Теоретическая физика

УДК 517.958:524.882

ПРЕЖДЕ ЧЕМ ЗАНЯТЬСЯ ФИЗИКОЙ ЧЁРНЫХ ДЫР…

В. А. Березин

Институт ядерных исследований РАН,
Россия, 117312, Москва, пр-т 60-летия Октября, 7-а.

E-mail: berezin@ms2.inr.ac.ru

Дан очерк истории развития понятия «чёрная дыра». Описана глобальная геометрия сферически симметричного пространства–времени общего вида. Получены уравнения Эйнштейна для сферической гравитации. Описана причинная структура чёрной дыры Шварцшильда и показано, как строятся конформные диаграммы Картера—Пенроуза, на которых эта структура видна особенно отчётливо. Выведены уравнения Израэля для тонких самогравитирующих оболочек и получен модифицированный закон тяготения Ньютона в сферической гравитации. Дан простой и наглядный вывод формул для метрики Вайдья, описывающей сферически симметричное гравитирующее излучение. В качестве примера применения теории решена задача о реальном (а не виртуальном) статическом наблюдателе в поле Шварцшильда.

Ключевые слова: *общая теория относительности, сферическая гравитация, тонкие оболочки, многообразие Шварцшильда, метрика Вайдья.*

Очерк подготовлен по результатам цикла лекций, прочитанных автором на Третьей международной конференции «Математическая физика и её приложения» (27 августа – 1 сентября 2012 г., г. Самара)

1. Введение

Первое из найденных до сих пор упоминание о чёрных дырах относится к 1784 году (для справки: знаменитые «Математические начала натуральной философии» Исаака Ньютона были опубликованы в 1687 г.). Некий священник Дж. Мичелл, размышляя, как и положено служителю Бога, о вечном, т. е. о природе небесных явлений, сообразил, что если вторая космическая скорость на поверхности какой-нибудь звезды равна или больше скорости света, то такую звезду достаточно удалённый наблюдатель не сможет увидеть. Он назвал такие объекты тёмными звёздами и опубликовал свои научные наблюдения в небольшой статье [1]. Это сообщение не вызвало особенного интереса — оказывается, могут существовать невидимые звёзды — любопытно! Такое отношение вполне объяснимо. В то время господствовала корпускулярная теория света, скорость в которой не имела никакого фундаментального значения для физики.

Следующий шаг был сделан П.-С. Лапласом [2]. В 1799 году он опубликовал простой (для нашего времени) расчёт размеров тёмных сфер, или звёзд,

Виктор Александрович Березин (д.ф.-м.н.), старший научный сотрудник, теоретический отдел.

основанный, разумеется, на ньютоновской теории гравитации. По определению, при второй космической скорости энергии тела как раз хватает для преодоления гравитационной энергии тяготения и ухода на бесконечность. В ньютоновской теории гравитационный потенциал равен

$$U_{\text{grav}}(r) = -\frac{GM}{r},$$

где r — расстояние до центра тяготеющего тела, M — его масса, G — гравитационная постоянная. Произвольная аддитивная постоянная выбрана равной нулю для потенциала на бесконечности, а знак «минус» означает притяжение. Из определения второй космической скорости следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{Mm}{R_0},$$

где R_0 — радиус звезды. Как и положено, эта скорость не зависит от массы m световых корпускул, что было замечено ещё Галилеем, наблюдавшим падение различных тел с Пизанской башни. Полагая $v = c$ (c — скорость света), получаем

$$c^2 = \frac{2GM}{R_0},$$

откуда

$$R_0 = \frac{2G\,M}{c^2} = R_g,$$

R_g называется гравитационным радиусом. И снова этот результат рассматривался как технический, не имеющий фундаментального значения. Формула современников не впечатлила. Но она поражает нас, потому что в точности совпадает с радиусом релятивистской чёрной дыры! Известно, что комбинациями мировых констант — скорости света c, гравитационной постоянной G и постоянной Планка $\hbar$ — можно получить величину любой заданной размерности, поэтому удивлять должно только совпадение численных коэффициентов, но оно здесь совершенно случайно. При ближайшем рассмотрении вывод, предложенный Лапласом, в наше время представляется лихой кавалерийской атакой. Во-первых, при второй космической скорости полная энергия (кинетическая + потенциальная) световых корпускул равна нулю. Если же полная энергия отрицательна (радиус звезды меньше R_0), то, хотя звезда и не видна удалённому наблюдателю (на бесконечности), она остаётся видимой для наблюдателя, достаточно близкого. Истинно невидимой в ньютоновской теории может быть только материальная точка. Во-вторых, во времена господства корпускулярной теории никого не смущала переменность скорости света — вплоть до нуля в точке поворота. Вскоре волновая концепция природы света вытеснила корпускулярную, свет стал рассматриваться как колебания всемирного эфира, нечто совсем отдельное от остальной материи, и потому не подчиняющееся другому всемирному закону — закону тяготения.

Новый этап истории черных дыр начался в 1905 году, когда появилась специальная теория относительности [3], хотя тогда этого никто не заметил. Основным постулатом этой теории является проверенное на опыте постоянство скорости света — независимость от выбора инерциальной системы отсчета. Из неё следует также, что эта скорость является предельной в том смысле, что никакое тело, обладающее ненулевой массой покоя, нельзя разогнать до скорости света. В последний год 19 века появилась работа М. Планка, в которой, фактически, доказывалось, что свет испускается и поглощается порциями — квантами, и предлагалась знаменитая формула для их энергии $E = \hbar\omega$ ($\hbar$ — постоянная Планка, ω — круговая частота). Но только после работ А. Эйнштейна по фотоэффекту [4, 5] стало ясно, что свет — это набор фотонов, частиц с нулевой массой покоя. Ещё одна замечательная идея Эйнштейна 1905 года [6] — эквивалентность массы и энергии, которая затем воплотилась в поистине революционной формуле $E = mc^2$ [7]. Что это означает для нас? Прежде всего то, что в энергию любого тела, а значит, и в его массу, дают вклад не только массы покоя составляющих частиц, но и кинетическая энергия движения, и потенциальная энергия их взаимодействий, включая обмен виртуальными (как мы теперь знаем) фотонами, осуществляющими электромагнитное (основное!) взаимодействие между молекулами и атомами (яркий пример — ядро гелия). Следовательно, свет в виде фотонов подвержен закону всемирного тяготения, а вместо массы m нужно использовать её эквивалент E/c^2.

Предположим, мы, приняв специальную теорию относительности, т. е. релятивистское пространство–время Минковского, оставили нетронутым ньютоновский закон тяготения, заменив лишь массу на энергию. Тогда для тёмных звёзд получим максимальное значение радиуса $R = R_g$, лишь вдвое меньшее нужного значения, что несущественно. Важно другое. Поскольку для света нет точек поворота, то полностью потерять начальную энергию $E_0 = \hbar\omega_0$ квант, испущенный с предельной поверхности, может только на бесконечности $\omega(\infty) = 0$. И это не зависит от начального значения частоты. Другими словами, если тело сжато до размеров, меньших R_g, вокруг него образуется область пространства, откуда свет не может «вырваться» наружу и, следовательно, достичь бесконечности. Мировая поверхность границы такой области называется горизонтом событий. Получается, что гравитирующие тела меняют глобальную причинную структуру постулированного в специальной теории относительности пространства–времени Минковского. Значит, объединение релятивистской теории с ньютоновской теорией гравитации внутренне противоречиво. Положительный же результат тот, что теперь мы уже должны иметь дело не с самими поверхностями гравитирующих тел, а с целыми областями пространства–времени, с причинными «дырками» в них, которые можно с полным правом назвать «чёрными дырами».

Современная история «тёмных звёзд» началась в 1916 году статьёй Карла Шварцшильда. Понять важность и революционность открытия Шварцшильда, о чём сам он и не подозревал, невозможно без краткого экскурса в крайне драматическую историю создания общей теории относительности. Работа началась вскоре после появления специальной теории относительности, объединившей пространство и время ньютоновской механики в 4-мерный континуум и установившей особую роль скорости света, определяющей причинную связь между различными событиями. Эйнштейн сформулировал физические принципы, которым должна удовлетворять будущая релятивистская теория гравитации: принцип эквивалентности (локальный) гравитационного поля и поля ускорений, восходящий к открытой Галилеем пропорциональности инертной и гравитационной масс, определение источника полей тяготения — тензор энергии-импульса как релятивистское обобщение плотности массы в нерелятивистском уравнении Пуассона, выяснение роли метрического тензора как релятивистского обобщения ньютоновского гравитационного потенциала — тензорный характер теории диктовался требованием ковариантности относительно произвольных 4-мерных преобразований координат. Друг Эйнштейна, математик М. Гроссманн, обучил его методам дифференциальной геометрии и помог сформулировать ставшие затем знаменитыми уравнения. Д. Гильберт получил те же уравнения из принципа наименьшего действия, что возвело общую теорию относительности, начинавшуюся как «некая эвристическая точка зрения» (по выражению самого Эйнштейна), в ранг строгих математических теорий. Всё это было окончательно разработано к концу 1915 года и опубликовано в 1916 году. Здесь для нас важно то, что релятивистская теория гравитации оказалась теорией пространства–времени. Именно, как всем известно, пространство–время специальной теории относительности определяется следующим линейным элементом — квадратом «расстояния» между двумя близлежащими точками (по одинаковым верхним и нижним индексам подразумевается суммирование):

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

и неявным предположением, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ не меняется при параллельном переносе векторов. Другими словами, пространство–время Минковского является плоским — тензор кривизны Римана равен нулю. Мы уже видели на примере тёмных звёзд, что геометрия Минковского и ньютоновская гравитация несовместимы. Следовательно, нужно отказываться от плоского пространства–времени. Кроме того, в работах Эйнштейна и Гроссманна было показано, что коэффициенты метрического тензора являются естественным обобщением нерелятивистского гравитационного потенциала. Эйнштейн был физиком до мозга костей и потому пользовался физическим «принципом наименьшего действия», т. е. его целью было построение физической теории, которая имела бы «хороший» предельный переход к нерелятивистской гравитации (уравнению Пуассона) при минимальных усилиях (которые в действительности оказались гигантскими). Поэтому Эйнштейн ходил по коридорам Берлинской (Прусской) Академии наук, хватал математиков за пуговицу пиджака или мундира и говорил: дайте мне симметричный тензор второго ранга, линейный по вторым производным метрики. И Гроссманн указал ему такой — это тензор Риччи, получающийся из тензора кривизны Римана свёртыванием верхнего и одного из нижних индексов, но при условии, что связность, определяющая в дифференциальной геометрии параллельный перенос, является метрической (т. е. метрический тензор при этом остаётся неизменным). При таком минимуме предположений Эйнштейну удалось написать свои уравнения. Гильберт, напротив, был математиком до мозга костей. Он задался целью получить уравнения физической теории из сугубо математического принципа наименьшего действия вариационными методами. Для этого ему нужен был лагранжиан. Воодушевлённый ранними попытками Эйнштейна и Гроссманна по созданию релятивистской теории гравитации, он выбрал для лагранжиана скалярную кривизну — свёртку тензора Риччи и метрическую связность. Выбор последней, видимо, был обусловлен минимальным физическим предположением, что единственно гравитационные потенциалы, т. е. компоненты метрического тензора, являются динамическими переменными теории. В конце концов, в результате гигантских усилий Гильберт получил те же уравнения, что и Эйнштейн. Более сложные лагранжианы, например, в виде нелинейной функции от скалярной кривизны, приводят, при сохранении условия метричности связности, к уравнениям четвёртой степени по производным метрического тензора и, как следствие, к неустойчивости решений. Впоследствии оказалось, что, варьируя независимо метрику и связность (т. н. метод Палатини), можно сохранить ограничение на порядок производных метрики, но ценой отказа от метричности связности и заменой её более общей связностью Вейля. И только в случае линейности по кривизне лагранжиана удовлетворяются оба эти требования. В дальнейшем мы будем использовать ортодоксальную общую теорию относительности, поскольку, вообще говоря, непонятно, откуда брать независимую связность — возможно, в будущем это станет ясным, после должного развития теории струн или все ещё гипотетической М-теории.

Доклад о новых уравнениях гравитационного поля был прочитан Эйнштейном на заседании Прусской академии наук 25 ноября 1915 года, опубликован в Сообщениях этой академии. И уже через 2 месяца в 1916 году там же появилась статья Шварцшильда [8], в которой было приведено первое точное решение этих уравнений, ставшее впоследствии столь знаменитым. К этому времени Шварцшильд был уже крупным учёным, академиком, профессором и директором обсерватории в Геттингене, в городе, где работали Гильберт и Минковский. После начала Первой мировой войны в 1914 году он пошёл добровольцем в армию, воевал на западном, затем на восточном фронте, там заболел неизлечимой болезнью — пузырчаткой, из-за чего попал в госпиталь. Вернулся в Германию инвалидом и умер в 1916 году. Находясь в госпитале в России, Шварцшильд написал 3 научные работы, две из которых были посвящены точным решениям уравнений Эйнштейна (сейчас они называются внешним и внутренним решениями Шварцшильда), а третья — методу квантования Бора—Зоммерфельда. И вот первое решение, как стало ясно гораздо позднее, и оказалось первой в истории математической моделью чёрной дыры. Вообще, получение точных решений уравнений Эйнштейна — задача нетривиальная в силу их нелинейности и общековариантности. Нелинейность — неизбежное «зло», поскольку основополагающий принцип «любая энергия тяготеет» распространяется и на энергии самого гравитационного поля. Эта энергия не входит в тензор энергии-импульса материи в правой части уравнений, а «зашифрована» в их левой части, чисто геометрической. Следовательно, возникает задача отделения физических эффектов от координатных, и их правильная интерпретации. Метрика Шварцшильда есть решение вакуумных уравнений Эйнштейна, т. е. когда тензор энергии-импульса материи равен нулю, в предположении сферической симметрии. Очевидно, что это релятивистское обобщение закона всемирного тяготения Ньютона вне сферически симметричного источника, в пределе — точечной частицы.

2. Общие сведения

В этом начальном разделе мы даём сводку необходимых в дальнейшем основных понятий из дифференциальной геометрии и соотношений между ними.

