Дифференциальные уравнения

УДК 517.954

МЕТОД РИМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. Х. Бештоков

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

С помощью метода функции Римана доказаны существование и единственность регулярных решений нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: *краевые задачи, метод функции Римана, нелокальное условие, уравнение в частных производных третьего порядка, псевдопараболическое уравнение.*

Хорошо известно, что рассмотрение вопросов фильтрации жидкости в пористых средах [1, 2], передачи тепла в гетерогенной среде [3, 4], влагопереноса в почво-грунтах [5] (см. [6, с. 137]) приводит к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются псевдопараболическими уравнениями в частных производных третьего порядка.

В данной работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Доказательство существования регулярных решений поставленных задач проводится методом функции Римана, причём функция Римана, которая вводится здесь, существенно отличается от рассмотренной в [7, 8]. В работе [9] рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Доказательство основных утверждений в [9] проводится с помощью метода функции Римана, принцип построения которой используется в данной работе.

Задача A. Существование и единственность решения задачи A. В замкнутом прямоугольнике $\overline{D} = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$Lu = (\eta(x,t)u_{xt})_x + (k(x,t)u_x)_x + r(x,t)u_x + du_t - q(x,t)u = -f(x,t),$$
$$0 < x < l,\ 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(0,t) = \beta(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau - \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad (2)$$

Мурат Хамидбиевич Бештоков (к.ф.-м.н., доц.), докторант, каф. вычислительной математики.

$$u_x(l,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$
$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4}$$

где

$$\eta(x,t)\geqslant c_0>0,\ c_0=\mathrm{const};\ \eta_{x,t},\ k_x,\ r_x,\ d_t,\ q,\ f\in C[\overline{D}];\ u_0(x)\in C^2[0,l], \tag{5}$$

$\beta(t)$, $\rho(t,\tau)$, $\mu(t)$ — функции, непрерывные на $[0,T]$, $0\leqslant\tau\leqslant t$. Кроме этого, введём обозначение $\Pi(x,t)=ku_x+\eta u_{xt}$, которое будет использоваться далее.

Заметим, что нелокальное условие (2) можно заменить условием

$$u(0,t)=\beta(t)\int_0^h u(x,t)dx+\int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau-\mu(t),$$

где h — глубина корнеобитаемого слоя (см. [10]) или активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации. Поставленные и исследованные в данной работе задачи характерны также тем, что содержат в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изученную А. И. Кожановым [11].

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *и граничных условий* (2)–(4) *удовлетворяют условиям гладкости* (5), $d(x,t)<0$ *для любого* $(x,t)\in D$ *и* $\beta(t)<0$ *для любого* $t\in[0,T]$. *Тогда задача* (1)–(4) *имеет единственное регулярное в* $\overline{D}$ *решение.*

Доказательство. Следуя [9] введём аналог функции Римана $w = w(x,t;\alpha,\tau)$ для уравнения (1) в области $\Omega=\{(x,t):\alpha<x<l, 0<t<\tau\}$ в форме

$$Mw(x,t;\alpha,\tau)= \\ =-(\eta(x,t)w_x)_{xt}+(k(x,t)w_x)_x-(r(x,t)w)_x-(dw)_t-q(x,t)w=0,$$

$$w(\alpha,t;\alpha,\tau)=0, \quad w_x(\alpha,t;\alpha,\tau)=\eta^{-1}(\alpha,\tau)\exp\left(\int_\tau^t \frac{k(\alpha,t_1)}{\eta(\alpha,t_1)}dt_1\right),$$
$$w(x,\tau;\alpha,\tau)=\omega_1(x,\tau),$$

где $\omega_1(x,\tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\big(\eta(x,\tau)w_x(x,\tau;\alpha,\tau)\big)_x+d(x,\tau)w(x,\tau;\alpha,\tau)=0,$$
$$w(\alpha,\tau;\alpha,\tau)=0, \quad w_x(\alpha,\tau;\alpha,\tau)=\eta^{-1}(\alpha,\tau).$$

Здесь и далее (α,τ) — произвольная фиксированная точка области D.

Имеет место соотношение

$$wLu-uMw=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{6}$$

где

$$Lu=(\eta u_{xt})_x+(ku_x)_x+ru_x+du_t-qu+f(x,t),$$

$$Q = \eta w u_{xt} + u(\eta w_x)_t + kwu_x - kw_x u + ruw, \quad P = \eta w_x u_x - duw.$$

Потребуем непрерывности P, Q в $\overline{D}$, непрерывности и ограниченности P_x, Q_t в $\overline{D}$.

