Математическое моделирование

УДК 517.958:57

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СОХРАНЕНИЯ ПОПУЛЯЦИЙ

***О. С. Афанасьева*[1]*, Г. Ф. Егорова*[1]*, Л. В. Кайдалова*[2]**

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, 1-й Безымянный пер., 18

E-mails: afa@pm.samgtu.ru, galahouse2009@mail.ru, ludmila.kaid@gmail.com

Предлагается система разностных уравнений, описывающая процесс промышленного вылова рыб с сохранением численности их популяции. На основе исследования этой модели прогнозируется изменение численности популяции и, соответственно, объемов вылова. Анализируется влияние на модель параметров, отвечающих за скорость вылова; коэффициентов, характеризующих скорость роста популяций и влияние добавочного члена уравнения, описывающего увеличение численности популяции за счет рыбных ферм. Предложенная модель и результаты могут быть, в частности, использованы для решения проблем уменьшения численности и исчезновения ценных пород рыб.

Ключевые слова: *система разностных уравнений, параметры, скорость роста, популяция.*

В связи с возрастающим фактором антропогенного воздействия на окружающую среду наибольшую актуальность приобретает проблема не только резкого уменьшения численности ценных промысловых пород животных, рыб и растений, но и сокращения разнообразия видов представителей животного и растительного мира. Анализ литературы [1,2] показал, что модели роста популяций и модели промышленной добычи особей этих популяций существуют отдельно и никак не связаны между собой. Между тем главным фактором, влияющим на численность промысловых пород животных и рыб, оказывают не природные условия их обитания и не скорость их естественного вымирания, а деятельность человека. Поэтому для аналитического описания процесса вылова рыб в промышленных масштабах с учётом восполнения их популяции за счёт рыбных хозяйств выбрана модель [3], предложенная для учёта использования природных ресурсов:

$$
\begin{aligned}
X_{i+1} &= p_0\frac{X_iR_i}{R_i+N_0X_i}+p_1\frac{A_iX_i}{A_i+N_1X_i},\\
R_{i+1} &= q_0R_i-R_i\frac{p_0X_i}{R_i+N_0X_i}+bA(i-\Delta_i),\\
A_{i+1} &= q_1A_i-A_i\frac{p_1X_i}{A_i+N_1X_i}+h.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ольга Сергеевна Афанасьева (к.т.н.), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Галина Федоровна Егорова* (к.т.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Людмила Витальевна Кайдалова* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

Здесь i — номер путины; R_i — численность популяции рыб, обитающих в природных условиях; X_i — объём вылова во время путины под номером i; A_i — численность популяции, выращиваемой на фермах; p_0, p_1 — прирост объёмов вылова в природных условиях и на фермах; N_0, N_1 — коэффициенты, характеризующие реальные численности популяций, доступные к вылову в морях и на фермах; q_0, q_1 — коэффициенты, отвечающие за скорости роста популяций в дикой природе и в неволе (рассматриваем случай $q_0 < 1$, $q_1 < 1$, так как в модели не учитываются естественные факторы, ограничивающие рост популяций, такие как смертность от недостатка пищи, неблагоприятных условий существования и тому подобное); h — прирост популяции, обитающей на ферме, за счёт природных ресурсов; b — параметр восполнения популяции за счёт ферм; Δ_i — количество путин, в течение которых на фермах происходит выращивание молоди, предназначенной для пополнения природных ресурсов. Тогда

$$\frac{R/N_0}{X + R/N_0}, \quad \frac{A/N_1}{X + A/N_1}$$

— части, оставшиеся от общего количества популяции после вылова, соответственно, в морях и на фермах. Исследуем систему (1) при $b = 0$ и $h = 0$, т. е. когда пополнения популяции за счёт ферм не происходит.

Так как в правой части первого уравнения системы (1) все члены положительны, X_i сначала будет возрастать.

Из второго и третьего уравнений системы можно сделать вывод о том, что численность популяции R_i, обитающей в природных условиях, и численность популяции A_i, выращиваемой на фермах в это же время, будут убывать, так как

$$R_{i+1} - q_0 R_i = -\frac{p_0 X_i R_i}{R_i + N_0 X_i}. \tag{2}$$

Из (2) следует $R_i > R_{i+1}/q_0$.

Аналогично получим

$$A_{i+1} - q_1 A_i = -\frac{p_1 X_i A_i}{A_i + N_1 X_i}, \tag{3}$$

откуда $A_i > A_{i+1}/q_1$.

Отсюда следует, что X_i с какой-то путины также начнет убывать. Если к (3) добавить некоторую константу h, характеризующую резервное количество рыбы в хозяйствах, не подлежащее вылову, то A_i будет стремиться к ней.

