$$A^2bn\Bigg(B_1\left(l_1\int_0^t F,_{2222}d\tau + l_2\int_0^t F,_{1122}d\tau - 6l_3\int_0^t F,_{1222}d\tau\right) +$$
$$+ B_2\left(l_1\int_0^t F,_{1122}d\tau + l_2\int_0^t F,_{1111}d\tau - 6l_3\int_0^t F,_{1112}d\tau\right) -$$
$$- B_3\left(l_1\int_0^t F,_{1222}d\tau + l_2\int_0^t F,_{1112}d\tau - 6l_3\int_0^t F,_{1122}d\tau\right) +$$
$$+ \alpha_1Et\left(l_1U_1,_{22} + l_2U_1,_{11} - 6l_3U_1,_{12}\right) + \alpha_2Et\left(l_1U_2,_{22} + l_2U_2,_{11} - 6l_3U_2,_{12}\right)\Bigg) +$$
$$+ (1+A_1t)\Big(F,_{2222}(2+kl_1^2) + 2F,_{1122}(2+kl_1l_2) + F,_{1111}(2+kl_2^2) -$$
$$- 12kl_3(F,_{1222}l_1 + F,_{1112}l_2 - 3F,_{1122}l_3) +$$
$$+ \alpha_1(U_1,_{22}l_1 + U_1,_{11}l_2 - 6U_1,_{12}l_3)\Big) = 0. \tag{16}$$

Однородные функции $U_p(x_1, x_2)$, $p = 1, 2$, считаются изотропными, с их помощью задаются случайные поля возмущений реологических свойств материала. Согласно принятым условиям будем брать функции $U_p(x_1, x_2)$ в виде стохастических интегралов Фурье—Стилтьеса [4]:

$$U_p(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(q_1x_1+q_2x_2)} d\varphi_p\left(q_1,\, q_2\right), \quad p=1,2, \tag{17}$$

причём случайные дифференциалы $d\varphi_p(q_1,q_2)$ удовлетворяют условию стохастической ортогональности:

$$\langle d\varphi_p\left(q_1,\, q_2\right) \overline{d\varphi_p\left(q_1',\, q_2'\right)}\rangle = S_p\left(q_1,\, q_2\right)\delta\left(q_1-q_1'\right)\delta\left(q_2-q_2'\right) dq_1dq_2dq_1'dq_2',$$

где $S_p(q_1,q_2)$ — спектральная плотность поля U_p, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; черта означает комплексное сопряжение (по индексу p не проводится суммирование).

Поскольку случайные поля микронеоднородностей $U_p(x_1,x_2)$ являются быстроосциллирующими, решение линеаризованной задачи (16) также будет однородным и его можно искать в виде

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(q_1x_1+q_2x_2)}\left(b_1(q_1,q_2,t)d\varphi_1(q_1,q_2) + b_2(q_1,q_2,t)d\varphi_2(q_1,q_2)\right), \tag{18}$$

где $b_p(q_1,q_2,t)$, $p=1,2$ — неизвестные весовые функции.

Подставив представления (17), (18) в соотношение (16), получим два уравнения для вычисления весовых функций $b_p(q_1,q_2,t)$:

$$Kb_1(1+A_1t) + L\int_0^t b_1 d\tau = (1+2A_1t)\alpha_1 M, \tag{19}$$

$$Kb_2(1+A_1t) + L\int_0^t b_2 d\tau = A_1t\alpha_2 M, \tag{20}$$

где

$$K = 2\left(q_1^2+q_2^2\right)^2 + kM^2, \quad L = AbnM\left(q_2^2B_1 + q_1^2B_2 - q_1q_2B_3\right),$$

$$M = q_1^2l_2 + q_2^2l_1 - 6q_1q_2l_3.$$

Решим уравнение (19). Используя замену переменной $b_1(t) = \dot{x}(t)$, приводим уравнение (19) к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$K(1+A_1t)\dot{x}(t) + Lx(t) = (1+2A_1t)\alpha_1 M. \tag{21}$$

Общее решение уравнения (21), найденное с помощью подстановки Бернулли в виде произведения двух функций, имеет вид

$$x(t) = C(1+A_1t)^{-\frac{L}{A_1K}} + \frac{\alpha_1 M}{L}(1+2A_1t) - \frac{2\alpha_1 MK}{L(L+A_1K)}(1+A_1t). \tag{22}$$

Здесь C — произвольная постоянная. Дифференцируя решение (22), получим

$$b_1(t) = -C\frac{L}{K}(1+A_1t)^{-\frac{L}{A_1K}-1} + 2\frac{\alpha_1A_1M}{L+A_1K}.$$