Проинтегрируем соотношение (6) по области Ω:

$$\int_{\Omega} \big(wLu - uMw\big)dxdt = \int_{\alpha}^{l} \int_{0}^{\tau} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\Big)dxdt. \tag{7}$$

Тогда из (7) с учётом определения функции $w = w(x,t;\alpha,\tau)$ получим представление

$$\begin{aligned} u(\alpha,\tau) &= u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;\alpha,\tau)- \\ &- \int_0^{\tau} \Big(\big(\eta(l,t)u_{xt}(l,t) + k(l,t)u_x(l,t)\big)w(l,t;\alpha,\tau)+ \\ &+ u(l,t)\Big[\big(\eta(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau)\big)_t - k(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau) + r(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\Big]\Big)dt+ \\ &+ \int_{\alpha}^{l} \Big(d(x,0)w(x,0;\alpha,\tau)u(x,0) - \eta(x,0)w_x(x,0;\alpha,\tau)u_x(x,0)\Big)dx- \\ &- \int_0^{\tau}\int_{\alpha}^{l} w(x,t;\alpha,\tau)f(x,t)dxdt. \end{aligned} \tag{8}$$

Существование и единственность аналога функции Римана $w = w(x,t;\alpha,\tau)$ доказаны в работе [9].

Из представления (8) простым преобразованием получим

$$\begin{aligned} u(\alpha,\tau) &= u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;\alpha,\tau) - u_x(l,\tau)\eta(l,\tau)w(l,\tau;\alpha,\tau)+ \\ &+ \int_0^{\tau} \Big(u_x(l,t)\big[\big(\eta(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\big)_t - k(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\big]- \\ &- u(l,t)\Big[\big(\eta(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau)\big)_t - k(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau) + r(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\Big]\Big)dt+ \\ &+ \int_{\alpha}^{l} \Big(d(x,0)w(x,0;\alpha,\tau)u(x,0) - \eta(x,0)w_x(x,0;\alpha,\tau)u_x(x,0)\Big)dx- \\ &- \int_0^{\tau}\int_{\alpha}^{l} w(x,t;\alpha,\tau)f(x,t)dxdt + u_x(l,0)\eta(l,0)w(l,0;\alpha,\tau). \end{aligned} \tag{9}$$

Проинтегрируем (9) по α от 0 до l. Тогда с учётом (4) из (9) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l u(\alpha,\tau)d\alpha &= u(l,\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha - u_x(l,\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha+ \\ &+ \int_0^{\tau}\Big(K_1(\tau,t)u_x(l,t) - K_2(\tau,t)u(l,t)\Big)dt + \gamma_1(\tau), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$K_1(\tau,t) = \int_0^l \big[\big(\eta(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\big)_t - k(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\big]d\alpha,$$

$$K_2(\tau,t)=\int_0^l\Big[\big(\eta(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau)\big)_t-k(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau)+r(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\Big]d\alpha,$$

$$\gamma_1(\tau)=\int_0^l\int_\alpha^l\Big(d(x,0)w(x,0;\alpha,\tau)u_0(x)-\eta(x,0)w_x(x,0;\alpha,\tau)u_0'(x)\Big)dxd\alpha-$$
$$-\int_0^\tau\int_0^l\int_\alpha^l w(x,t;\alpha,\tau)f(x,t)dxd\alpha dt+\int_0^l u_x(l,0)\eta(l,0)w(l,0;\alpha,\tau)d\alpha.$$

Учитывая (10), из (2) получим

$$u(0,\tau)-u(l,\tau)\beta(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha+u_x(l,\tau)\beta(\tau)\eta(l,\tau)\times$$
$$\times\int_0^l w(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha+\int_0^\tau\Big(K_3(\tau,t)u_x(l,t)+K_4(\tau,t)u(l,t)\Big)dt=\gamma_2(\tau),\quad(11)$$

где

$$K_3(\tau,t)=-\beta(\tau)K_1(\tau,t),\quad K_4(\tau,t)=\beta(\tau)K_2(\tau,t)-\rho(\tau,t),$$
$$\gamma_2(\tau)=\beta(\tau)\gamma_1(\tau)-\mu(\tau).$$

