

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

С. В. Кириченко

Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

E-mail: svkirichenko@mail.ru

Рассмотрена краевая задача с нелокальным начальным условием для уравнения смешанного типа. Основным результатом является доказательство эквивалентности поставленной нелокальной задачи и краевой задачи с классическими начальными условиями для нагруженного уравнения. Установленная эквивалентность позволила доказать единственность решения поставленной задачи и существование обобщённого решения при дополнительных ограничениях на входные данные.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальные условия, обобщённое решение.

Введение. В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных активно изучаются. Интерес к ним вызван необходимостью обобщения классических задач математической физики в связи с математическим моделированием ряда физических процессов, изучаемых современным естествознанием [1]. В тех случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для непосредственных измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости соответствующей математической задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Исследованию разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями и посвящена данная статья.

Значительная часть публикаций, начиная с работы Дж. Р. Кэннона [2], посвященных задачам с интегральными условиями, содержит исследования параболических уравнений. Важные результаты исследования нелокальных задач для эллиптических уравнений получены А. К. Гузиным, В. П. Михайловым [3], А. Л. Скубачевским [4]. Задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений рассмотрены в статьях [5–7], а также в работах, представленных в прилагающемся к ним списках литературы. Нелокальным задачам для уравнений смешанного типа посвящено весьма небольшое количество работ, причем в них рассмотрены лишь модельные уравнения. Отметим здесь работы К. Б. Сабитова (см., например, [8]) и его учеников.

Светлана Викторовна Кириченко, старший преподаватель, каф. математики.

В предлагаемой статье рассмотрена задача с нелокальным по времени интегральным условием для уравнения смешанного типа.

Постановка задачи. В конечной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(x, t)u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

ЗАДАЧА 1. Найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) + \int_0^T H(t)u(x, t)dt = 0. \quad (4)$$

В условии (4) $H(t)$ задана в $[0, T]$ и такова, что $h = \|H\|_{L_2(0, T)} < 1$. Коэффициент $K(x, t)$ может обращаться в нуль как на границе области Q_T , так и во внутренних её точках. Мы не делаем предположений о том, где и как внутри области функция $K(x, t)$ меняет знак.

Эквивалентность. Покажем, что задача (1)–(4) эквивалентна задаче с классическими начальными данными для нагруженного уравнения.

Введём оператор B формулой

$$Bu \equiv u(x, t) + \int_0^T H(t)u(x, t)dt$$

и будем обозначать $v(x, t) = Bu$.

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1)–(4). Тогда, как нетрудно видеть, функция $v = Bu$ удовлетворяет условиям

$$v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0$$

и уравнению

$$Lv - L\left(\int_0^T H(t)u(x, t)dt\right) = f(x, t).$$

Преобразуем последнее слагаемое левой части этого уравнения:

$$L\left(\int_0^T H(t)u(x, t)dt\right) = - \int_0^T H(\tau)(au_x)_x d\tau + c(x, t) \int_0^T H(\tau)u(x, \tau)d\tau.$$

Так как по предположению $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1),

$$(au_x)_x = u_{tt} + bu_t + cu - f(x, t).$$

Это представление дает нам возможность сделать полезные преобразования:

$$\begin{aligned} \int_0^T H(\tau)(au_x)_x d\tau &= \int_0^T H(\tau)K(x, \tau)u_{\tau\tau} d\tau + \\ &+ \int_0^T H(\tau)b(x, \tau)u_\tau + \int_0^T H(\tau)c(x, \tau)u(x, \tau)d\tau - \int_0^T Hf d\tau. \end{aligned}$$

Первые два слагаемые правой части последнего равенства проинтегрируем от 0 до T и, учитывая условия (2)–(4), получим

$$\begin{aligned} \int_0^T H(\tau)(au_x)_x d\tau &= \int_0^T (HK)_{\tau\tau} u d\tau - H(0)K_t(x, 0) \int_0^T H u d\tau - \\ &- \int_0^T (Hb)_{\tau} u d\tau + H(0)b(x, 0) \int_0^T H c(x, \tau) u d\tau - \int_0^T H f d\tau. \end{aligned}$$

Тогда, обозначив

$$\begin{aligned} P(x, t, \tau) &= [c(x, t) - c(x, \tau)]H(\tau) - (HK)_{\tau\tau} + (Hb)_{\tau} + H(0)[K(x, 0) + b(x, 0)]H(\tau), \\ F(x, t) &= f(x, t) + \int_0^T H(t)u(x, t)dt, \end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$K(x, t)v_{tt} - (av_x)_x + bv_t + c(x, t)v + \int_0^T P(x, t, \tau)u(x, \tau)d\tau = F(x, t). \quad (5)$$

Выше мы отметили, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет классическим условиям.

Итак, показано, что если функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(4), то функция $v(x, t)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям

$$v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad (6)$$

а функции u , v связаны соотношением

$$u(x, t) + \int_0^T H(t)u(x, t)dt = v(x, t). \quad (7)$$

Пусть теперь $v(x, t)$ — решение задачи (5)–(7). Заметим, что уравнение (5) можно записать в виде

$$LBu - L(Bu - u) = Bf - f.$$

Из этого равенства моментально следует, что $Lu = f$. Из условий (6) и соотношения (7) следует выполнение условий (2)–(4). Эквивалентность доказана.

Таким образом, для обоснования разрешимости задачи 1 может быть рассмотрена эквивалентная ей

ЗАДАЧА 2. Найти в области Q_T решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6), если функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ связаны равенством (7).