Используя начальное условие $b_1(0) = \alpha_1 M/K$, полученное из (19) при $t = 0$, найдём
$$C = -\frac{\alpha_1 M(L - A_1 K)}{L(L + A_1 K)}.$$
В итоге весовая функция $b_1(t)$ определяется формулой
$$b_1(t) = \frac{\alpha_1 M(L - A_1 K)}{K(L + A_1 K)}(1 + A_1 t)^{-\frac{L}{A_1 K}-1} + 2\frac{\alpha_1 A_1 M}{L + A_1 K}. \tag{23}$$

Уравнение (20) решается аналогично при начальном условии $b_2(0) = 0$. Его решение имеет следующий вид:
$$b_2(t) = \frac{\alpha_2 A_1 M}{L + A_1 K}\left(1 - (1 + A_1 t)^{-\frac{L}{A_1 K}-1}\right). \tag{24}$$

Таким образом, согласно (8), (23), (24) компоненты тензора флуктуаций номинальных напряжений вычисляются по формуле
$$\sigma^*_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)}\left(c_{kl}(q_1, q_2, t)d\varphi_1(q_1, q_2) + d_{kl}(q_1, q_2, t)d\varphi_2(q_1, q_2)\right),$$
где $c_{11} = -q_2^2 b_1$, $c_{12} = q_1 q_2 b_1$, $c_{22} = -q_1^2 b_1$; $d_{11} = -q_2^2 b_2$, $d_1 = q_1 q_2 b_2$, $d_{11} = -q_1^2 b_2$. Дисперсии случайного поля напряжений вычислялись в предположении, что процессы ползучести и накопления повреждённости оказывают независимое влияние на вероятностные характеристики напряжений. В этом случае дисперсии напряжений определяются следующим образом:
$$\begin{aligned} D_{kl}(t) &= D(\sigma_{kl}) = \langle|\sigma_{kl}|^2\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_1(q_1, q_2)c^2_{kl}(q_1, q_2, t) + S_2(q_1, q_2)d^2_{kl}(q_1, q_2, t)\right)dq_1 dq_2. \end{aligned} \tag{25}$$

В случае изотропного скалярного поля U_p спектральная плотность S_p зависит только от модуля волнового вектора $q_0 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, а для дисперсии выполняется равенство [8]
$$D_{U_p}(t) = 2\pi\int_0^\infty S_p(q_0)q_0 dq_0 = 1. \tag{26}$$

Поэтому целесообразно в интеграле (25) сделать переход к полярным координатам $q_1 = q_0\cos\varphi$, $q_2 = q_0\sin\varphi$. Тогда дисперсии напряжений с учётом (26) будут определяться по формуле
$$D_{kl}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(R^2_{kl}(t, \cos\varphi, \sin\varphi) + Q^2_{kl}(t, \cos\varphi, \sin\varphi)\right)d\varphi,$$
где $R_{kl}(t, \cos\varphi, \sin\varphi)$, $Q_{kl}(t, \cos\varphi, \sin\varphi)$ — известные рациональные функции. В силу громоздкости они здесь не выписаны.

В качестве примера рассмотрим случай, когда плоскость растягивается в двух ортогональных направлениях пропорционально параметру h, т. е.

$\sigma_{11}^0 = \sigma^0$, $\sigma_{22}^0 = h\sigma^0$, $\sigma_{12}^0 = 0$. Расчёты производились при $h = 2$, $\sigma^0 = 33{,}24$ МПа и следующих параметрах определяющих соотношений, заимствованных из работы [9]: $n = 3{,}2$, $c = 6{,}67 \cdot 10^{-9}$ МПа$^{-3,2}$ ч$^{-1}$, $b = 0{,}141$. В табл. 1 приведены значения коэффициента вариации $\sqrt{D_{11}(0)}/\sigma^0$ (в процентах), полученные для случая установившейся ползучести при различных значениях α_1 без учёта повреждённости (при $t = 0$). В табл. 2 представлены значения $\sqrt{D_{11}(1000)}/\sigma^0$ в зависимости от параметров α_1 и α_2.

Таблица 1

α_1	$\sqrt{D_{11}(0)}/\sigma^0$
0,1	1,26
0,2	2,52
0,3	3,78
0,4	5,04
0,5	6,30

Таблица 2

α_1	$\sqrt{D_{11}(1000)}/\sigma^0$				
	$\alpha_2 = 0{,}1$	$\alpha_2 = 0{,}2$	$\alpha_2 = 0{,}3$	$\alpha_2 = 0{,}4$	$\alpha_2 = 0{,}5$
0,1	2,74	3,46	4,41	5,47	6,59
0,2	5,05	5,48	6,12	6,92	7,84
0,3	7,45	7,75	8,22	8,83	9,56
0,4	9,88	10,10	10,47	10,96	11,55
0,5	12,31	12,49	12,79	13,19	13,69