Учитывая (4), из представления (9) при $\alpha=0$ получим интегральное уравнение

$$u(0,\tau)-u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau)+u_x(l,\tau)\eta(l,\tau)w(l,\tau;0,\tau)+$$
$$+\int_0^\tau\Big(K_5(\tau,t)u_x(l,t)+K_6(\tau,t)u(l,t)\Big)dt=\gamma_3(\tau),\quad(12)$$

где

$$K_5(t,\tau)=-\big(\eta(l,t)w(l,t;0,\tau)\big)_t+k(l,t)w(l,t;0,\tau),$$
$$K_6(t,\tau)=\big(\eta(l,t)w_x(l,t;0,\tau)\big)_t-k(l,t)w_x(l,t;0,\tau)+r(l,t)w(l,t;0,\tau),$$

$$\gamma_3(\tau)=\int_0^l\Big(d(x,0)w(x,0;0,\tau)u_0(x)-\eta(x,0)w_x(x,0;0,\tau)u_0'(x)\Big)dx-$$
$$-\int_0^\tau\int_0^l w(x,t;0,\tau)f(x,t)dxdt+\eta(l,0)w(l,0;0,\tau)u_0'(l).$$

Учитывая (3), из (11) и (12) получим систему интегральных уравнений

$$u(0,\tau)-u(l,\tau)\beta(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha+\int_0^\tau\Big(K_4(\tau,t)u(l,t)\Big)dt=\gamma_2(\tau),$$
$$u(0,\tau)-u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau)+\int_0^\tau\Big(K_6(\tau,t)u(l,t)\Big)dt=\gamma_3(\tau),\quad(13)$$

которая в операторной форме принимает вид

$$A(\tau)\overrightarrow{u}(\tau) + \int_0^\tau B(\tau, t)\overrightarrow{u}(t)dt = \overrightarrow{\gamma}(\tau),$$

где

$$\det|A(\tau)| = \beta(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha - \eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau).$$

Покажем, что определитель $\det|A(\tau)| \neq 0$.

Лемма 1. *Функция $w(x,t;\alpha,\tau)$ удовлетворяет неравенству*

$$w(x,\tau;0,\tau) > 0 \;\; \textit{для любого} \;\; x \in (0,l], \quad \eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) > 1,$$

если $d(x,t) < 0$, $\eta(x,t) \geqslant c_0 > 0$ для любых $(x,t) \in D$.

Доказательство. Следуя рассуждениям [9], рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}(\eta(x,\tau)w_x(x,\tau;\alpha,\tau))_x + d(x,\tau)w(x,\tau;\alpha,\tau) = 0,\\ w(\alpha,\tau;\alpha,\tau) = 0, \quad w_x(\alpha,\tau;\alpha,\tau)) = \eta^{-1}(\alpha,\tau).\end{gathered} \tag{14}$$

С помощью принципа максимума и принципа Заремба—Жиро из (14) получаем $w_x(0,\tau;0,\tau) > 0$ для любого $(x,t) \in [0,l)$. Тогда из равенства

$$\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) = \eta(0,\tau)w_x(0,\tau;0,\tau) - \int_0^l d(x,\tau)w(l,\tau;0,\tau)dx$$

имеем, что если $d(x,t) < 0$, $\eta(x,t) \geqslant c_0 > 0$ для любых $(x,t) \in D$, то

$$\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) > 1. \;\square$$

На основании доказанной леммы убеждаемся, что если $\beta(\tau) < 0$ для любого $\tau \in [0,T]$, то $\det|A(\tau)| \neq 0$. Поэтому система уравнений (13) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0,\tau) = f(\tau)$, $u(l,\tau) = \varphi(\tau)$, где $f(\tau), \varphi(\tau) \in C^1[0,T]$, задачу (1)–(4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена также в работе [9]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1)–(4). Теорема доказана. $\square$

Заметим, что (3) можно заменить условием

$$-u_x(l,t) = \int_0^t \rho_1(t,\tau)u(l,\tau)d\tau - \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\rho_1(t,\tau)$, $\mu_1(t)$ — функции, непрерывные на $[0,T]$.