Построение геометрии пространства–времени начинается с задания квадрата интервала между близлежащими точками x^μ и $x^\mu + dx^\mu$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu.$$

По одинаковым верхним и нижним индексам подразумевается суммирование (правило Эйнштейна). Если $ds^2 > 0$, то интервал называется времениподобным, если $ds^2 < 0$ — пространственноподобным. Для световых (изотропных) интервалов $ds^2 = 0$. Такие же названия используются и для векторов — при этом вышеприведенное правило знаков распространяется на свёртку вектора с самим собой

$$A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu.$$

Симметричный невырожденный ковариантный тензор второго ранга $g_{\mu\nu}(x)$ называется метрическим тензором. Выбором системы координат всегда можно привести его в заданной точке к диагональному виду $\mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ (другими словами, мы будем работать в сигнатуре $(+ - - -)$). При переходе к новой координатной системе $x'^\mu = x'^\mu(x)$ метрический тензор, как ему и положено, преобразуется по закону

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\sigma}(x).$$

При этом произвольный контравариантный (с верхним индексом) вектор A^μ (в частности вектор смещения dx^μ) преобразуется как

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} A^\lambda(x),$$

а ковариантный (с нижним индексом) вектор B_μ — по закону

$$B'_\mu(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} D_\lambda(x).$$

Ясно, что обычный дифференциал вектора уже, вообще говоря, вектором не является:

$$dA'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} dA^\lambda(x) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} A^\lambda(x) dx^\sigma.$$

Отсюда следует, что стандартное для евклидова пространства и пространства–времени Минковского определение параллельного переноса векторов $dA^\mu = 0$ уже не ковариантно и потому не работает. Поэтому вводится так называемый ковариантный дифференциал

$$DA^\mu = dA^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda,$$

где коэффициенты связности $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ призваны компенсировать вторые производные старых координат по новым (и наоборот), появляющиеся при обычном дифференцировании, и в то же время восстановить векторный (в общем случае тензорный) характер операции дифференцирования. Ковариантная производная $A^\mu_{;\nu}$ определяется естественным образом:

$$DA^\mu = A^\mu_{;\nu} dx^\nu \to A^\mu_{;\nu} = A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda_\nu.$$

Здесь запятой обозначается обычная частная производная, а точкой с запятой — ковариантная. Несложно проверить, что ковариантная производная удовлетворяет всем необходимым постулатам: она является линейной операцией, выполняется правило Лейбница для произведения векторов. По определению, ковариантная производная скаляра φ совпадает с обычной:

$$\varphi_{;\mu} = \varphi_{,\mu},$$

что естественно, поскольку скаляр не имеет индексов. Отсюда следует правило дифференцирования ковариантных векторов:

$$B_{\mu;\nu} = B_{\mu,nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} B_{\lambda}.$$

Параллельный перенос вектора A^{μ} вдоль направления dx^{λ} определяется равенством нулю ковариантного дифференциала вдоль этого направления:

$$DA^{\mu} = A^{\mu}_{;\lambda} dx^{\lambda} = 0.$$

Времениподобный 4-вектор скорости определяется соотношением

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau},$$

где $ds > 0$, τ — собственное время. Очевидно, что $u^{\mu} u_{\nu} = 1$. Это касательный вектор к траектории $x^{\mu}(\tau)$. Если этот касательный вектор переносится параллельно самому себе, то такая кривая называется геодезической — обобщение прямой линии. Уравнение геодезической, таким образом, имеет вид

$$Du^{\mu} = u^{\mu}_{;\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau = u^{\mu}_{;\nu} u^{\nu} d\tau = 0.$$

Здесь следует отметить, что метрика, т. е. метрический тензор $g_{\mu\nu}$, и связность $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$, вообще говоря, вводятся в дифференциальной геометрии независимо друг от друга. Но есть одна, выделенная, связность, которая, во-первых, симметрична по нижним индексам и в которой, во-вторых, метрический тензор ковариантно постоянен:

$$g_{\mu\nu;\lambda}(x) = 0.$$

Она называется метрической связностью, а её коэффициенты — коэффициентами Кристоффеля. Метрическая связность однозначно определяется метрическим тензором:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right).$$

В этом случае можно одновременно привести метрический тензор в данной точке к диагональному виду и сделать коэффициенты Кристоффеля равными нулю. То же самое справедливо и вдоль заданной кривой. Но поскольку связность не является тензором, это не является характеристикой пространства–времени, а только свойством специфической системы координат. Более того, это невозможно сделать в окрестности точки. Оказывается, если переместить вектор вдоль замкнутого контура, то результирующий вектор, вообще говоря, не совпадёт с начальным. Их разность, естественно, пропорциональна площади поверхности, натянутой на этот контур, и некоему тензору четвёртого ранга

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu},$$

который называется тензором кривизны Римана. Если этот тензор равен нулю, то пространство–время называется плоским, в противном случае — искривлённым. В литературе встречается и другое определение, отличающееся от приведённого знаком. Мы следуем Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу [9]. Из тензора кривизны сверткой верхнего и среднего из нижних индексов получается тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}$$

(опять же, мы следуем Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу — свёртка с последним индексом изменит знак). Свёртка тензора Риччи $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}$ называется скаляром кривизны.

В общей теории относительности постулируется метрическая связность. В этом случае тензор Риччи автоматически симметричен. Комбинация

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

носит имя тензора Эйнштейна, а его знаменитые уравнения имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материальных полей. Константа связи в правой части определяется требованием, чтобы вдали от источников, в пределе слабых полей, получалось уравнение Пуассона ньютоновой теории тяготения. Выбор именно такой комбинации геометрических тензоров вытекает из тождества Бьянки, которое после свёртки имеет вид

$$G^{\nu}_{\mu;\nu} = R^{\nu}_{\mu;\nu} - \frac{1}{2}R_{,\mu} = 0.$$

Следовательно, автоматически оказывается справедливым уравнение неразрывности для тензора энергии-импульса материи

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0, \tag{1}$$

аналогично тому, как уравнение неразрывности для электрического тока вытекает из уравнений Максвелла. Уравнение неразрывности (1) можно получить и независимо, как следствие общей ковариантности, т. е. инвариантности действия для материи относительно произвольных (достаточно гладких) преобразований координат.

3. О сферически-симметричной гравитации

3.1. Инварианты и глобальная структура. Метрика сферически-симметричного пространства–времени в неособой точке может быть всегда записана в виде (мы используем сигнатуру $(+\,-\,-\,-)$):

$$ds^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k - R^2(x)d\sigma^2 = Adt^2 + 2Hdtdq - Bdq^2 - R^2 d\sigma^2, \qquad (2)$$

где $d\sigma^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi$ — линейный элемент единичной 2-мерной сферы; R — радиус этой сферы, площадь которой равна $4\pi R^2$, а метрические коэффициенты A, H, B и радиус R — функции временной координаты t и пространственной координаты q. Для заданного многообразия радиус $R(t,q)$ является инвариантом, а коэффициенты A, H и B 2-мерного многообразия определены с точностью до произвольного преобразования

$$\tilde{t} = \tilde{t}(t,q), \quad \tilde{q} = \tilde{q}(t,q),$$

при котором сохраняется явная сферически симметричная форма метрики (2). Эта (т. н. калибровочная) свобода может быть использована для фиксирования системы координат, наиболее подходящей для решения конкретной задачи. Например, можно преобразовать линейный элемент к диагональному виду ($H=0$) и всё ещё иметь одну степень свободы. Другим важным примером являются дважды изотропные координаты (u,v), в которых $A=B=0$. Тогда линейный элемент (2) примет вид

$$ds^2 = 2H(u,v)dudv - R^2(u,v)d\sigma^2 = 0,$$

а единственный метрический коэффициент 2-мерного пространства–времени будет определён с точностью до замены $\tilde{u}=\tilde{u}(u)$, $\tilde{v}=\tilde{v}(v)$. Мы видим, что метрика сферически симметричного пространства–времени локально определяется фактически (с точностью до калибровочных преобразований) двумя функциями двух переменных. В качестве одной из них естественно выбрать инвариантную функцию — радиус R. Хотелось бы, чтобы и другая функция также была инвариантом калибровочных преобразований. Из чисто геометрических соображений можно предположить, что таким инвариантом может служить (лоренцев) квадрат нормали к поверхности $R=\text{const}$. т. е.

$$dR = (\partial_i R dx^i) = R_{,i}dx^i$$

— 2-мерный ковариантный вектор $R_{,i}$ $(i=0,1)$ нормали к поверхности $R = {}$ $= \text{const}$. Его лоренцев квадрат равен

$$\Delta = R_{,i}R_{,k}\gamma^{ik},$$

где γ^{ik} — тензор, обратный 2-мерному метрическому тензору γ_{ik}. В дважды изотропных координатах

$$\Delta = \frac{2}{H}R_{,u}R_{,v},$$

из чего ясно, что знание двух инвариантных функций R и Δ действительно определяет метрику (2) с точностью до калибровки.

Но это ещё не всё. Функция Δ является носителем нетривиальной качественной информации о структуре сферически симметричного пространства–времени. Действительно, в плоском пространстве–времени Минковского $\Delta \equiv 1$, следовательно, все поверхности $R = \mathrm{const}$ времениподобны, и радиус может быть выбран в качестве пространственной координаты $q = R$ на всём многообразии. В искривленном пространстве–времени Δ не является более постоянной величиной и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Область, в которой $\Delta < 0$, называется R-областью; в такой области радиус R, в принципе, может быть выбран в качестве пространственной координаты q. В той же области, в которой $\Delta > 0$, поверхности $R = \mathrm{const}$ пространственноподобны, и радиус может быть выбран в качестве временной координаты t. Такие области называются T-областями. Понятия R- и T-областей были введены И. Д. Новиковым [10]. Но и это ещё не всё. В диагональной системе координат

$$ds^2 = Adt^2 - Bdq^2 - R^2 d\sigma^2,$$

A и B — положительны, а

$$\Delta = \frac{1}{A}\dot{R}^2 - \frac{1}{B}R'^2,$$

где точка и штрих означают соответственно частные производные по t и q. В T-областях $\Delta > 0$, поэтому $\dot{R} \neq 0$, и производная по времени не может менять знак. Следовательно, в T-области или $\dot{R} > 0$ (такая область необратимого расширения называется T_+-областью), или $\dot{R} < 0$ (необратимое сжатие, T_--область). Аналогично, R-области делятся на два класса: для которых $R' > 0$ (R_+-области) и $R' < 0$ (R_--области). Эти R- и T-области отделены друг от друга поверхностями $\Delta = 0$, называющимися горизонтами видимости. Горизонты видимости могут быть как изотропными (в этом случае они совпадают с горизонтом событий), так и времениподобными или пространственноподобными поверхностями. Таким образом, искривленное пространство–время может иметь, в общем случае, довольно сложное строение и состоять из набора $R_\pm$- и $T_\pm$-областей, разделённых горизонтами видимости $\Delta = 0$.

3.2. Векторное уравнение. Оказывается, уравнения Эйнштейна для сферической симметрии можно переписать, используя только инварианты $R(t, q)$ и $\Delta(t, q)$. Запишем метрику в виде

$$ds^2 = \gamma_{AB} dx^A dx^B - R^2(x)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

где γ_{AB} — 2-мерный метрический тензор, $A, B = 0, 1$. Выпишем не равные нулю компоненты тензора Риччи:

$$R_A^B = \tilde{R}_A^B - 2\gamma^{BC}\frac{R_{|AC}}{R}, \quad R_2^2 = R_3^3 = -\frac{1}{R^2}\left(\gamma^{CD} R R_{|CD} + \Delta + 1\right).$$

Здесь $\tilde{R}_A^B$ — тензор Риччи 2-мерного псевдоевклидового могообразия с метрическим тензором γ_{AB} и обратным к нему γ^{CD}, вертикальная черта обозначает ковариантную производную с метрической связностью (напомним, что

$\gamma_{AB|C} = 0$), а запятая, как обычно, — частную производную. Выпишем тензор Эйнштейна:

$$G_A^B = -2\gamma^{BC}\frac{R_{|AC}}{R} + \delta_A^B\Big(2\gamma^{CD}\frac{R_{|CD}}{R} + \frac{\Delta+1}{R^2}\Big),$$
$$G_2^2 = G_3^3 = \gamma^{CD}\frac{R_{|CD}}{R} - \frac{1}{2}\tilde{R}.$$

Здесь мы учитываем, что 2-мерный тензор Эйнштейна тождественно равен нулю, а $\tilde{R}$ — 2-мерный скаляр кривизны. Составляя комбинацию

$$\delta_A^B G_C^C - G_A^B = 2\gamma^{BC}\frac{R_{|AC}}{R} + \frac{\Delta+1}{R^2}\delta_A^B$$

и замечая, что

$$\Delta,_A = 2\gamma^{DC}R,_D R_{|AC},$$

окончательно получаем векторное уравнение

$$\big(R(\Delta+1)\big),_A = 8\pi G R^2\left(T_C^C R,_A - T_A^B R,_B\right). \tag{3}$$

Третье уравнение для $A \neq B$, по существу, скалярное:

$$\gamma^{AC}R_{|CB} = -4\pi\, G\, R\, T_B^A\,.$$

Оно может быть получено также как условие интегрируемости для векторного уравнения с использованием тождеств Бианки (или уравнения неразрывности) и оставшегося $\binom{2}{2}$-скалярного уравнения Эйнштейна. Уравнение же неразрывности теперь принимает вид

$$T_{A|B}^B + 2\frac{R,_B}{R}T_A^B = 2\frac{R,_A}{R}T_2^2.$$

Эти уравнения были впервые получены в работе [11], затем обобщены на случай, когда размерность сферы произвольна [12] или вместо сферы рассматривается многомерное однородное и изотропное пространство [13].