Из (2) определим скорость, с которой R_i стремится к нулю. После элементарных преобразований, устремляя R_i к нулю, получим

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = \frac{q_0 N_0 - p_0}{N_0} \stackrel{\text{def}}{=} d_0. \tag{4}$$

Аналогично из (3) определим скорость, с которой уменьшается A_i:

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{q_1 N_1 - p_1}{N_1} \stackrel{\text{def}}{=} d_1. \tag{5}$$

Установим, начиная с какой путины значения X_i начнут убывать. Для этого рассмотрим отношение, получающееся из первого уравнения системы (1):

$$\begin{gathered} \frac{X_{i+1}}{X_i} = p_0 \frac{R_i}{R_i + N_0 X_i} + p_1 \frac{A_i}{A_i + N_1 X_i} < 1, \\ \frac{p_0 R_i N_1 + p_1 A_i N_0}{N_0 N_1} < X_i. \end{gathered} \tag{6}$$

Преобразуем формулу (2) к следующему виду:

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = q_0 - \frac{p_0 X_i}{R_i + N_0 X_i} = \frac{q_0 R_i + (q_0 N_0 - p_0) X_i}{R_i + N_0 X_i},$$

если $R_i \to 0$, $i \to \infty$, то в пределе

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = \frac{q_0 N_0 - p_0}{N_0}.$$

Таким образом, начиная с некоторой путины i, $R_{i+1} = R_i d_0$, где $d_0 = (q_0 N_0 - p_0)/N_0$ — безразмерный коэффициент, характеризующий изменение численности популяции после очередного вылова. Не ограничивая общности, можем принять, что $R(n) = R_1 d_0^{n-1}$. Аналогичные рассуждения приведут нас к такому же результату для $A(n) = A_1 d_1^{n-1}$, где $d_1 = (q_1 N_1 - p_1)/N_1$.

Выявленные закономерности позволяют без решения исходной системы уравнений предсказывать номер путины n при заданных значениях параметров, после которой R_i и A_i начнут уменьшаться, что приведёт к уменьшению X_i. В частности, можно было бы в пространстве параметров получить критические точки, кривые или поверхности, являющиеся границами, отделяющими области неограниченного роста R_i, A_i, X_i и области их стремления к нулю.

Тогда с учётом (4) и (5) получаем $R_n = R_1 d_0^{n-1}$, $A_n = A_1 d_1^{n-1}$ и, преобразуя (6), окончательно получим

$$\frac{p_0 N_1 R_1 d_0^{n-1} + p_1 N_0 A_1 d_1^{n-1}}{N_0 N_1 X_1} < (d_0 + d_1)^{n-1}.$$

Заменив в последнем соотношении знак неравенства на равенство, можно определить n из следующего уравнения:

$$\frac{(p_0 N_1 R_1 + p_1 N_0 A_1) \min\left(d_0^{n-1}, d_1^{n-1}\right)}{N_0 N_1 X_1} = (d_0 + d_1)^{n-1}. \tag{7}$$

В качестве примера рассмотрим вылов осетровых в Каспийском море [1,4]. Найдём решение системы уравнений (1) со следующими значениями коэффициентов: $N_0 = 10$; $N_1 = 5$; $p_0 = 1{,}53$; $p_1 = 1{,}31$; $q_0 = 0{,}99$; $q_1 = 0{,}89$ [1] и начальными условия $X_1 = 0{,}001$, $R_1 = 25$, $A_1 = 5$ (единицы измерения: период путины — год, объём вылова — тысячи тонн). Оценим период времени, в течение которого объём вылова достигает максимального значения:

$$d_0 = \frac{q_0 N_0 - p_0}{N_0} = 0{,}837, \quad d_1 = \frac{q_1 N_1 - p_1}{N_1} = 0{,}628.$$

Подставляя все численные значения в (7) и решая это уравнение относительно n, получим $n = 10$ — номер путины, начиная с которой X_i начнёт уменьшаться. Естественно, если начальное значение добычи X_1 будет иметь меньшее значение, то номер путины, после которой начнётся спад вылова, увеличится.

Результаты численного решения системы (1) при $h = 0$, $b = 0$ (сплошные линии) и $h = 0{,}15$, $b = 0$ (штриховые линии) приведены на рис. 1. Здесь i дано в годах.

Анализ решения показывает, что при наличии изначальной крупной популяции осетровых (или других представителей фауны) в дикой природе и отсутствии пополнения популяции за счёт ферм ($b = 0$) наращивание объёмов добычи возможно лишь в первое время. Затем численность популяции катастрофически сокращается, а уровень добычи стабилизируется на уровне объёмов производства на фермах. Эти выводы подтверждаются статистической диаграммой, представленной на рис. 2 [4, с. 19].