Задача B. Существование и единственность решения задачи B. Рассмотрим теперь нелокальную краевую задачу, когда условие (3) в **задаче A** заменяется условием вида

$$-u_x(l,t) = \beta_1(t)u(l,t) - \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3*}$$

где $\beta_1(t)$, $\mu_1(t)$ — функции, непрерывные на $[0,T]$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2), (3*), (4) удовлетворяют условиям гладкости (5), $d(x,t) < 0$ для любых $(x,t) \in D$, $\beta(t) < 0$ и $\beta_1(t) > 0$ для любого $t \in [0,T]$. Тогда задача (1), (2), (3*), (4) имеет единственное регулярное в $\overline{D}$ решение.*

Доказательство. С учётом (3*) уравнения (11) и (12) образуют следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} u(0,\tau) - u(l,\tau)\Big[\beta(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha + \\ +\beta(\tau)\beta_1(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha\Big] + \\ + \int_0^\tau \Big(K_7(\tau,t)u(l,t)\Big)dt = \gamma_4(\tau), \\ u(0,\tau) - u(l,\tau)\Big[\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) + \beta_1(\tau)\eta(l,\tau)w(l,\tau;0,\tau)\Big] + \\ + \int_0^\tau \Big(K_8(\tau,t)u(l,t)\Big)dt = \gamma_5(\tau), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$K_7(\tau,t) = K_4(\tau,t) - K_3(\tau,t)\beta_1(\tau),$$
$$\gamma_4(\tau) = \gamma_2(\tau) - \beta(\tau)\eta(l,\tau)\mu_1(\tau)\int_0^l w(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha - \int_0^\tau \Big(K_3(\tau,t)\mu_1(\tau)\Big)dt,$$
$$K_8(\tau,t) = K_6(\tau,t) - K_5(\tau,t)\beta_1(\tau),$$
$$\gamma_5(\tau) = \gamma_3(\tau) - \eta(l,\tau)\mu_1(\tau)w(l,\tau;\alpha,\tau) - \int_0^\tau \Big(K_5(\tau,t)\mu_1(\tau)\Big)dt.$$

Систему интегральных уравнений (15) перепишем в операторной форме

$$A(\tau)\overrightarrow{u}(\tau) + \int_0^\tau B(\tau,t)\overrightarrow{u}(t)dt = \overrightarrow{\gamma}(\tau), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \det|A(\tau)| = -\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) - \beta_1(\tau)\eta(l,\tau)w(l,\tau;0,\tau) + \\ + \beta(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha + \beta(\tau)\beta_1(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha. \end{aligned}$$

На основании леммы 1 при условии, что если $\beta(\tau) < 0$, $\beta_1(\tau) > 0$ для любого $\tau \in [0,T]$, убеждаемся, что определитель $\det|A(\tau)| \neq 0$. Поэтому система уравнений (16) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0,\tau) = f(\tau)$, $u(l,\tau) = \varphi(\tau)$, где $f(\tau)$, $\varphi(\tau) \in C^1[0,T]$, задачу (1), (2), (3*), (4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена в работе [9]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1), (2), (3*), (4). □

Задача C. Существование и единственность решения задачи C. Рассмотрим теперь нелокальную краевую задачу, когда условие (3) в **задаче A** заменяется условием вида

$$-\Pi(l,t) = \beta_1(t)u(l,t) - \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3^{**}}$$

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *и граничных условий* (2), (3^{**}), (4) *удовлетворяют условиям гладкости* (5), $d(x,t) < 0$ *для любого* $(x,t) \in D$ *и* $\beta(t) < 0$ *для любых* $t \in [0,T]$. *Тогда задача* (1), (2), (3^{**}), (4) *имеет единственное регулярное в* $\overline{D}$ *решение.*

Доказательство. Проинтегрируем (8) по α от 0 до l. Тогда с учётом (4) получим

$$\int_0^l u(\alpha,\tau)d\alpha = u(l,\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha -$$
$$- \int_0^\tau \Big(K_9(\tau,t)\Pi(l,t) + K_{10}(\tau,t)u(l,t)\Big)dt + \gamma_6(\tau), \tag{17}$$

где

$$K_9(\tau,t) = \int_0^l w(l,t;\alpha,\tau)d\alpha,$$

$$K_{10}(\tau,t) = \int_0^l \Big(\big(\eta(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau)\big)_t - k(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau) + r(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\Big)d\alpha,$$

$$\gamma_7(\tau) = \int_0^l\int_\alpha^l \Big(d(x,0)w(x,0;\alpha,\tau)u_0(x) - \eta(x,0)w_x(x,0;\alpha,\tau)u_0'(x)\Big)dxd\alpha -$$
$$- \int_0^\tau\int_0^l\int_\alpha^l w(x,t;\alpha,\tau)f(x,t)dxd\alpha dt.$$