3.3. Конформные диаграммы Картера—Пенроуза. Причинную структуру геодезически полного сферически симметричного пространства–времени лучше всего можно увидеть на конформных диаграммах Картера—Пенроуза, на которых каждая точка представляет собой сферу, а бесконечности перенесены на конечные расстояния. Так как любое 2-мерное пространство–время является (локально) конформно-плоским, то такая диаграмма есть набор диаграмм Картера—Пенроуза для 2-мерного многообразия Минковского. Чтобы понять, как это последнее построено, преобразуем сперва метрику Минковского

$$ds^2 = dt^2 - dx^2$$

к дважды световым координатам $u = t - x$ (запаздывающее время) и $v = t + x$ (опережающее время), тогда

$$ds^2 = dudv.$$

Условимся, что на диаграммах временная координата возрастает снизу вверх, пространственная — слева направо, а световые линии ($u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$) представлены прямыми с наклоном $\pm 45°$. Сделав ещё одно преобразование

$$u' = \operatorname{arctg} u, \quad v' = \operatorname{arctg} v, \qquad -\pi/2 \leqslant u' \leqslant \pi/2, \quad -\pi/2 \leqslant v' \leqslant \pi/2,$$

получаем

$$ds^2 = \Omega^2 ds'^2, \quad \Omega = \cos^{-1} u' \cos^{-1} v', \quad ds'^2 = du'dv' = dt'^2 - dx'^2.$$

Формально метрика ds'^2 точно такая же, как и первоначальная, но теперь координаты (u', v') и (t', x') пробегают конечные интервалы. Диаграмма Картера—Пенроуза для полного 2-мерного пространства–времени Минковского ($-\infty < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$) показана на рис. 1. Здесь $J^{\pm}$ ($J'^{\pm}$) — световые бесконечности будущего ($v'(u') = \pi/2$, $v(u) = \infty$) и прошлого ($u'(v') = -\pi/2$, $u(v) = -\infty$); $i_{\pm}$ — временные бесконечности будущего и прошлого ($t' = \pm\pi/2$), а i_0 (i'_0) — пространственные бесконечности ($x' = \pm\pi/2$, $x = \pm\infty$). Для 4-мерного пространства–времени Минковского эту конформную диаграмму следует разрезать пополам, т. к. вместо границ на ($-\infty$) появляется времениподобная граница при $x = 0$, изображённая на рис. 2. На рис. 1 и 2 времениподобные линии (поверхности) постоянного радиуса $x = \mathrm{const}$ показаны штриховой линией. В общем случае такой вид будут иметь те части полных конформных диаграмм, который соответствуют R-областям. В T-областях рисунок нужно повернуть на $90°$ вместе со штриховыми линиями, которые таким образом превратятся в пространственноподобные. Границами областей будут служить горизонты видимости (световые, времени- или пространственноподобные), а также бесконечности и сингулярности. Пространство–время, в котором все световые и времениподобные геодезические начинаются и заканчиваются либо на бесконечностях, либо на сингулярностях, называются геодезически полными.

4. Чёрная дыра Шварцшильда

4.1. Решение. Теперь у нас в руках есть всё, чтобы разобраться в геометрии Шварцшильда. Напомним, что по определению это — пространство–время вне «точечного» гравитирующего источника (почему кавычки, станет вскоре ясно).

Начнём с вычисления инварианта Δ. Так как тензор энергии-импульса, по условию, тождественно равен нулю, из векторного уравнения (3) сразу же получаем

$$\Delta = -1 + A/R,$$

где $R = R(t, q)$ — радиус, а A — постоянная интегрирования. Карл Шварцшильд выбрал радиус в качестве сферической пространственной координаты и ортогональную к нему временную координату. Мы поступим сейчас точно так же, помня однако, что это можно сделать только в R-областях. В таком случае из определения

$$\Delta = g^{00}\dot{R}^2 + g^{11}R'^2 = g^{11}$$

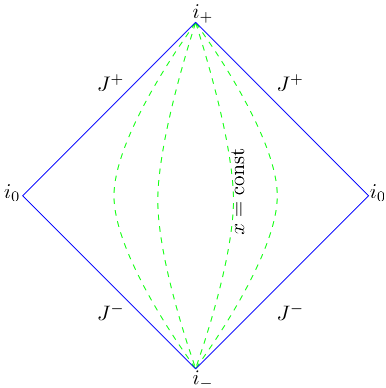

Рис. 1. Диаграмма Картера—Пенроуза для полного 2-мерного пространства–времени Минковского ($-\infty < t < \infty$, $-\infty < x < \infty$)

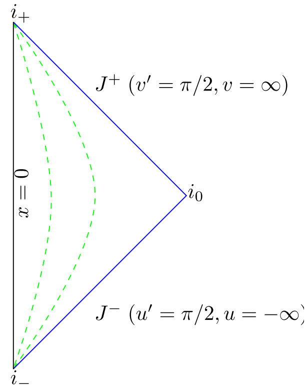

Рис. 2. Диаграмма Картера—Пенроуза для 4-мерного пространства–времени Минковского. На этой и всех последующих диаграммах время отсчитывается по вертикали, пространственная координата — по горизонтали

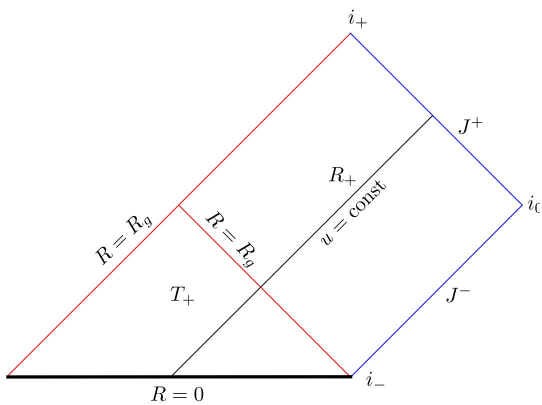

Рис. 3. Диаграмма Картера—Пенроуза для пространства–времени Шварцшильда, покрываемая запаздывающими координатами Финкельштейна

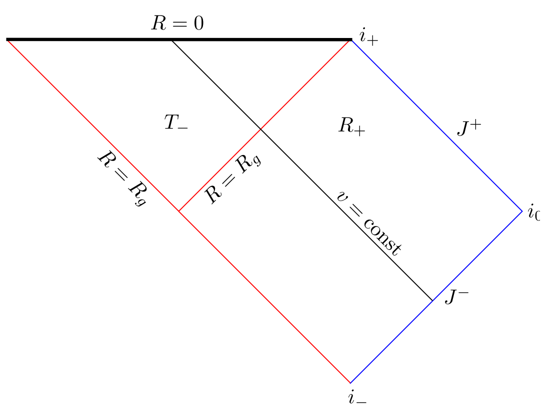

Рис. 4. Диаграмма Картера—Пенроуза для пространства–времени Шварцшильда, покрываемая опережающими координатами Финкельштейна

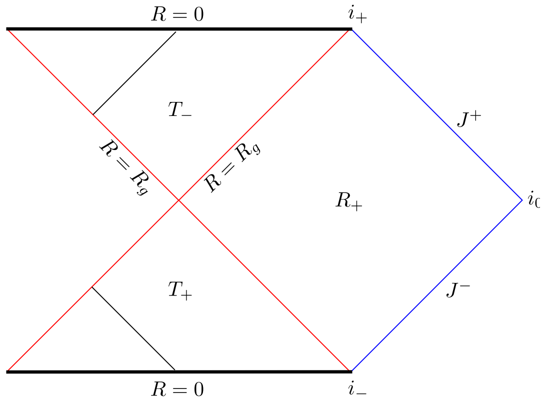

Рис. 5. Объединение диаграмм рис. 3 и рис. 4

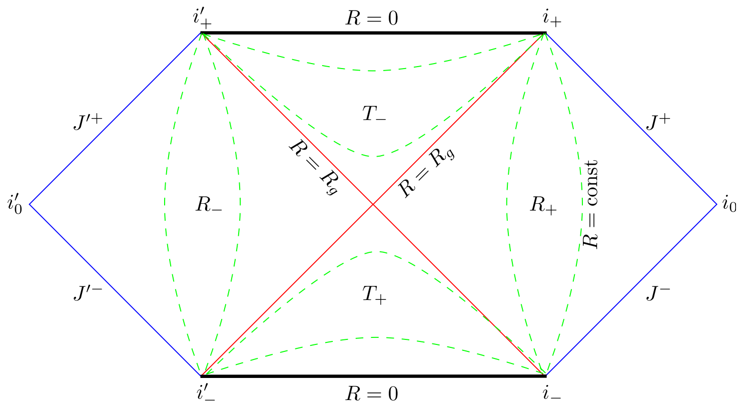

Рис. 6. Диаграмма Картера—Пенроуза полного пространства–времени Шварцшильда

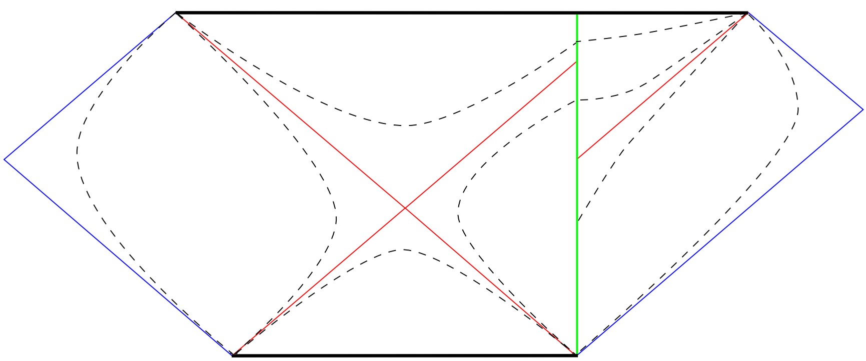

Рис. 7. Диаграмма Картера—Пенроуза для инфинитного движения оболочки: $\Delta m > 0 \Longrightarrow \sigma_{\rm in}(\infty) = \sigma_{\rm out}(\infty) = +1$

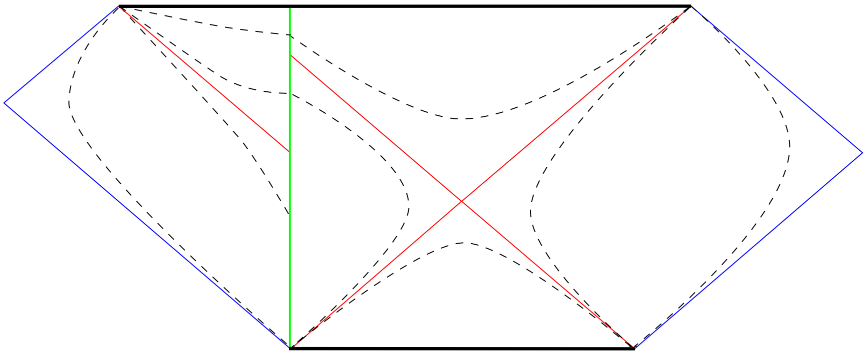

Рис. 8. Диаграмма Картера—Пенроуза для инфинитного движения оболочки: $\Delta m < 0 \Longrightarrow \sigma_{\text{in}}(\infty) = \sigma_{\text{out}}(\infty) = -1$

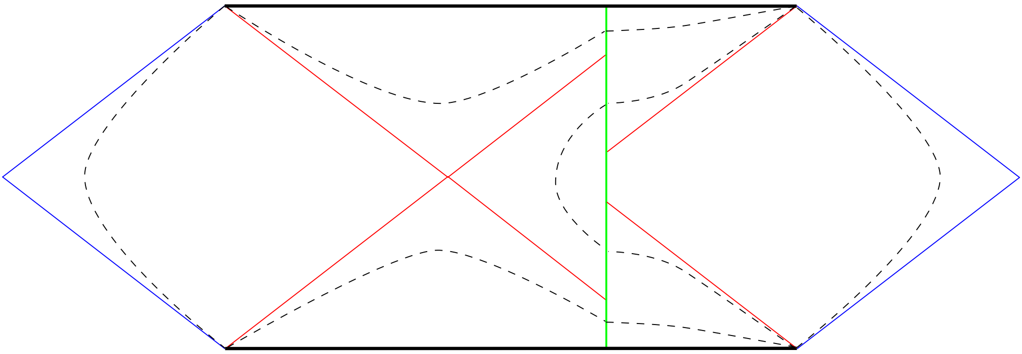

Рис. 9. Диаграмма Картера—Пенроуза для финитного движения оболочки с точкой поворота при $\rho = \rho_0$: $\Delta m > 0 \Longrightarrow \sigma_{\text{in}}(\rho_0) = +1$, $\sigma_{\text{out}}(\rho_0) = +1$

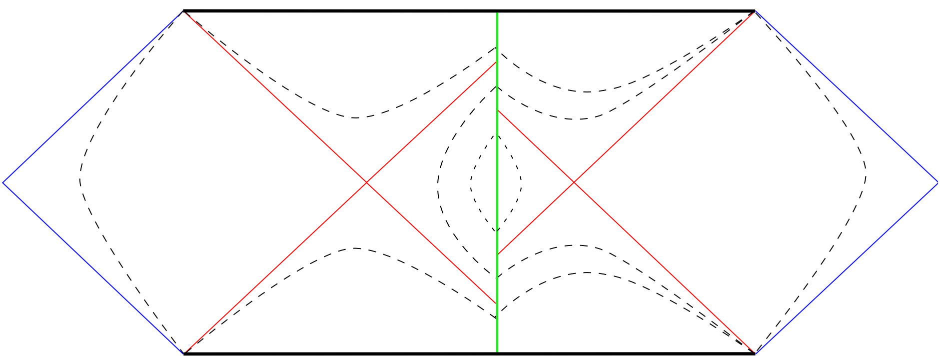

Рис. 10. Диаграмма Картера—Пенроуза для финитного движения оболочки с точкой поворота при $\rho = \rho_0$: $\Delta m > 0 \Longrightarrow \sigma_{\text{in}}(\rho_0) = +1$, $\sigma_{\text{out}}(\rho_0) = -1$