Введём обозначения:

$$p = \max_{[0, l]} \left(\int_0^T \int_0^T P^2(x, t, \tau) dt d\tau \right)^{1/2}, \quad h = \|H\|_{L_2(0, T)}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $c \in C(\bar{Q}_T)$, $c_t \in C(\bar{Q}_T)$, $c(x, T) \geq 0$, $h < 1$, $2b - K_t > 1$, и либо

$$-a_t \geq 0, \quad p + c_t(1 - \sqrt{hT})^2 < 0,$$

либо

$$-a_t > 0, \quad p + c_t(1 - \sqrt{hT})^2 \leq 0.$$

Тогда существует не более одного решения задачи 2.

Доказательство. Так как уравнения (5) и (7) линейны, достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Умножим равенство (5) с $F(x, t) = 0$ на v_t и проинтегрируем по Q_T . После стандартных преобразований получим

$$\int_0^T \int_0^l [(2b - K_t)v_t^2 - a_tv_x^2 - c_tv^2] dx dt + \int_0^l a(x, T)v_x^2(x, T) dx + \\ + \int_0^l c(x, T)v^2(x, T) dx = -2 \int_0^T \int_0^l v_t(x, t) \int_0^T P(x, t, \tau)u(x, \tau) d\tau dx dt. \quad (8)$$

Для оценки правой части (8) получим предварительно неравенство. Умножим обе части равенства

$$u(x, t) = v(x, t) - \int_0^T H(t)u(x, t) dt$$

на $u(x, t)$ скалярно. Из полученного равенства вытекает неравенство

$$\|u\|_{L_2(Q_T)} \leq (1 - \sqrt{hT})^{-1} \|v\|_{L_2(Q_T)}. \quad (9)$$

Теперь мы можем получить оценку правой части (8):

$$2 \left| \int_0^T \int_0^l v_t(x, t) \int_0^T P(x, t, \tau)u(x, \tau) d\tau dx dt \right| \leq \int_0^T \int_0^l v_t^2 dx dt + \\ + \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^T P(x, t, \tau)u(x, \tau) d\tau \right)^2 dx dt \leq \int_0^T \int_0^l v_t^2 dx dt + p \int_0^T \int_0^l u^2 dx dt.$$

В силу неравенства (9) окончательно получим

$$2 \left| \int_0^T \int_0^l v_t(x, t) \int_0^T P(x, t, \tau)u(x, \tau) d\tau dx dt \right| \leq \\ \leq \int_0^T \int_0^l v_t^2 dx dt + \frac{p}{(1 - \sqrt{hT})^2} \int_0^T \int_0^l v^2 dx dt.$$

Теперь из (8) имеем

$$\int_0^T \int_0^l \left((2b - K_t - 1)v_t^2 - a_tv_x^2 - \left(c_t + \frac{p}{(1 - \sqrt{hT})^2} \right) v^2 \right) dx dt \leq 0,$$

откуда в силу условий теоремы сразу следует, что $v(x, t) \equiv 0$ в Q_T . $\square$

В силу доказанной эквивалентности задач 1 и 2 справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если выполняются условия теоремы 1, то существует не более одного решения задачи 1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А. А. Самарский, "О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений" // *Диффер. уравн.*, 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935. [А. А. Samarskiy, "Some problems of the theory of differential equations" // *Differ. Uravn.*, 1980. Vol. 16, no. 11. Pp. 1925–1935].
2. J. R. Cannon, "The solution of the heat equation subject to the specification of energy" // *Quart. Appl. Math.*, 1963. Vol. 21. Pp. 155–160.
3. А. К. Гушчин, В. П. Михайлов, "О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка" // *Матем. сб.*, 1994. Т. 185, № 1. С. 121–160; англ. пер.: А. К. Gushchin, V. P. Mikhailov, "On solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation" // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995. Vol. 81, no. 1. Pp. 101–136.

4. А. Л. Скубачевский, “Неклассические краевые задачи. I” / СМФН, Т. 26. М.: РУДН, 2007. С. 3–132; англ. пер.: A. L. Skubachevskiy, “Nonclassical boundary value problems. I.” // *Journal of Mathematical Sciences*, 2008. Vol. 155, no. 2. Pp. 199–334.
5. Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили, “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды” // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103. [D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili, “On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations” // *Matem. Mod.*, 2000. Vol. 12, no. 1. Pp. 94–103].
6. А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, “О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений” // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179; англ. пер.: A. I. Kozhanov, L. S. Pul'kina, “On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations” // *Differ. Equ.*, 2006. Vol. 42, no. 9. Pp. 1233–1246.
7. Л. С. Пулькина, “Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода” // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 4. С. 74–83; англ. пер.: L. S. Pul'kina, “Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind” // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012. Vol. 56, no. 4. Pp. 62–69.
8. К. Б. Сабитов, “Краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием” // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 10; англ. пер.: K. B. Sabitov, “Boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a nonlocal integral condition” // *Differ. Equ.*, 2010. Vol. 46, no. 10. Pp. 1472–1481.

Поступила в редакцию 24/VII/2013;
в окончательном варианте — 09/VIII/2013.

MSC: 35M13

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH NONLOCAL INITIAL CONDITIONS IN THE RECTANGLE

S. V. Kirichenko

Samara State Transport University,
18, First Bezimyanniy per., Samara, 443066, Russia.

E-mail: svkirichenko@mail.ru

The boundary value problem for mixed type equation with nonlocal initial conditions in integral form is considered. The main result states that the nonlocal problem is equivalent to the classical boundary value problem for a loaded equation. This fact helps to prove the uniqueness and, under extra restrictions, the existence of a generalized solution of the problem.

Key words: mixed type equation, nonlocal conditions, generalized solution.

Original article submitted 24/VII/2013;
revision submitted 09/VIII/2013.