Учитывая (2), (3^{**}), из (17) получим

$$u(0,t) - u(l,\tau)\beta(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha +$$
$$+ \int_0^\tau \Big(K_{11}(\tau,t)u(l,t)\Big)dt = \gamma_8(\tau), \tag{18}$$

где

$$K_{11}(\tau,t) = \beta(\tau)K_{10}(\tau,t) - \beta(\tau)\beta_1(\tau)K_9(\tau,t) - \rho(\tau,t),$$
$$\gamma_8(\tau) = \beta(\tau)\gamma_7(\tau) - \mu(\tau) - \int_0^\tau \beta(\tau)K_9(\tau,t)\mu_1(t)dt.$$

При $\alpha = 0$ из (8) с учётом (3^{**}) получаем

$$u(\alpha,\tau) - u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) + \int_0^\tau \Big(K_{12}(\tau,t)u(l,t)\Big)dt = \gamma_9(\tau), \tag{19}$$

где

$$K_{12}(\tau,t)=\big(\eta(l,t)w_x(l,t;0,\tau)\big)_t-k(l,t)w_x(l,t;0,\tau)+\\ +r(l,t)w(l,t;0,\tau)-\beta_1(\tau)w(l,t;0,\tau),$$

$$\gamma_9(\tau)=\int_0^l\Big(d(x,0)w(x,0;0,\tau)u_0(x)-\eta(x,0)w_x(x,0;0,\tau)u_0'(x)\Big)dx-\\ -\int_0^\tau\int_0^l w(x,t;0,\tau)f(x,t)dxdt-\int_0^\tau w(l,t;0,\tau)\mu_1(t)dt.$$

Уравнения (18) и (19) образуют систему интегральных уравнений. Запишем систему в операторном виде

$$A(\tau)\overrightarrow{u}(\tau)+\int_0^\tau B(\tau,t)\overrightarrow{u}(t)dt=\overrightarrow{\gamma}(\tau), \tag{20}$$

где

$$\det|A(\tau)|=\beta(\tau)\eta(l,\tau)\int_0^l w_x(l,\tau;\alpha,\tau)d\alpha-\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau).$$

На основании леммы 1 при условии $\beta(\tau)<0$ для любых $\tau\in[0,T]$ убеждаемся, что определитель $\det|A(\tau)|\neq 0$. Поэтому система уравнений (20) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0,\tau)=f(\tau)$, $u(l,\tau)=\varphi(\tau)$, где $f(\tau)$, $\varphi(\tau)\in C^1[0,T]$, задачу (1), (2), ($3^{**}$), (4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена в работе [9]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1), (2), (3^{**}), (4). $\square$

Заметим, что (3) также можно заменить условием

$$-\Pi(l,t)=\int_0^t\rho_1(t,\tau)u(l,\tau)d\tau-\mu_1(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Замечание. Если ввести аналог функции Римана $\nu=\nu(x,t;\xi,\tau)$ для уравнения (1) в области Ω в форме

$$M\nu(x,t;\xi,\tau)=-(\eta(x,t)\nu_x)_{xt}+(k(x,t)\nu_x)_x-(r(x,t)\nu)_x-(d\nu)_t-q(x,t)\nu=0,\\ \nu(\xi,t;\xi,\tau)=0,\quad \nu_x(\xi,t;\xi,\tau)=\eta^{-1}(\xi,\tau)\exp\left(\int_\tau^t\frac{k(\xi,t_1)}{\eta(\xi,t_1)}dt_1\right),\\ \nu(x,\tau;\xi,\tau)=\omega_2(x,\tau),$$

где $\omega_2(x,\tau)$ — решение задачи Коши

$$(\eta(x,\tau)\nu_x(x,\tau;\xi,\tau))_x+d(x,\tau)\nu(x,\tau;\xi,\tau)=0,\\ \nu(\xi,\tau;\xi,\tau)=0,\quad \nu_x(\xi,\tau;\xi,\tau)=\eta^{-1}(\xi,\tau),$$

то имеет место следующее представление:

$$u(\xi,\tau) = u(0,\tau)\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;\xi,\tau) - \int_0^\tau \Big(\eta(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)u_{xt}(0,t)+$$
$$+ k(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)u_x(0,t) + u(0,t)\Big[\big(\eta(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau)\big)_t - k(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau)+$$
$$+ r(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)\Big]\Big)dt + \int_0^\xi \Big(\eta(x,0)\nu_x(x,0;\xi,\tau)u_x(x,0)-$$
$$- d(x,0)\nu(x,0;\xi,\tau)u(x,0)\Big)dx + \int_0^\tau\int_0^\xi \nu(x,t;\xi,\tau)f(x,t)dxdt. \quad (21)$$

Существование и единственность аналога функции Римана доказаны в [9].