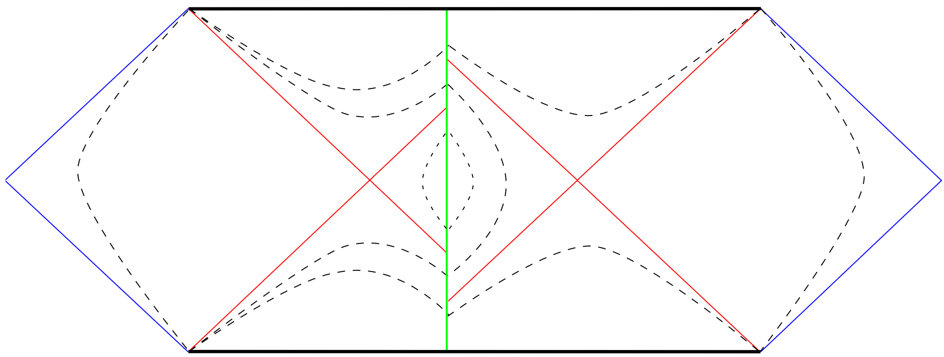

Рис. 11. Диаграмма Картера—Пенроуза для финитного движения оболочки с точкой поворота при $\rho = \rho_0$: $\Delta m < 0 \Longrightarrow \sigma_{\rm in}(\rho_0) = +1$, $\sigma_{\rm out}(\rho_0) = -1$

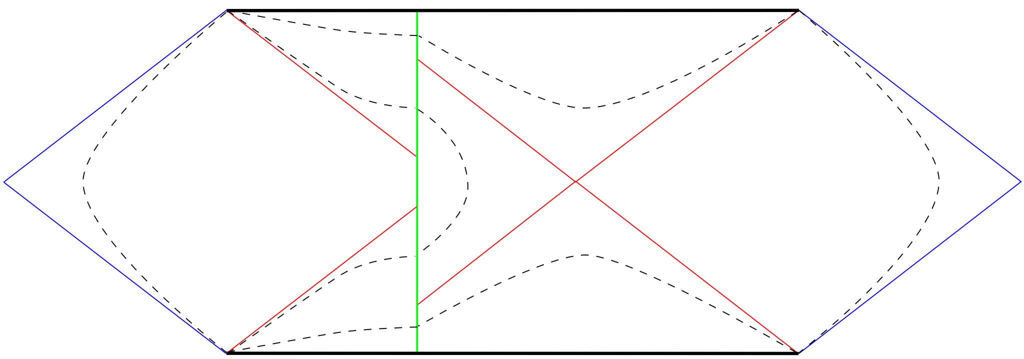

Рис. 12. Диаграмма Картера—Пенроуза для финитного движения оболочки с точкой поворота при $\rho = \rho_0$: $\Delta m < 0 \Longrightarrow \sigma_{\rm in}(\rho_0) = -1$, $\sigma_{\rm out}(\rho_0) = -1$

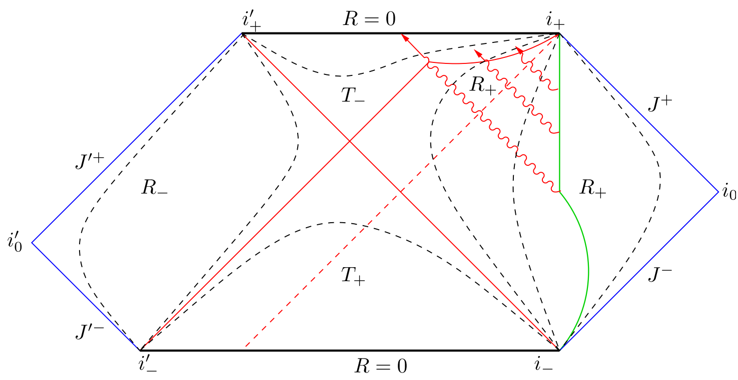

Рис. 13. Конформная диаграмма Картера—Пенроуза для рассматриваемого геодезически полного пространства–времени

сразу находим метрический коэффициент

$$g_{11} = 1/g^{11} = 1/\Delta.$$

Осталось найти компоненту g_{00}. Мы не будем заниматься её вычислением, скажем лишь, что, во-первых, в уравнения Эйнштейна при уже сделанных предположениях входят только производные ν' и ν'' по радиусу, откуда следует, что g_{00} определяется с точностью до произвольного множителя, зависящего только от времени, который может быть «поглощён» переопределением временной координаты. Это означает, что в R-области метрика автоматически статичная (у Шварцшильда это было предположением). Кроме того оказывается, что

$$g_{00} = -\Delta = 1 - A/r$$

(в дальнейшем для радиуса как координаты будем использовать строчную букву r), и мы воспроизводим знаменитую метрику:

$$ds^2 = (1 - A/r)\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - A/r} - r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2\right).$$

Прежде чем двигаться дальше, разберёмся с постоянной интегрирования.

4.2. Источник. Напомним, что в метрику Шварцшильда входит фактически только одна функция

$$F = -\Delta = 1 - A/r,$$

где A — постоянная интегрирования. Мы её записали в виде

$$A = \frac{2Gm}{c^2},$$

где G — гравитационная постоянная, c — скорость света, а m — некоторая величина размерности массы. Так эта постоянная была записана самим Шварцшильдом, причём «буква» m трактовалась как масса источника гравитационного поля. Откуда он это взял? Из анализа предельного перехода уравнений Эйнштейна к нерелятивистскому уравнению Пуассона (формально $c \to \infty$). Поскольку такое исследование уведёт нас далеко в сторону, мы вынуждены избрать другой путь, а именно сравнить лагранжианы для частицы в гравитационном поле в нерелятивистской и релятивистской (в соответствующем приближении) механике.

В нерелятивистской теории гравитации лагранжиан для частицы массы μ есть

$$L = T - U + \mathrm{const} = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} + \frac{Gm\mu}{r} + \mathrm{const}, \tag{5}$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергия частицы. В релятивистской же теории действие для частицы, как известно, есть

$$S = -\mu c \int ds = -\mu c \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} =$$

$$= -\mu c \int \sqrt{g_{00} c^2 dt^2 + 2 g_{0i} c dt dx^i + d\vec{x}^2} =$$

$$= -\mu c^2 \int \sqrt{g_{00} + 2 g_{0i} \frac{V^i}{c} + \frac{\vec{V}^2}{c^2}} dt,$$

где V^i — компоненты 3-мерной скорости частицы $\vec{V}$. Лагранжиан, следовательно, имеет вид

$$L = -\mu c^2 \sqrt{g_{00} + 2 g_{0i} \frac{V^i}{c} + \frac{\vec{V}^2}{c^2}}. \tag{6}$$

Далеко от источников ($r \to \infty$) метрика приближается к метрике плоского пространства–времени Минковского, т. е. $g_{00} \to 1$, $g_{0i} \to 0$, $g_{ii} \to -1$, и в нерелятивистском пределе ($V^2/c^2 \ll 1$) получаем

$$L \approx -\mu c^2 \sqrt{g_{00} - \frac{\vec{V}^2}{c^2}} \approx -\mu c^2 \Big(\sqrt{g_{00}} - \frac{\vec{V}^2}{2c^2} \Big).$$

Поскольку $g_{00} = 1 - \frac{A}{r}$, имеем

$$L \approx -\mu c^2 \Big(1 - \frac{A}{2r} - \frac{\vec{V}^2}{c^2} \Big) \approx -\mu c^2 + \frac{\mu c^2 A}{2r} + \frac{\mu \vec{V}^2}{2}.$$

Сравнивая с формулой (5), видим, что релятивистский лагранжиан (6) переходит в пределе в нерелятивистский лагранжиан (5), если в последнем мы положим произвольную константу равной $-\mu c^2$, а постоянную интегрирования A равной $2Gm/c^2$, где m — масса тяготеющего источника. Ясно теперь, что удалённый наблюдатель меряет гравитационную (= инертную) массу источника.

4.3. Глобальная геометрия и построение диаграммы Картера—Пенроуза. Выпишем ещё раз метрику Шварцшильда ($c = 1$):

$$ds^2 = \big(1 - 2Gm/r\big) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2Gm/r} - r^2 d\sigma^2. \tag{7}$$

Эта метрика описывает искривлённое пространство–время, что видно хотя бы из того, что расстояние между двумя точками по радиусу больше разности двух радиусов:

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - 2Gm/r}}; \quad \Delta l = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - 2Gm/r}} > \Delta r = r_1 - r_2.$$

Посмотрим, сколько времени по часам удалённого наблюдателя понадобится свету на путешествие:

$$ds^2 = 0; \quad dt = \frac{dr}{1 - 2Gm/r},$$

$$T_{12} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{r\, dr}{r - 2Gm} = r_1 - r_2 + 2Gm \ln \frac{r_1 - 2Gm}{r_2 - 2Gm}.$$

При $r_2 \to r_g$ эта величина расходится. Это означает, что даже свету, летящему с максимально возможной скоростью, необходимо бесконечное время для достижения радиуса Шварцшильда.

Казалось бы, всё прекрасно! Звезда, коллапсируя, как бы застывает у гравитационного радиуса. И все проблемы решены. Однако …! Оказалось, что свободно падающий наблюдатель достигает сферы Шварцшильда за конечное собственное время. Следовательно, многообразие, покрываемое метрикой (7), не является геодезически полным. Эта часть пространства–времени есть R-область, ограниченная горизонтами видимости $\Delta = 0$ при $R = r_g = 2Gm$. Поскольку этот инвариант в нашем случае зависит только от радиуса, его горизонты видимости — светоподобные. Действительно,

$$g^{AB}\Delta,_A\Delta,_B = \left(\frac{d\Delta}{dR}\right)^2 g^{AB}R,_AR,_B = \left(\frac{d\Delta}{dR}\right)^2 \Delta = 0.$$

Чтобы понять, как выглядит «кусок» конформной диаграммы Картера—Пенроуза, представляющий эту R-область, введём, следуя Финкельштейну [14], «черепашью» координату $r^\star$ следующим образом. Приведём 2-мерную часть метрики Шварцшильда к конформно-плоскому виду:

$$ds_2^2 = (1 - r_g/r)\left(dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)^2}\right) = (1 - r_g/r)\left(dt^2 - dr^{\star 2}\right),$$

где

$$dr^\star = \pm\frac{dr}{1 - r_g/r}, \quad r^\star = \pm r_g\left(r/r_g + \ln|r/r_g - 1|\right).$$

В R_+-области, очевидно, нужно выбирать знак «+», а в R_- — знак «−». Горизонтам видимости соответствует значение $r^\star = -\infty$. Следовательно, в конформно-плоском двухмерном пространстве–времени, представляющем R-область многообразия Шварцшильда, $-\infty < t < +\infty$, $-\infty < r^\star < +\infty$, т. е. это в точности диаграмма, изображенная на рис. 1. Световые геодезические на диаграмме — прямые линии, идущие под углами $\pm 45°$. Одни из них идут от горизонта прошлого до световой бесконечности будущего, но откуда они выходят? Другие — от световой бесконечности прошлого до горизонта будущего, но куда они входят? Чтобы в этом разобраться, удобно ввести запаздывающие и опережающие координаты Финкельштейна.

Запаздывающие координаты Финкельштейна — это запаздывающее время u и радиус r, где

$$u = t - r^\star, \quad dr^\star = \pm\frac{dr}{1 - r_g/r}.$$

Метрика Шварцшильда (её 2-мерная часть) в таких координатах принимает вид

$$ds_2^2 = (1 - r_g/r)\,du^2 + 2du dr. \tag{8}$$

Запаздывающие геодезические $u = \mathrm{const}$ — прямые с наклоном $+45°$, а другая конгруэнция световых геодезических, как следует из вида метрики, определяется уравнением $u + 2r^\star = \mathrm{const}$. Теперь очевидно, что в R_+-области (знак «+» в определении «черепашьей» координаты) параметр u для запаздывающих световых геодезических изменяется от $-\infty$ на световой бесконечности прошлого до $+\infty$ на (световом) горизонте видимости будущего. Мы видим, что в этих координатах в метрике (8) на радиусе Шварцшильда нет никаких сингулярностей или вырожденности, поэтому мы можем безопасно продлить её в T-область. Какую? Идя из R_+-области назад по времени вдоль запаздывающих световых линий $u = \mathrm{const}$, мы неизбежно придём в T_+-область, поскольку это расширяющаяся конгруэнция. Естественно, в T-областях поверхности постоянного радиуса (и, следовательно, постоянной «черепашьей» координаты) являются пространственноподобными, поэтому в определении запаздывающей координаты u следует во избежание недоразумений заменить t на радиальную координату q, а поскольку

$$\frac{dr}{dr^\star} = \pm\left(1 - r_g/r\right),$$

в T_+-области следует выбрать знак «$-$», поэтому «черепашья» координата изменяется от $r^\star = 0$ при $r = 0$ до $+\infty$ на горизонте видимости прошлого ($q = +\infty$, $r^\star = +\infty$, $u = q - r^\star = \mathrm{const}$). Так как T_+-область в нашем случае имеет естественную пространственноподобную границу $r = r^\star = 0$, соответствующая конформная диаграмма представляет собой прямоугольный треугольник, изображённый на рис. 2, но повернутый так, чтобы гипотенуза оказалась внизу в прошлом (напомним, что, как мы условились, временная координата увеличивается снизу вверх), катетами же являются части горизонтов прошлого и будущего, пересекающиеся в так называемой точке бифуркации. Объединяя вместе R_+- и T_+-области, получаем часть диаграммы Картера—Пенроуза, покрываемую запаздывающими координатами Финкельштейна при указанном выше выборе знаков для «черепашьей» координаты. Она изображена на рис. 3. Аналогичным образом вводятся опережающие координаты Финкельштейна v и r:

$$v = t + r^\star, \quad dr^\star = \pm\frac{dr}{1 - r_g/r},$$

в которых метрика Шварцшильда принимает вид

$$ds_2^2 = \left(1 - r_g/r\right) dv^2 - 2dvdr. \tag{9}$$

Световые геодезические $v = \mathrm{const} = u + 2r^\star$ — прямые с наклоном -45°, при этом параметр v изменяется от $-\infty$ на горизонте видимости прошлого до $+\infty$ на световой бесконечности будущего, а сама сжимающаяся (сходящаяся) конгруэнция начинается на световой бесконечности прошлого ($t = -\infty$, $r^\star = +\infty$, $v = \mathrm{const}$), пересекает горизонт видимости будущего ($t = +\infty$, $r^\star = -\infty$, $v = \mathrm{const}$) и входит в T_--область, куда метрика (9) свободно продолжаема. В T_--области мы, естественно, должны сделать уже знакомую замену $t \to q$ и выбрать знак «$-$» в определении «черепашьей» координаты. Часть диаграммы Картера—Пенроуза, покрываемая опережающими координатами Финкельштейна, показана на рис. 4. Объединяя диаграммы, получаем рис. 5.