Из табл. 2 следует, что наблюдается существенное изменение величины коэффициента вариации $\sqrt{D_{11}(t)}/\sigma^0$ с течением времени. В зависимости от сочетания параметров α_1 и α_2 и времени t эта величина может в несколько раз превышать соответствующее значение в случае установившейся ползучести без учёта повреждённости материала. Иными словами, на третьей стадии ползучести происходит увеличение величины флуктуации напряжения с течением времени, что, в свою очередь, может служить теоретическим обоснованием экспериментально наблюдаемого увеличения разброса деформации ползучести на стадии разупрочнения по сравнению с разбросом на стадии установившейся ползучести.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13–01–00699-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Н. Н. Попов, С. А. Забелин*, “Решение нелинейной стохастической задачи ползучести методом малого параметра при плоском напряженном состоянии” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 106–112. [*N. N. Popov, S. A. Zabelin*, “Solution of nonlinear stochastic creep problem for plane stress state using small parameter method” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006. no. 43. Pp. 106–112].
2. *Н. Н. Попов, О. О. Чернова*, “Решение нелинейной задачи ползучести для стохастически неоднородной плоскости на основе второго приближения метода малого параметра” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 50–58. [*N. N. Popov, O. Chernova*, “Solution of nonlinear creep problem for stochastically inhomogeneous plane on the basis of the second approximation for small parameter method” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 4(25). Pp. 50–58].
3. *В. П. Радченко, Н. Н. Попов*, “Нелинейная стохастическая задача ползучести неоднородной плоскости с учетом поврежденности материала” // *ПМТФ*, 2007. Т. 48, № 2. С. 140–145; англ. пер.: *N. N. Popov, V. P. Radchenko*, “Nonlinear stochastic creep problem for an inhomogeneous plane with the damage to the material taken into account” // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007. Vol. 48, no. 2. Pp. 265–270.
4. *В. П. Радченко, Ю. А. Ерёмин*, Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с. [*V. P. Radchenko,*

Yu. A. Eremin, Rheological deformation and fracture of materials and structural elements. Moscow: Mashinostroenie-1, 2004. 265 pp.]

5. *В. П. Радченко, Н. Н. Попов*, “Стохастические характеристики полей напряжений и деформаций при установившейся ползучести стохастически неоднородной плоскости” // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2006. № 2. С. 3–11. [*V. P. Radchenko, N. N. Popov*, “Statistical characteristics of stress fields and creep strains of a stochastically inhomogeneous plane” // *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 2006. no. 2. Pp. 3–11].
6. *Н. Н. Попов, Л. В. Коваленко, М. А. Яшин*, “Решение плоской нелинейной стохастической задачи ползучести методом спектральных представлений” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 2(19). С. 99–106. [*N. N. Popov, L. V. Kovalenko, M. A. Yashin*, “Solution of plane nonlinear stochastic problem with spectral representation method” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 2(19). Pp. 99–106].
7. *Л. В. Коваленко, Н. Н. Попов, В. П. Радченко*, “Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести” // *ПММ*, 2009. Т. 73, № 6. С. 1009–1016; англ. пер.: *L. V. Kovalenko, N. N. Popov, V. P. Radchenko*, “Solution of the plane stochastic creep boundary value problem” // *J. Appl. Math. Mech.*, 2009. Vol. 73, no. 6. Pp. 727–733.
8. *А. А. Свешников*, Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.; англ. пер.: *A. A. Sveshnikov*, Applied Methods of the Theory of Random Functions. Oxford: Pergamon, 1966. ix+321 pp.
9. Закономерности ползучести и длительной прочности / ред. С. А. Шестериков. М.: Машиностроение, 1983. 102 с. [Regularities of Creep and Creep Strength / ed. S. A. Shesterikov. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 102 pp.]

Поступила в редакцию 05/VII/2013;
в окончательном варианте — 29/VIII/2013.

MSC: 74E35, 74K20

METHOD FOR NONLINEAR STOCHASTIC PROBLEM OF CREEP SOLVING FOR A PLANE TAKING INTO ACCOUNT DAMAGE OF THE MATERIAL

N. N. Popov, O. O. Chernova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: `ponick25@gmail.com, chernova_olga@citydom.ru`

The analytical method for nonlinear stochastic problem of creep solving for a plane taking into account the damage of the material and the third stage of creep is developed. Determinative creep equations are taken in accordance with the energy version of the nonlinear theory of a viscous flow in a stochastic form. Stochasticity of the material is determined by two random functions of coordinates x_1 *and* x_2*. Linearization of the problem relative to the nominal stress on the basis of small parameter method is produced. The variance of the random stress fields is found on the hypothesis that processes of creep and damage accumulation are independent. The case when the plane is stretched in two orthogonal directions in proportion to some parameter is given as an example. The provided analysis showed that at the third stage of creep magnitude stress fluctuation is increased relative to the value at the stage in steady-state creep.*

Key words: *small parameter method, third stage of creep, damage, stochastic problem, stress fluctuation, random function.*

Original article submitted 05/VII/2013;
revision submitted 29/VIII/2013.

Nikolay N. Popov (Ph. D. Phys. & Math.), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Olga O. Chernova*, Junior Research Scientist, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.