Лемма 2. *Функция* $\nu(x,t;\xi,\tau)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\nu(x,\tau;l,\tau) < 0 \quad \text{для любого} \quad x \in [0,l), \qquad \eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) > 1\,,$$

если $d(x,t) < 0$, $\eta(x,t) \geqslant c_0 > 0$ *для любого* $(x,t) \in D$.

На основании леммы 2 и представления (21) аналогично доказываются существование и единственность регулярных решений задач A, B, C, в которых условие (2) заменяется последовательно следующими условиями:

$$1) \quad u_x(0,t) = \beta(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau - \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при условии, что $\beta(t) > 0$;

$$2) \quad \Pi(0,t) = \beta(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau - \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Регистрационный номер НИР: № 1.6197.2011.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Г. И. Баренблат, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина*, “Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах” // *ПММ*, 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864; англ. пер.: *G. I. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, I. N. Kochina*, “Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]” // *J. Appl. Math. Mech.*, 1960. Vol. 24, no. 5. Pp. 1286–1303.
2. *Е. С. Дзекцер*, “Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах” // *Докл. Акад. наук СССР*, 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543; англ. пер.: *E. S. Dzektser*, “Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media” // *Soviet Physics Doklady*, 1975. Vol. 20, no. 3. Pp. 24.
3. *Л. И. Рубинштейн*, “К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах” // *Изв. Акад. наук СССР, Сер. Геогр.*, 1948. Т. 12, № 1. С. 27–45. [*L. I. Rubinstein*, “On the problem of the process of propagation of heat in heterogeneous media” // *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr.*, 1948. Vol. 12, no. 1. Pp. 27–45].
4. *T. W. Ting*, “A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction” // *J. Math. Anal. Appl.*, 1974. Т. 45, № 1. С. 23–31.

5. *M. Hallaire, S. de Parcevaux, R. J. Bouchet, et. al.*, L'eau et la production végétale. Paris: Institut National De La Recherche Agronomique, 1964. 455 pp.
6. *А. Ф. Чудновский*, Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с. [*A. F. Chudnovsky*, Thermophysics of the soil. Moscow: Nauka, 1976. 352 pp.]
7. *D. Colton*, "Pseudoparabolic equation in one space variable" // *J. Diff. Eq.*, 1972. Vol. 12, no. 3. Pp. 559–565.
8. *D. Colton*, "Integral operators and the first initial-boundary value problems for pseudoparabolic equations with analytic coefficients" // *J. Diff. Eq.*, 1973. Vol. 13, no. 3. Pp. 506–522.
9. *М. Х. Шхануков*, "О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах" // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699. [*M. Kh. Shkhanukov*, "On some boundary-value problems for a third-order equation arising when modelling fluid filtration in porous media" // *Differ. Uravn.*, 1982. Vol. 18, no. 4. Pp. 689–699].
10. *А. Ф. Чудновский*, "Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве" // *Сб. трудов АФИ*, 1969. № 23. С. 41–54. [*A. F. Chudnovsky*, "Some adjustments in the formulation and solution of problems of heat and moisture transfer in the soil" // *Sb. Trudov AFI*, 1969. no. 23. Pp. 41–54].
11. *А. И. Кожанов*, "Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера" // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774; англ. пер.: *A. I. Kozhanov*, "On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation" // *Differ. Equ.*, 2004. Vol. 40, no. 6. Pp. 815–826.

Поступила в редакцию 10/I/2013;
в окончательном варианте — 27/III/2013.

MSC: 35K70; 35K35, 35C15, 35A20

RIEMANN METHOD FOR SOLVING NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE THIRD ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

M. H. Beshtokov

Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russia.

E-mail: `beshtokov_murat@rambler.ru`

The existence and uniqueness of regular solutions of non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations with variable coefficients are proved using the Riemann function method.

Keywords: *boundary value problems, the Riemann function method, non-local condition, partial differential equation of the third order, pseudoparabolic equation.*

Original article submitted 10/I/2013;
revision submitted 27/III/2013.

Murat H. Beshtokov (Ph. D. Phys. & Math.), Doctoral Candidate, Dept. of Computational Mathematics.