Но получившееся многообразие всё ещё не геодезически полное. Дело в том, что в T_+-области помимо световых геодезических $u = \mathrm{const}$ существует и вторая, уже упомянутая, конгруэнция $v = u + 2r^\star = \mathrm{const}$. На конформной диаграмме это световые линии, идущие от поверхности $r = 0$ прошлого справа налево под углом $-45°$. Они «утыкаются» в горизонт видимости будущего и, очевидно, могут быть продолжены далее. Куда? Аналогично в T_--области кроме рассмотренных световых геодезических $v = \mathrm{const}$ существуют и световые геодезические $u = v - 2r^\star = \mathrm{const}$. Они исходят из горизонта видимости прошлого и «утыкаются» в поверхность $r = 0$ будущего. Откуда они идут? Из непрерывности инварианта Δ следует, что должна быть R-область, изометричная R_+-области, с которой мы начинали (изометричность является следствием теоремы Биркгоффа [15]). Поскольку, по нашему построению, она находится слева от T-областей, т. е. световые бесконечности прошлого и будущего находятся слева от горизонтов видимости, радиусы уменьшаются слева направо, и это есть R_--область. Отличие координат Финкельштейна от данных прежде всего для R_+-области лишь в том, что в определении «черепашьей» координаты $r^\star$ мы должны сменить знак «+» на «−». Полная конформная диаграмма Картера—Пенроуза изображена на рис. 6. Получившееся многообразие действительно геодезически полное, поскольку его границами, помимо бесконечностей, являются две пространственноподобные сингулярные поверхности $r = 0$ в прошлом и будущем. Сингулярные они потому, что здесь тензор кривизны Римана становится бесконечным. Физически это означает, что вблизи поверхностей нулевого радиуса приливные силы растут неограниченно, разрывая все живое и неживое.

Следует объяснить, наконец, цветность различных линий на наших диаграммах Картера—Пенроуза. Чёрный цвет сингулярностей очевиден — это конец и беспросветная тьма. Красный цвет горизонтов — опасность: проход (и проезд, и пролёт) возможен только в одном направлении, безвозвратно. Синий цвет для бесконечностей выбран потому, что голубая мечта всегда бесконечно далека.

4.4. О причинной структуре многообразия Шварцшильда. Пространство–время, изображённое на предыдущей диаграмме Картера—Пенроуза (см. рис. 6), называется вечной чёрной дырой. Во введении утверждалось, что чёрная дыра — часть пространства–времени под горизонтом событий. А горизонт событий определялся как световая гиперповерхность, разделяющая области, откуда свет может достичь бесконечности, и те, откуда это сделать невозможно. В таком определении заложено глобальное свойство: для нахождения горизонта событий нужно знать всю историю — и прошлую, и будущую. Горизонт же видимости определен локально — равенством нулю инварианта Δ. Но в нашем случае горизонт видимости — световая гиперповерхность, и, как ясно видно на полной конформной диаграмме (рис. 6), он совпадает с горизонтом событий.

Для реальной чёрной дыры, образовавшейся в результате гравитационного коллапса, картина будет несколько иной. Где-то в R_+-области будет проходить граница коллапсирующего вещества, которая затем пересекает горизонт и уходит в T_--область, образуя снаружи чёрную дыру. Значит, слева (на диаграмме) от этой границы диаграмма Картера—Пенроуза изменится. А что служит источником тяготения (и искривления пространства–времени) для вечной чёрной дыры? Очевидно, сингулярность $R = 0$. Но это очень странный источник. Мы привыкли, что тяготеющая материальная точка «стоит на месте», т. е. имеет времениподобную мировую линию. Здесь же есть две пространственноподобные поверхности $R = 0$ в прошлом и будущем. При выборе радиуса в качестве временной координаты получается, что источник существовал в прошлом только одно мгновение, затем исчез и возродился, как Феникс, в сингулярности будущего. Поскольку в T-областях пространство–время существенно нестатично, возможны процессы рождения вещества, т. е. ситуация неустойчива. Неустойчивости в T_--области необратимого сжатия нас волнуют мало, поскольку, как хорошо видно на диаграмме (рис. 6), любая информация остаётся там, исчезая в конце концов в сингулярности будущего и не попадая ни в R_-, ни в R_+-области (принцип причинности). Именно поэтому T_--область называется чёрной дырой. Этот термин был придуман Джоном Арчибальдом Уилером [16–18]. В T_+-области ситуация совершенно другая. Как видно из диаграммы, народившееся вещество может выходить как в R_-, так и в R_+-область. В R_+-области (где есть наблюдатели) это будет выглядеть как яркая вспышка. Именно поэтому T_+-область была названа белой дырой. Та часть вещества, что ушла в R_--область (навсегда!), образует т. н. полузамкнутый мир, который проявляет себя во внешней R_+-области только как гравитирующая масса в пустом пространстве с дыркой в виде сферы гравитационного радиуса R_g.

Мы уже упоминали, что точки в R_+ и в R_--областях причинно никак не связаны, интервал между ними пространственноподобен, а соединены они только по сфере Шварцшильда, которая является световой гиперповерхностью. Наиболее узкая часть на этой диаграмме называется также горловиной, а сама геометрия — мостом Эйнштейна—Розена [19] или же непроходимой кротовой норой. Вот такой своеобразной причинной структурой обладает полное пространство–время Шварцшильда.

5. Тонкие оболочки

5.1. Уравнения Израэля. Этот пункт посвящён изложению формализма тонких оболочек в общей теории относительности. Формализм был детально разработан В. Израэлем в работах [20–22].

Рассмотрим d-мерное пространство–время $\mathcal{M}$, разделённое на две части $\mathcal{M}_-$ и $\mathcal{M}_+$ гиперповерхностью Σ.

Гиперповерхность Σ называется сингулярной оболочкой, если тензор энергии-импульса на этой гиперповерхности имеет вид

$$T_i^k = S_i^k \delta(\Sigma) + \ldots .$$

Здесь S_i^k — поверхностный тензор энергии-импульса оболочки, не равный нулю; $i, k = 0, 2, \ldots, d-2$. В противном случае оболочка называется несингулярной.

Для вывода уравнений движения в случае сингулярной оболочки необходимо прежде всего построить метрику на $\mathcal{M}$, которая будет непрерывной при пересечении Σ. Пусть уравнение гиперповерхности в некоторых координатах y^+ в $\mathcal{M}_+$ имеет вид $F^+(y^+) = 0$ и, соответственно, в области $\mathcal{M}_-$ — $F^-(y^-) = 0$. Тогда, используя свободу в выборе координат, выберем метрики в $\mathcal{M}_-$ и $\mathcal{M}_+$:

$$ds^2 = \varepsilon dn^{+2} + \gamma_{ij}^+(x^+, n^+) dx^{+i} dx^{+j},$$
$$ds^2 = \varepsilon dn^{-2} + \gamma_{ij}^-(x^-, n^-) dx^{-i} dx^{-j}.$$

Здесь

$$\varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{если } \Sigma \text{ — пространственноподобна;} \\ +1, & \text{если } \Sigma \text{ — времениподобна.} \end{cases}$$

В новых координатах $(n^{\pm}, x^{\pm})$ поверхности $F^{\pm}(y^{\pm}) = 0$ совпадают с поверхностями $n^{+} = n^{-} = 0$. Условием непрерывности метрики в $\mathcal{M}$ является существование координатного преобразования $x^{+} = x^{+}(x^{-})$ такого, что

$$\gamma^{+}_{ij}(x^{+}, 0) = \gamma^{+}_{kl}(x^{-}, 0)\frac{\partial x^{-k}}{\partial x^{+j}}\frac{\partial x^{-l}}{\partial x^{+i}}.$$

Заметим, что $\gamma_{kl}(x^{-}, 0)$ является $(n-1)$-мерным тензором. Таким образом, можно выбрать общую метрику на $\mathcal{M}$ в виде

$$ds^2 = \varepsilon dn^2 + \gamma_{ij}(x, n)dx^i dx^j. \tag{10}$$

Эта метрика, однако, не является гладкой — её первые производные по координате n могут испытывать скачок. Так как метрика (10) задаёт нормальное расслоение многообразия $\mathcal{M}$, можно применить формулы Гаусса—Кодацци и выразить уравнения Эйнштейна через тензор внешней кривизны K_{ij} и скалярную кривизну $(d-1)$-мерного нормального сечения ${}^{(d-1)}R$. Тогда компоненты $\binom{i}{n}$ и $\binom{n}{n}$ запишутся в виде

$$G^n_i = K^j_{i\,|j} - K^l_{l\,|i} = 8\pi G T^n_i, \tag{11}$$

$$G^n_n = -\frac{1}{2}{}^{(d-1)}R\varepsilon + \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}K)^2 - \mathrm{Tr}K^2) = 8\pi G T^n_n, \tag{12}$$

$$G^j_i = {}^{(d-1)}G^j_i + \varepsilon(K^j_i - \delta^j_i \mathrm{Tr}K)_{,n} - \varepsilon(\mathrm{Tr}K)K^j_i + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^j_i\{(\mathrm{Tr}K)^2 + \mathrm{Tr}K^2\} = 8\pi G T^j_i. \tag{13}$$

Здесь $|$ обозначает ковариантную производную относительно метрики $(d-1)$-мерного нормального сечения. В гауссовых координатах

$$K^j_i \equiv \Gamma^j_{in} = -\frac{1}{2}\gamma^{jk}\gamma_{ki},_n,$$

и в случае разрыва первых производных второе слагаемое в (13) будет содержать δ-функцию. Интегрируя уравнение (13) по n

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-\delta}^{\delta} G^j_i dn\right] = 8\pi G \lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-\delta}^{\delta} T^j_i dn\right],$$

получаем уравнение движения для оболочки

$$\varepsilon([K^j_i] - \delta^j_i[K^l_l]) = 8\pi G S^j_i, \tag{14}$$

где $[K^j_i] \equiv K^{j+}_i - K^{j-}_i$ — скачок тензора внешней кривизны.

Используя теперь (14), из (12) и (11) получаем

$$S^j_{i\,|j} + [T^n_i] = 0, \tag{15}$$

$$\{K^j_i\}S^i_j + [T^n_n] = 0, \tag{16}$$

где

$$\{K^j_i\} \equiv \frac{1}{2}(K^{j\,+}_i + K^{j\,-}_i).$$

Уравнения (15) и (16) являются уравнениями неразрывности тензора энергии-импульса для оболочки.

Вышеприведённый вывод уравнений Израэля существенно опирается на тот факт, что рассматриваемая оболочка Σ является сингулярной.

Однако уравнения Израэля можно получить как следствие уравнений Эйнштейна, записанных с учётом введённого разложения многообразия $\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}_+$, $\mathcal{M}_-$ и Σ. Тогда дополнительно к уравнениям Израэля появятся уравнения, которые справедливы всюду на пространстве–времени. Тензор энергии-импульса при таком разложении можно представить в виде

$$T_{\mu\nu}(n,x) = S_{\mu\nu}(n,x)\delta(n) + E_{\mu\nu}(n,x)\theta(n) + \tilde{T}^-{}_{\mu\nu}(n,x), \tag{17}$$

где

$$[\tilde{T}_{\mu\nu}]|_{n=0} = 0, \quad \tilde{T}^+{}_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} + \tilde{T}^-{}_{\mu\nu}.$$

Запишем теперь тензор внешней кривизны как пару $(K_+,\ K_-)$, где $K_\pm$ соответствуют внешней кривизне Σ относительно областей $\mathcal{M}_\pm$:

$$K_{ij}{}^+ = \{K_{ij}\} + \frac{1}{2}[K_{ij}], \quad K_{ij}{}^- = \{K_{ij}\} - \frac{1}{2}[K_{ij}].$$

Как было показано, в случае сингулярной оболочки метрический тензор разрывен на оболочке и, следовательно, скачок внешней кривизны $[K_{ij}] \neq 0$. В случае несингулярной оболочки $S_{\mu\nu} = 0$, а значит $[K_{ij}] = 0$. Однако производная тензора внешней кривизны вдоль нормали может иметь скачок $[K_{ij}]_{,n} \neq 0$. В этом случае мы имеем дело с ударными волнами.

Учитывая это замечание, можно записать тензор внешней кривизны и его производную вдоль нормали в следующем виде:

$$K_{ij}(n,x) = [K_{ij}(n,x)]\theta(n) + K^-{}_{ij}(n,x), \tag{18}$$

$$K_{ij}(n,x)_{,n} = [K_{ij}(n,x)]\delta(n) + [K_{ij}(n,x)]_{,n}\theta(n) + K^-{}_{ij}(n,x).$$

Заметим, что функции $K^-{}_{ij}$ рассматриваются как непрерывные функции при $-\infty < n < +\infty$. Подставив записанные таким образом уравнения кривизны в левую часть уравнения Эйнштейна и приравнивая коэффициенты при δ-функциях, получим уравнения Израэля.

Более подробно выпишем компоненты тензора Эйнштейна, используя (18):

$$G_{nn} = (-[K^j_i]\{K^i_j\} + [\mathrm{Tr}K]\{\mathrm{Tr}K\})\theta(n) - K^{-\,j}_{\ \ i}K^{-\,i}_{\ \ j} - (\mathrm{Tr}K^-)^2 - \frac{1}{2}{}^{(d-1)}R\varepsilon,$$

$$G_{ni} = (-[K^l_{i|l}] + \mathrm{Tr}K_{|i})\theta(n) + (-K^{-\,l}_{\ \ i|l} + \mathrm{Tr}K^-{}_{|i}) =$$

$$= 8\pi G\varepsilon S^l_{i|l}\theta(n) + (-K^{-l}_{\ \ i|l} + \mathrm{Tr}K^{-}{}_{|i}),$$

$$\begin{aligned}
G_{ij} = \varepsilon([K_{ij}] - \gamma_{ij}[\mathrm{Tr}K])\delta(n) + \varepsilon([K_{ij},_n] - \gamma_{ij}[\mathrm{Tr}K,_n])\theta(n) +\\
+8\pi G\Big(2S^l_i\{K_{lj}\} + 2S^l_j\{K_{li}\} - \frac{3}{d-2}\mathrm{Tr}S\{K_{ij}\} - S_{ij}\{\mathrm{Tr}K\}\Big)\theta(n) +\\
+8\pi G\Big(\gamma_{ij}S^l_m\{K^m_l\} - \frac{1}{d-2}\gamma_{ij}\mathrm{Tr}S\{\mathrm{Tr}K\}\Big)\theta(n) +\\
+\varepsilon(K^{-}_{ij},_n - \gamma_{ij}\mathrm{Tr}K^{-},_n + 2K^{-}{}_{il}K^{-l}_{\ \ j} - K^{-}{}_{ij}\mathrm{Tr}K^{-}) +\\
+\frac{1}{2}\varepsilon\gamma_{ij}(K^{+l}_{\ \ m}K^{-m}_{\ \ l} + \mathrm{Tr}K^{-2}) + {}^{(d-1)}G_{ij}.
\end{aligned}$$

Приравнивая эти компоненты соответствующим компонентам тензора энергии-импульса (17), получаем

$$\begin{aligned}
\{K^j_i\}S^i_j + [T^n_n] = 0,\\
-K^{-j}_{\ \ i}K^{-i}_{\ \ j} - (\mathrm{Tr}K^{-})^2 - \frac{1}{2}{}^{(d-1)}R\varepsilon = 8\pi G\tilde{T}_{nn};
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
S^j_{i\ |j} + [T^n_i] = 0,\\
-K^{-l}_{\ \ i|l} + \mathrm{Tr}K^{-}{}_{|i} = 8\pi G\tilde{T}_{ni};
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon([K^j_i] - \delta^j_i[K^l_l]) = 8\pi G S^j_i,\\
2S^l_i\{K_{lj}\} + 2S^l_j\{K_{li}\} - \frac{3}{d-2}\mathrm{Tr}S\{K_{ij}\} - S_{ij}\{\mathrm{Tr}K\} +\\
+\gamma_{ij}S^l_m\{K^m_l\} - \frac{1}{d-2}\gamma_{ij}\mathrm{Tr}S\{\mathrm{Tr}K\} = [T_{ij}],\\
\varepsilon\Big(K^{-}{}_{ij},_n - \gamma_{ij}\mathrm{Tr}K^{-},_n + 2K^{-}{}_{il}K^{-l}_{\ \ j} - K^{-}{}_{ij}\mathrm{Tr}K^{-} +\\
+\frac{1}{2}\gamma_{ij}(K^{+l}_{\ \ m}K^{-m}_{\ \ l} + \mathrm{Tr}K^{-2})\Big) + {}^{(d-1)}G_{ij} = 8\pi G\tilde{T}_{ij}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Как можно видеть, первые строки (19), (20), (21) — в точности уравнения Израэля. Они нетривиальны в случае сингулярной оболочки. Оставшиеся шесть уравнений нетривиальны на всём пространстве–времени. В случае отсутствия сингулярных оболочек и ударных волн в пространстве–времени эти уравнения, как легко видеть, есть просто «$(d+1)$-разложение» уравнений Эйнштейна.

5.2. Сферически-симметричные тонкие оболочки. В дальнейшем мы будем иметь дело со сферически-симметричными времениподобными оболочками в «нашем» 4-мерном пространстве–времени. Поэтому изучим подробно именно этот случай, теория которого была развита в работе [11].

Метрику сферически симметричного пространства–времени запишем сразу в диагональном виде:

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\lambda}dq^2 - r^2(t,q)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

В гауссовой нормальной системе координат, связанной с оболочкой, $e^{\lambda} = 1$, $q = n$, и мы введём собственное время τ наблюдателя, сидящего на оболочке при $n = 0$: $d\tau = e^{\frac{\nu}{2}(t,0)}dt$. Обозначим $\rho(\tau) = R(t,0)$, тогда инвариант

$$\Delta = \dot{\rho}^2 - \rho_n^2,$$

где точка означает дифференцирование по собственному времени τ, а нижний индекс n — дифференцирование вдоль нормали к оболочке. В силу сферической симметрии и диагональности метрики поверхностный тензор энергии-импульса оболочки имеет очень простую структуру:

$$S_i^j = \mathrm{diag}\left(S_0^0,\, S_2^2,\, S_2^2\right).$$

Так же выглядит и тензор внешней кривизны K_i^j. Поэтому из всех уравнений сшивки остаются два уравнения Израэля и уравнение неразрывности, которые теперь принимают вид

$$\begin{gathered}
[K_2^2] = 4\pi G S_0^0,\\
[K_0^0] + [K_2^2] = 8\pi G S_2^2,\\
\{K_0^0\}S_0^0 + (d-2)\{K_2^2\}S_2^2 + [T_n^n] = 0,\\
\dot{S}_0^0 + 2\frac{\dot{\rho}}{\rho}(S_0^0 - S_2^2) + [T_0^n] = 0,
\end{gathered}$$

причём уравнение неразрывности является дифференциальным следствием уравнений Израэля и уравнений Эйнштейна на оболочке. Нетрудно видеть, что $K_2^2 = -\rho_{,n}/\rho$; $K_0^0 = -\nu_{,n}/2$. Вспоминая теперь, как выглядит инвариант Δ, получаем

$$\rho_n = \pm\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta} = \sigma\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}.$$

Здесь появилась знаковая функция $\sigma = \pm 1$, которая определяет, возрастают ли радиусы в направлении внешней нормали или же убывают. Мы уже знаем, что в R-областях знак пространственной производной от радиуса не может меняться. Отсюда следует, что σ определяет, в какой из них движется оболочка: если в R_+, то $\sigma = +1$, если же в R_-, то $\sigma = -1$. Вообще говоря, σ не является интегралом движения и может меняться в T-областях. Поскольку мы будем рассматривать оболочки, внутри которых вакуум, т. е. метрики Шварцшильда с разными массами, то знаки σ_{in} внутри и σ_{out} снаружи определяют, как именно соединяются две геометрии вдоль оболочки, с какой стороны соответствующего моста Эйнштейна—Розена, т. е. они полностью определяют глобальную геометрии полного многообразия. В простейшем случае, когда внутри плоское пространство–время Минковского, $\sigma_{\text{in}} = +1$, а знак σ_{out} определяет тип оболочки: имеем ли мы дело с чёрной дырой, если $\sigma_{\text{out}} = +1$, или же с кротовой норой (полузамкнутым миром), если $\sigma_{\text{out}} = -1$.

Приступим к вычислению скачков тензора внешней кривизны на оболочке. Поскольку локально геометрия сферически-симметричного многообразия полностью определяется двумя инвариантными функциями $R(t,q)$ и $\Delta(t,q)$, ясно, что результат будет зависеть от значений $\rho(\tau)$ и $\Delta(\tau)$ и их производных на оболочке. Для скачка $\left[K_2^2\right]$ очевидно

$$\left[K_2^2\right] = -\left[\frac{\sigma}{\rho}\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}\right].$$

Скачок $\left[K_0^0\right]$ также можно вычислить «в лоб», но «мы пойдём другим путём» и используем первое из уравнений Израэля, уравнение неразрывности для оболочки и уравнения Эйнштейна в векторном виде, полученные в предыдущем разделе. Итак,

$$-\left[\sigma\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}\right] = 4\pi G\rho S_0^0,$$

$$\dot{S}_0^0 + \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\left(S_0^0 - S_2^2\right) + [T_0^n] = 0,$$

$$\big(\rho\,(1+\Delta)\big)_{,i} = 8\pi G\rho^2\big(T\rho_{,i} - T_i^k\rho_{,k}\big).$$

Положим в последнем из этих уравнений $i = 0$, тогда

$$\dot{\rho}(1+\Delta) + \rho\dot{\Delta} = 8\pi G\rho^2\left(T_n^n\dot{\rho} - T_0^n\rho_n\right).$$

Продифференцируем теперь первое уравнение по собственному времени:

$$-\left[\frac{\sigma}{2\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}}(2\ddot{\rho} - \dot{\Delta})\right] = 4\pi G\dot{\rho}S_0^0 + 4\pi G\rho\dot{S}_0^0$$

и подставим $\dot{S}_0^0$ из уравнения неразрывности:

$$\left[\frac{\sigma}{2\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}}(2\ddot{\rho} - \dot{\Delta})\right] = 4\pi G(2S_2^2 - S_0^0)\dot{\rho} + 4\pi G\rho\,[T_0^n]\,.$$

Теперь остаётся подставить сюда $\dot{\Delta}$ из уравнений Эйнштейна и разделить все на $\dot{\rho}$. В результате получаем

$$-\left[\frac{\sigma}{2\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}}\left(\ddot{\rho} + \frac{1+\Delta}{2\rho} - 4\pi G\rho T_n^n\right)\right] = 4\pi G\left(2S_2^2 - S_0^0\right).$$

Итак, система уравнений Израэля для сшивки геометрий внутри и снаружи, определяющих эволюцию оболочки, плюс их дифференциальное следствие (уравнение неразрывности для поверхностного тензора энергии-импульса) имеют следующий вид:

$$-\left[\sigma\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}\right] = 4\pi G\rho S_0^0,$$

$$-\left[\frac{\sigma}{\sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta}}\left(\ddot{\rho} + \frac{1+\Delta}{2\rho} - 4\pi G\rho T_n^n\right)\right] = 4\pi G\left(2S_2^2 - S_0^0\right),$$

$$\dot{S}_0^0 + \frac{2\dot{\rho}}{\rho}\left(S_0^0 - S_2^2\right) + [T_0^n] = 0.$$

Структура этих уравнений отражает общую структуру уравнений Эйнштейна. Первое уравнение — уравнение начальных условий или, на языке гамильтонова формализма, уравнение связи. Второе уравнение — динамическое, оно содержит ускорение. Третье уравнение — следствие тождеств Бианки. Инвариантные функции $\Delta(\mathrm{in},\mathrm{out})$, а также $T_0^n(\mathrm{in},\mathrm{out})$ и $T_n^n(\mathrm{in},\mathrm{out})$ определяются свойствами внешней и внутренней частей пространства–времени и заполняющей их материей. Следовательно, мы имеем два уравнения для трёх неизвестных функций собственного времени: $\rho(\tau)$, $S_0^0(\tau)$ и $S_2^2(\tau)$. Как уже упоминалось, мы исследуем оболочку в вакууме, т. е. $T_0^n = 0$ и $T_n^n = 0$. Кроме того, для решения Шварцшильда

$$\Delta = 1 - 2Gm/\rho,$$

причём снаружи $m = m_{\mathrm{out}}$, а внутри $m = m_{\mathrm{in}}$.

5.3. Начальные условия и динамика. Теперь определимся, какой тип оболочки мы будем изучать. Мы выбираем простейшее обобщение точечного гравитирующего источника — пылевую сферически-симметричную тонкую оболочку. Слово «пылевая» означает, что натяжение (тангенциальное давление) равно нулю, т. е. $S_2^2 = 0$. Пусть M — сумма масс всех «пылинок», составляющих оболочку. Она называется «голой массой». В выбранной нами системе единиц $M = E$, т. е. это энергия оболочки в гидродинамическом или термодинамическом смысле. По определению, она равна следующему интегралу по объёму:

$$M = \int T_0^0 dV = 4\pi \int T_0^0 R^2 e^{\frac{\lambda}{2}} dq = 4\pi \int S_0^0 \delta(n) R^2 dn = 4\pi\rho^2(\tau) S_0^0,$$

$$S_0^0 = \frac{M}{4\pi\rho^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение неразрывности, получаем, что для пылевой оболочки $M = \mathrm{const}$, т. е. голая масса является интегралом движения. Итак, у нас остаётся одна неизвестная функция — радиус оболочки $\rho(\tau)$. Её, разумеется, можно найти, интегрируя динамическое уравнение. Общее решение зависит от двух произвольных констант, которые определяются заданием начальных условий $\rho_0 = \rho(0)$, $\dot\rho_0 = \dot\rho(0)$, $\sigma_{\mathrm{in}}(0)$ и $\sigma_{\mathrm{out}}(0)$, если известны остальные параметры системы: шварцшильдовы массы m_{in} и m_{out} и голая масса оболочки M. Но у нас ещё есть уравнение связи, которое накладывает ограничение на совокупность начальных условий и параметров. Это можно наглядно продемонстрировать следующим образом: пусть заданы ρ_0, $\dot\rho_0$, m_{in} и M, тогда из уравнения связи при различных $\sigma_{\mathrm{in}}(0)$ и $\sigma_{\mathrm{out}}(0)$ мы получаем различные значения для m_{out}, т. е. для полной массы (энергии) всей системы с учётом гравитационного дефекта масс. И, обратно, задавая изначально параметры системы, т. е. m_{in}, m_{out} и M, мы можем в результате исследования получить возможные значения $\sigma_{\mathrm{in}}(0)$ и $\sigma_{\mathrm{out}}(0)$ и определить, таким образом, глобальную геометрию полного пространства–времени. При этом нам совершенно достаточно только одного уравнения начальных условий — дифференциального уравнения первого порядка. К такому исследованию мы сейчас и приступим.

Выпишем это уравнение в явном виде:

$$\sigma_{in}\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\mathrm{in}}}{\rho}} - \sigma_{\mathrm{out}}\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\mathrm{out}}}{\rho}} = \frac{GM}{\rho}.$$

Будем считать, что оболочка состоит из частиц обычной, а не экзотической материи, т. е. положим $M > 0$. Поскольку нас интересуют чёрные дыры, то примем также, что $m_{\text{in}} > 0$, $m_{\text{out}} > 0$. Нам нет нужды интегрировать дифференциальное уравнение, достаточно исследовать особые точки траекторий $\rho = 0, \infty$, точки поворота $\dot\rho = 0$ и знаки σ_{in}, σ_{out} в них. Поэтому поступим следующим образом. Сквадрируем наше уравнение, перенеся второе слагаемое слева направо, в результате получаем

$$\frac{\Delta m}{M} = \sigma_{\text{out}}\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2G}{\rho}} + \frac{GM}{2\rho},$$

где $\Delta m = m_{\text{out}} - m_{\text{in}}$ — полная масса оболочки. Отсюда следует, что

$$\sigma_{\text{out}} = \operatorname{sign}\Bigl(\frac{\Delta m}{M} - \frac{GM}{2\rho}\Bigr),$$

так что

$$\sigma_{\text{out}}(0) = -1, \quad \sigma_{\text{out}}(\infty) = \operatorname{sign}\Bigl(\frac{\Delta m}{M}\Bigr).$$

Заметим, что ничто не мешает величине Δm быть отрицательной при $m_{\text{in}} > 0$. Для знака σ_{in} имеем

$$\sigma_{\text{in}} = \operatorname{sign}\Bigl(\frac{\Delta m}{M} + \frac{GM}{2\rho}\Bigr),$$

откуда

$$\sigma_{\text{in}}(0) = +1, \quad \sigma_{\text{in}}(\infty) = \operatorname{sign}\Bigl(\frac{\Delta m}{M}\Bigr).$$

Когда движение оболочки инфинитно, а когда финитно? Устремляя в уравнении радиус оболочки к бесконечности, находим

$$\frac{\Delta m}{M} = \sigma_{\text{out}}\sqrt{\dot\rho^2 + 1} = \sigma_{\text{in}}\sqrt{\dot\rho^2 + 1},$$

т. е. движение инфинитно, если $|\Delta m|/M \geqslant 1$, при этом $\sigma_{\text{in}}(\infty) = \sigma_{\text{out}}(\infty)$. Если же $|\Delta m|/M \leqslant 1$, то движение финитно.

Для точек поворота $\dot\rho = 0$ получается простое квадратное уравнение

$$\Bigl(\frac{GM}{2\rho_0}\Bigr)^2 + 2\frac{m_{\text{in}} + m_{\text{out}}}{M}\Bigl(\frac{GM}{2\rho_0}\Bigr) + \Bigl(\frac{\Delta m}{M}\Bigr)^2 - 1 = 0.$$

Легко видеть, что при инфинитном движении нет точек поворота (оба корня либо отрицательны, либо комплексны), а в случае финитного движения точка поворота только одна $\rho = \rho_0 > 0$:

$$\frac{2GM}{\rho_0} = -\frac{m_{\text{in}} + m_{\text{out}}}{M} + \sqrt{1 + \frac{4m_{\text{in}}m_{\text{out}}}{M^2}}.$$

5.4. Глобальные геометрии. Для полноты картины рассмотрим сначала инфинитное движение, которое полностью определяется знаком Δm, а именно $\operatorname{sign}\Delta m = \sigma_{\rm in}(\infty) = \sigma_{\rm out}(\infty)$, при этом всегда $\sigma_{\rm in}(0) = +1$ и $\sigma_{\rm out}(0) = -1$. Если $\Delta m > 0$, то диаграмма Картера—Пенроуза для полного пространства–времени выглядит как на рис. 7.

Траектория нарисована схематично: не учтены знаки σ внутри и снаружи вблизи нуля. Для наглядности пунктирными линиями обозначены поверхности постоянного радиуса в соответствующих R- и T-областях. Расположение горизонтов внутренней и внешней геометрий Шварцшильда обусловлено тем, что в случае $\Delta m > 0$ при сжатии из бесконечности до нуля оболочка сначала пересекает внешний горизонт и входит во внешнюю $T_{\pm{\rm out}}$-область, а только потом пересекает внутренний горизонт. Разумеется, существует ещё и решение с расширяющейся оболочкой, которое получается простым обращением времени. Если же $\Delta m < 0$, то диаграмма Картера—Пенроуза выглядит как на рис. 8.

Перейдём теперь к изучению финитного движения, которое богаче по количеству вариантов глобальных геометрий. Итак, что мы имеем? Подставляя найденное выше значение для ρ_0 в выражение для σ, получаем следующие неравенства:

$$\frac{\Delta m}{M} > \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{m_{\rm in}^2}{M^2}} - \frac{m_{\rm in}}{M}\right); \quad \frac{\Delta m}{M} < -\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{m_{\rm in}^2}{M^2}} + \frac{m_{\rm in}}{M}\right),$$

если $\sigma_{\rm out} = +1$, и

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{m_{\rm in}^2}{M^2}} + \frac{m_{\rm in}}{M}\right) < \frac{\Delta m}{M} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{m_{\rm in}^2}{M^2}} - \frac{m_{\rm in}}{M}\right),$$

если $\sigma_{\rm out} = -1$. Аналогично, для внутренней геометрии имеем

$$\frac{\Delta m}{M} > -\frac{M}{4m_{\rm in}},$$

если $\sigma_{\rm in} = +1$, и

$$\frac{\Delta m}{M} < -\frac{M}{4m_{\rm in}},$$

если $\sigma_{\rm in} = -1$. Какие у нас варианты? Если $\Delta m > 0$, то $\sigma_{\rm in} = +1$, и при

$$\frac{\Delta m}{M} > \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{m_{\rm in}^2}{M^2}} - \frac{m_{\rm in}}{M}\right)$$

имеем $\sigma_{\rm out}(\rho_0) = +1$, а конформная диаграмма Картера—Пенроуза выглядит как на рис. 9.

Если же

$$0 < \frac{\Delta m}{M} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{m_{\rm in}^2}{M^2}} - \frac{m_{\rm in}}{M}\right),$$

то $\sigma_{\rm out} = -1$ и диаграмма Картера—Пенроуза выглядит как на рис. 10.

В случае, когда $\Delta m < 0$, всегда $\sigma_{\rm out} = -1$, ($M > 0$!) и при

$$-\frac{M}{4m_{\rm in}} < \frac{\Delta m}{M} < 0$$

имеем $\sigma_{\rm in}(\rho_0) = +1$, а конформная диаграмма Картера—Пенроуза имеет вид, представленный на рис. 11.

Если же
$$\frac{\Delta m}{M} < 0,$$
то $\sigma_{\rm in}(\rho_0) = -1$, но такое возможно лишь при
$$\frac{m_{\rm in}}{M} > \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (M > 0!).$$
Диаграмма Картера—Пенроуза представлена на рис. 12.

5.5. Модифицированный закон Ньютона. Выше мы уже говорили о том, что в случае сферической симметрии, имея в руках уравнение состояния материи, составляющей оболочку, и проинтегрированное уравнение неразрывности, достаточно исследовать одно оставшееся уравнение Израэля (именно уравнение связи) для полноценного качественного описания глобальной геометрии пространства–времени. Однако хотя это уравнение и представляет, в сущности, закон сохранения энергии, привычные составляющие его части — кинетическая и потенциальная — не выражены столь явно, как нам этого хотелось бы. Поэтому в данном пункте мы получим модифицированный закон Ньютона: формулу для ускорения свободного падения сферически-симметричной тонкой пылевой оболочки, являющейся простейшим обобщением точечной частицы в центральном поле гравитирующей массы.

Уравнения Израэля для сферически-симметричной пылевой оболочки имеют вид
$$\sigma_{\rm in}\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\rm in}}{\rho}} - \sigma_{\rm out}\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\rm out}}{\rho}} = \frac{GM}{\rho},$$
$$\frac{\sigma_{\rm in}}{\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\rm in}}{\rho}}}\left(\ddot\rho + \frac{Gm_{\rm in}}{\rho^2}\right) - \frac{\sigma_{\rm out}}{\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\rm out}}{\rho}}}\left(\ddot\rho + \frac{Gm_{\rm out}}{\rho^2}\right) = -\frac{GM}{\rho^2},$$
где $m_{\rm in}$ — центральная гравитирующая масса, $m_{\rm out} = m_{\rm in} + \Delta m$ — полная масса (энергия) системы. Из первого уравнения квадрированием получаем
$$\sigma_{\rm in}\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\rm in}}{\rho}} = \frac{\Delta m}{M} + \frac{GM}{2\rho}, \quad \sigma_{\rm out}\sqrt{\dot\rho^2 + 1 - \frac{2Gm_{\rm out}}{\rho}} = \frac{\Delta m}{M} - \frac{GM}{2\rho}.$$
Далее несложные алгебраические выкладки приводят к следующему результату:
$$\ddot\rho = -\frac{G(m_{\rm in} + \frac{1}{2}\Delta m)}{\rho^2} - \frac{G^2M^2}{4\rho^3}.$$

Первое слагаемое в правой части — классический закон Ньютона для ускорения (в собственном времени сопутствующего наблюдателя) свободного падения с тем отличием, что вместо центральной гравитирующей массы $m_{\rm in}$

стоит

$$m_{\text{in}} + \frac{1}{2}\Delta m = \frac{1}{2}(m_{\text{in}} + m_{\text{out}}),$$

т. е. полусумма шварцшильдовых масс внутри и вне оболочки. Однако всё не так примитивно, как кажется. Дело в том, что полная энергия (масса) системы m_{out}, а следовательно, и Δm, зависят от начальных условий движения оболочки. Другими словами, добавка $\frac{1}{2}\Delta m$ зависит от скорости в момент измерения, т. е. от кинетической энергии, что вполне в духе основного постулата общей теории относительности: «всякая энергия тяготеет».

Второе слагаемое — результат гравитационного самодействия, оно пропорционально уже не обратному квадрату, а обратному кубу радиуса. Такого же вида член возникает как релятивистская добавка при вращении тела по орбите, превращая эллипсы из закона Кеплера в незамкнутую розетку и вызывая смещение перицентра (перигелия планет в Солнечной системе). Учёт ещё одной функционально такой же добавки может оказаться полезным при оценке масс сверхмассивных чёрных дыр в центрах галактик, вокруг которых вращаются скопления достаточно близких звезд. Любопытный факт: когда $\sigma_{\text{in}} = +1$, а $\sigma_{\text{out}} = -1$, оболочка будет сжиматься до нулевого радиуса, даже если ей не к чему притягиваться, т. е. при $m_{\text{in}} = m_{\text{out}} = 0$ ($\Delta m = 0$), просто под действием своей собственной гравитации.

Нужно отметить, что измерениями можно, в принципе, обнаружить эти отклонения от классического закона тяготения Ньютона и определить глобальную геометрию гравитирующей системы «центральное тело + оболочка», что совершенно невозможно в пределе пробной частицы. Разумеется, всё это — в идеале, поскольку мы воспользовались условием строго сферической симметрии задачи, когда отсутствует гравитационное излучение, но нам важно подчеркнуть необходимость учёта обратного влияния источников гравитационного поля на метрику и глобальную геометрию пространства–времени.

6. Метрика Вайдья

Уравнения Израэля «работают», когда оболочка или времениподобная, или пространственноподобная. А как быть со световыми оболочками? Как известно, вектор нормали к световой гиперповерхности лежит на самой этой гиперповерхности. Но мы всегда можем ввести дважды световые координаты, т. е. запаздывающее время и опережающее время. По определению, световая оболочка движется вдоль одной из них. Интегрируя уравнения Эйнштейна вдоль другой, получим уравнения сшивки на световой гиперповерхности [11]. Вопрос об исследовании сингулярных (когда тензор энергии-импульса пропорционален δ-функции) световых гиперповерхностей может показаться праздным и чисто академическим. Однако это совсем не так. Взять, к примеру, движение скачка какого-либо релятивистского физического поля. Наличие такого скачка означает присутствие бесконечных (по абсолютной величине) пространственных и временных производных, которые распространяются вдоль характеристик соответствующего дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа, т.е. со скоростью света (ударные волны). Но мы не будем здесь развивать этот формализм, поскольку существует общее решение уравнений Эйнштейна для сферически симметричного излучения — метрика Вайдья.

Чтобы получить метрику Вайдья, можно, конечно, действовать стандартно: изучить структуру тензора энергии-импульса сферически симметричного излучения и постараться решить нелинейные уравнения Эйнштейна (например, в векторной форме, описанной выше). Но «мы пойдём другим путём». Представим себе, что излучение (испускание или поглощение) длится лишь конечное время, тогда, поскольку быстрее света ничего нет, то как до начала излучения, так и после его окончания мы имеем с необходимостью метрику Шварцшильда (в силу теоремы Биркгофа) с разными, разумеется, значениями массового параметра. Следовательно, на границах, вдоль световых гиперповерхностей, мы должны сшить метрику Вайдья с метрикой Шварцшильда. Вот из этой сшивки мы и получим всю необходимую информацию.

Но прежде нужно выбрать подходящую систему координат, наиболее адекватную нашей постановке задачи. Введём общее обозначение $z = \{u, v\}$ для запаздывающей u и опережающей v световых координат. Для метрики Шварцшильда, как мы уже знаем,

$$z = t - \varepsilon r^{\star}, \quad dr^{\star} = \frac{dr}{F}, \quad F = 1 - \frac{2Gm}{r},$$

где $\varepsilon = +1$, если $z = u$ и $\varepsilon = -1$, если $z = v$, а линейный элемент в координатах Финкельштейна $\{z, r\}$ принимает вид

$$ds^2 = F dz^2 + 2\varepsilon dz dr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

В общем случае использование координат Финкельштейна диктует следующую структуру для сферически-симметричной метрики:

$$ds^2 = A(z, r) dz^2 + 2H dz dr - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

потому что при $z = \text{const}$ двумерная её часть должна быть равна нулю. Заметим также, что выбор в качестве второй координаты (которая может быть как пространственной, так и временной) инвариантного радиуса r фиксирует систему координат с точностью до произвольного преобразования $z' = z'(z)$. Пусть $z = z_0$ — граница между метриками Вайдья и Шварцшильда. Тогда из непрерывности линейного элемента (первой квадратичной формы) следует непрерывность радиуса r вдоль всей границы. Но непрерывной должна быть и вторая квадратичная форма — наш инвариант Δ, что очевидно, если мы проинтегрируем уравнения Эйнштейна в векторной форме «поперек» границы $z = z_0$ (т. е. вдоль второй световой координаты) и примем во внимание отсутствие δ-функции в правой части уравнения. Итак, имеем

$$\Delta_{\text{Vaidya}}(z_0) = \Delta_{\text{Schw}}(z_0), \quad \Delta_{\text{Vaidya}} = -1 + \frac{2Gm(z)}{r}.$$

Двумерный метрический тензор γ_{ik} ($ds^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k = A dz^2 + 2H dz dr$) и обратный ему тензор γ^{ik} следующие:

$$\gamma_{ik} = \begin{pmatrix} A & H \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{H} \\ \frac{1}{H} & -\frac{A}{H^2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда для $\Delta = \gamma^{ik} R,_i R,_k$ получаем

$$\Delta = -\frac{A}{H^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{A}{H^2} = 1 - \frac{2Gm(z)}{r}.$$

Если $m = \mathrm{const}$, то метрика Вайдья должна переходить в метрику Шварцшильда, откуда следует, что метрический коэффициент H должен зависеть только от световой координаты z и преобразованием $z'(z)$ может быть сделан равным ε. Окончательно метрика Вайдья принимает вид

$$ds^2 = \Big(1 - \frac{2Gm(z)}{r}\Big) dz^2 + 2\varepsilon dz dr - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Нам осталось вычислить тензор энергии-импульса излучения, для чего воспользуемся уравнениями Эйнштейна в векторной форме. Несложные, но относительно длинные вычисления приводят к следующему результату: единственной отличной от нуля является компонента

$$T^r_z = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dm}{dz}.$$

При этом след тензора энергии-импульса равен нулю, чего и следовало ожидать для излучения. Получаем также, что $H = H(z)$, что показывает непротиворечивость наших рассуждений.

Напоследок скажем несколько слов о горизонтах видимости, определяемых уравнением

$$\Delta = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_H = 2Gm(z).$$

Является ли он световым (как в метрике Шварцшильда), времениподобным или же пространственноподобным? Для ответа на этот вопрос вычислим (лоренцев) квадрат нормали к поверхности $\Delta = \mathrm{const}$:

$$D = \gamma^{ik} \Delta,_i \Delta,_k = -\Big(1 - \frac{2Gm(z)}{r}\Big)(\Delta,_r)^2 + 2\varepsilon \Delta,_r \Delta_z.$$

При $\Delta = 0$

$$D = -\varepsilon \frac{8G^2 m(z) m'(z)}{r^3}.$$

Потребуем выполнения условия энергодоминантости для нашего излучения. Тогда в R_+-области

$$\operatorname{sign} m' = -\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad D > 0.$$

Следовательно, горизонт видимости пространственноподобен. В R_--области ε всюду заменяется на $-\varepsilon$, так что результат тот же. Отсюда, в частности, следует, что при поглощении излучения чёрной дырой горизонт видимости всегда находится под горизонтом событий, т.е. внутри результирующей чёрной дыры. Это будет наглядно показано на примере, который мы рассмотрим в следующем, заключительном, разделе.

7. Статический наблюдатель. Существует ли он реально, а не виртуально?

Попробуем ответить на этот вопрос. В чём проблема? Пробные частицы, которые мы привыкли использовать в качестве наблюдателей, — вещь виртуальная, умозрительная, не имеющая ни вкуса, ни запаха, т. е. с исчезающе малыми размерами и массой. Если такое допустимо для свободно падающего по геодезической наблюдателя (и то не всегда), то в случае статического наблюдателя картина совсем иная. Нужно обеспечить его статичность в гравитационном поле, для чего необходимо или приложить внешнюю силу (что уже изменит наблюдаемое гравитационное поле), или снабдить его ракетой с горючим. Но! Во-первых, это даёт дополнительную массу, вообще говоря, уже не исчезающе малую, которая тоже тяготеет. Во-вторых, горючего может хватить только на короткое время (в зависимости от его количества, т. е. опять же массы).

Чтобы избежать резкого усложнения проблемы, связанного с гравитационным излучением, мы останемся в рамках сферической симметрии. Вообразим набор (ансамбль) наблюдателей, распределённых в узком слое (чтобы можно было использовать формализм тонких оболочек) на некотором расстоянии от вечной чёрной дыры. Для обеспечения статичности снабдим наших наблюдателей фотонными ракетами (они действуют максимально эффективно), которые начиная с некоторого момента будут испускать энергию вовнутрь. Итак, снаружи у нас метрика Шварцшильда с массой $m_{\text{out}} = \text{const}$, которая равна полной массе (энергии) системы. Затем идёт тонкая оболочка, голая масса которой (включая ракеты и горючее) равна M, а внутри — метрика Вайдья в опережающих координатах Финкельштейна с изменяющейся массой $m_{\text{in}}(v)$ ($\varepsilon = -1$ в формулах предыдущего раздела). Тонкая оболочка сидит на поверхности постоянного радиуса $r = r_0$, т. е. в уравнениях Израэля следует положить $\rho = r_0$, $\dot\rho = \ddot\rho = 0$. Мы снова для простоты будем рассматривать пылевую оболочку ($S_2^2 = 0$), но теперь голая масса уже не является постоянной: $M = M(\tau)$ (напомним, что точка означает дифференцирование по собственному времени τ на оболочке). Ещё одно отличие от свободно падающей оболочки, рассматривавшейся ранее: теперь поток энергии вовнутрь $T_0^n(\text{in})$ и нормальная составляющая тензора напряжений $T_n^n(\text{in})$ уже не равны нулю — они определяются потоком излучения, необходимым для обеспечения статики.

Что мы имеем? Уравнения Израэля

$$\sqrt{F_{\text{in}}} - \sqrt{F_{\text{out}}} = \frac{GM}{r_0},$$

$$\frac{1}{F_{\text{in}}}\Big(\frac{1-F_{\text{in}}}{2r_0} + 4\pi G r_0 T_n^n(\text{in})\Big) - \frac{1-F_{\text{out}}}{2r_0\sqrt{F_{\text{out}}}} = -\frac{GM}{r_0^2},$$

$$\dot M = 4\pi r_0^2 T_0^n(\text{in}),$$

$$F_{\text{in}} = 1 - \frac{2Gm_{\text{in}}(v)}{r_0}, \quad F_{\text{out}} = 1 - \frac{2Gm_{\text{out}}}{r_0} = F_0 = \text{const},$$

в которых мы уже учли все наши условия, и тензор энергии-импульса излучения

$$T_{zz} = \varepsilon T_z^r = -\frac{\varepsilon}{4\pi r_0^2}\frac{dm_{\text{in}}}{dz},$$

остальное равно нулю. Как видим, нам ещё необходимы формулы перехода от координат Финкельштейна $\{z, r\}$ к гауссовым нормальным координатам $\{\tau, n\}$, в которых уравнение оболочки есть просто $n = \text{const} = 0$. Несложные выкладки дают

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{\dot\rho^2 + F} - \varepsilon\dot\rho}{F}, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\dot\rho - \varepsilon\sqrt{\dot\rho^2 + F}}{F} = -\varepsilon\frac{\partial z}{\partial \tau}$$

$$T^n_n = -\Big(\frac{\sqrt{\dot\rho^2 + F} - \varepsilon\dot\rho}{F}\Big)^2 T_{zz}, \quad T^n_0 = -\varepsilon T^n_n.$$

Поскольку $\rho = r_0 = \mathrm{const}$, получаем

$$T^n_n = \frac{\varepsilon}{4\pi r_0^2 F}\frac{dm}{dz}, \quad T^n_0 = -\frac{1}{4\pi r_0^2 F}\frac{dm}{dz}.$$

Теперь у нас есть всё для ответа на поставленный вопрос. Из уравнения неразрывности следует

$$\dot M = -\frac{1}{F_{\mathrm{in}}}\frac{dm}{dv},$$

и после небольших манипуляций с уравнениями Израэля получаем

$$2r_0\dot M = M\Big(\frac{GM}{r_0} - A\Big), \quad A = \frac{1 - F_0}{\sqrt{F_0}}.$$

Это дифференциальное уравнение разрешается:

$$\frac{GM}{r_0} = \frac{A}{\exp\big(\frac{A(\tau - \tau_0)}{2r_0}\big) + 1},$$

где τ_0 — постоянная интегрирования, определяемая заданием начальной голой массы $M_0 = M(\tau = 0)$, начальной массы внутри оболочки $m_{\mathrm{in}}(\tau = 0)$ и радиусом r_0 (значение F_0 и, следовательно, A находится из первого уравнения Израэля).

Подробности при желании можно найти в работе [23]. И последнее. Пожалуйста, внимательно изучите помещённую на рис. 13 конформную диаграмму Картера—Перноуза. Здесь сплошная зелёная кривая показывает траекторию нашего наблюдателя, который сначала свободно падает, а затем, включив фотонные ракеты, удерживается на постоянном радиусе. Сплошные красные линии — горизонты видимости. Горизонт событий будущего показан красной пунктирной линией. Чёрной штриховой линией изображены поверхности постоянного радиуса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *J. Michell*, “On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, &c. of the Fixed Stars, in Consequence of the Diminution of the Velocity of Their Light, in Case Such a Diminution Should be Found to Take Place in any of Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would be Farther Necessary for That Purpose. By the Rev. John Michell, B. D. F. R. S. In a Letter to Henry Cavendish, Esq. F. R. S. and A. S.” // *Phil. Trans. R. Soc.*, 1784. Vol. 74. Pp. 35–57.
2. *P.-S. Laplace*, Le Système du Monde. Vol. II. Paris, 1799; русск. пер.: *П. С. Лаплас*, Изложение системы мира. Л.: Наука, 1982. 376 с.
3. *A. Einstein*, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” // *Ann. der Phys. (4)*, 1905. Vol. 17. 891–925 pp.

4. *A. Einstein*, “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt” // *Ann. der Phys. (4)*, 1905. Vol. 17. Pp. 132–148.
5. *A. Einstein*, “Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption” // *Ann. der Phys. (4)*, 1906. Vol. 20. Pp. 199–206.
6. *A. Einstein*, “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?” // *Ann. der Phys. (4)*, 1905. Vol. 18. Pp. 639–641.
7. *A. Einstein*, “Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie” // *Ann. der Phys. (4)*, 1907. Vol. 23. Pp. 371–384.
8. *K. Schwarzschild*, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie” / In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften.* Berlin: Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, 1916. Pp. 189–196; англ. пер.: *K. Schwarzschild*, On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory, arXiv: physics/9905030 [physics.hist-ph].
9. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля / Теоретическая физика. Т. II. М.: Гостехиздат, 1948. 364 с.; англ. пер.: *L. D. Landau, E. M. Lifshitz*, The Classical Theory of Fields / A Course of Theoretical Physics. Vol. 2. Oxford: Pergamon Press, 1971. xi+374 pp.
10. *И. Д. Новиков*, “R- и T-области в пространстве времени со сферически-симметричным пространством” // *Сообщ. ГАИШ*, 1964. Т. 132, № 3. С. 3–42. [*I. D. Novikov*, “R- and T-regions in space-time with a spherically symmetrical space” // *Soobsh. GAISh*, 1964. Vol. 132, no. 3. Pp. 3–42].
11. *V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, I. I. Tkachev*, “Dynamics of bubbles in general relativity” // *Phys. Rev. D*, 1987. Vol. 36, no. 10. Pp. 2919–2944.
12. *V. A. Berezin*, Vector-like Einstein's equations for D-dimensional spherical gravity with (D-2)-dimensional sphere, arXiv: gr-qc/0010083.
13. *V. A. Berezin, A. L. Smirnov*, “Crossing thin shells” // *Grav. Cosmol.*, 2003. Vol. 9, no. 4. Pp. 235–242.
14. *D. Finkelstein*, “Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle” // *Phys. Rev.*, 1958. Vol. 110, no. 4. Pp. 965–967.
15. *G. D. Birkhoff*, Relativity and Modern Physics. Cambridge: Harvard University Press, 1923.
16. *J. A. Wheeler*, “Our Universe: The Known and the Unknown” // *Amer. Sch.*, 1968. Vol. 37, no. 2. Pp. 248–274.
17. *J. A. Wheeler*, “Our Universe: The Known and the Unknown” // *Am. Sci.*, 1968. Vol. 56, no. 1. Pp. 1–20.
18. *J. A. Wheeler*, “Our Universe: The Known and the Unknown” // *Phys. Teach.*, 1968. Vol. 7, no. 1. Pp. 24–34.
19. *A. Einstein, N. Rosen*, “The Particle Problem in the General Theory of Relativity” // *Phys. Rev.*, 1935. Vol. 48, no. 1. Pp. 73–77.
20. *W. Israel*, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity” // *Il Nuovo Cimento B Series 10*, 1966. Vol. 44, no. 1. Pp. 1–14.
21. *W. Israel*, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity” // *Il Nuovo Cimento B Series 10*, 1967. Vol. 48, no. 2. Pp. 463.
22. *K. Kuchař*, “Charged shells in general relativity and their gravitational collapse” // *Czeck. J. Phys. B*, 1968. Vol. 18, no. 4. Pp. 435–463.
23. *V. Berezin*, “Could a real (not virtual) static observer exist outside a Schwarzschild black hole?” // *Gen. Rel. Grav.*, 2012. Vol. 44, no. 6. Pp. 1555–1561, arXiv: 1106.0670 [gr-qc].

Поступила в редакцию 12/VI/2013;
в окончательном варианте — 21/VII/2013.

MSC: 83C57; 83C10, 83C55, 83C05

BEFORE GETTING AROUND TO DO BLACK HOLE PHYSICS...

V. A. Berezin

Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences,
7a, 60th October Anniversary pr., Moscow, 117312, Russia.

E-mail: berezin@ms2.inr.ac.ru

The short history is presented of the very notion "black hole". The global geometry of the general spherically symmetric space-time is described. Einstein equations for spherical gravity are derived. The causal structure of the Schwarzschild black hole is investigated, and it is shown in details how to construct conformal Carter–Penrose diagrams that reveal visually such a structure. The Israel equations for self-gravitating thin shells are obtained and the modified gravitational Newton's law is investigated. Very simple and instructive derivation of the Vaidya metrics describing the spherically symmetric gravitating radiation is given. As an application of the theory described above the problem of the real (not virtual) static Schwarzschild observer is solved.

Key words: *General Relativity, spherical gravity, thin shells, Schwarzschild manifold, Vaidya metrics.*

Original article submitted 12/VI/2013;
revision submitted 21/VII/2013.

Victor A. Berezin (Dr. Phys. & Math. Sci.), Senior Researcher, Theoretical Department.