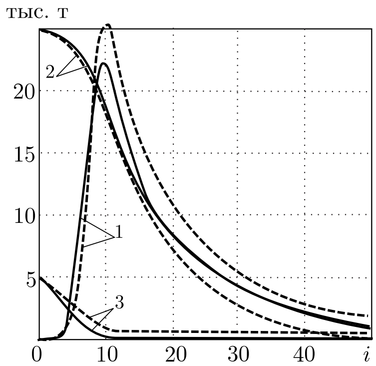

Рис. 1. Решение системы (1): 1 — объём вылова X_i, 2 — численность популяции R_i в природных условиях, 3 — численность популяции A_i на фермах; $h = 0$, $b = 0$ — сплошные линии; $h = 0{,}15$, $b = 0$ — штриховые линии

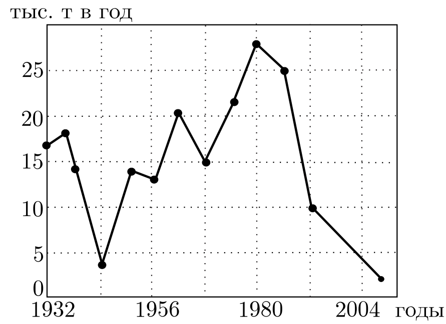

Рис. 2. Совокупный вылов осетра в Каспийском море с 1932 по 2007 гг.

Как видно из рис. 2, объём вылова осетровых существенно снижался только в середине сороковых годов, затем с некоторыми спадами объёмы вылова возрастали. Если проанализировать рост объёма вылова начиная с 1968 года, можно сделать вывод, что за десять лет он достиг своего максимума, после чего начался его быстрый спад, связанный с катастрофическим сокращением численности популяции осетровых, как это видно из решения системы (1).

Результаты численного решения системы (1) при $b = 0{,}1$, $\Delta_i = 3$ (сплошные линии) и при $b = 0{,}1$, $\Delta_i = 1$ (штриховые линии) приведены на рис. 3. Анализ решения показывает, что пополнение природных ресурсов молодью, выращиваемой на фермах, обеспечивает стабильный рост численности этих популяций и объёмов их отлова.

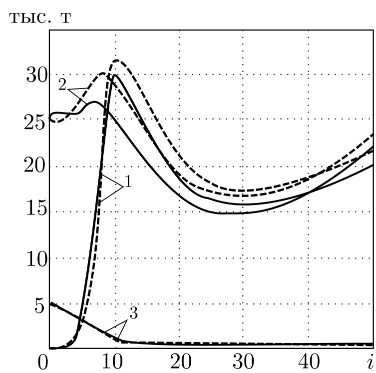

Рис. 3. Решение системы (1): 1 — объём вылова X_i, 2 — численность популяции R_i в природных условиях, 3 — численность популяции A_i на фермах; $b = 0{,}1$; $\Delta_i = 3$ — сплошные линии; $b = 0{,}01$; $\Delta_i = 1$ — штриховые линии

Таким образом, результаты расчётов, проведённых по предложенной модели, свидетельствуют о том, что модель качественно отражает процесс истощения природных ресурсов и что без восполнения ресурсов осетровых и любых других видов животных и рыб их запасы довольно быстро будут уменьшаться и могут исчезнуть совсем.

Выводы. Предложена новая модель (1) для описания динамики популяции осетровых, которая в отличие от известных моделей [1, 2] учитывает промышленный вылов. Анализ решений системы разностных уравнений (1) показал качественное совпадение результатов, полученных с помощью предложенной модели, и реальных статистических данных [4].

Предлагаемая авторами модель может быть использована для исследования динамики популяций любых промысловых пород животных и рыб.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Г. Ю. Ризниченко*, Математические модели в биофизике и экологии. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 184 с. [*G. Yu. Riznichenko*, Mathematical

models in biophysics and ecology. Moscow, Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Issledovaniy, 2003. 184 pp.]

2. *А. М. Нахушев*, Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. [*A. M. Nakhushev*, Equations of Mathematical Biology. Moscow: Vyssh. Shk., 1995. 301 pp.]
3. *Е. Г. Пугачева, К. Н. Соловьенко*, Самоорганизация социально-экономических систем. Иркутск: БГУЭП, 2003. 172 с. [*E. G. Pugacheva, K. N. Solovienko*, Self-Organization of Socio-Economic Systems. Irkutsk: BGUEP, 2003. 172 pp.]
4. Каспийское море. Состояние окружающей среды – 2011: Доклад временного Секретариата Рамочной конвенции по защите морской среды Каспийского моря и бюро управления и координации проекта «КАСПЭКО»; http://www.caspianenvironment.org/newsite/DocCenter/2011/Caspian SoE_Russian-05-08-11.pdf, 2010. 112 с.; англ. пер.: Caspian Sea – State of Environment 2011: Report by the interim Secretariat of the Framework Convention for the Protection of the Marine Environment of the Caspian Sea and the Project Coordination Management Unit of the "CaspEco" project; http://www.caspianenvironment.org/newsite/DocCenter/2011/Caspian SoE English_05-08-11.pdf, 2010. 102 pp.

Поступила в редакцию 01/VI/2013;
в окончательном варианте — 22/VIII/2013.

MSC: 37N25

MATHEMATICAL MODELING OF THE CONSERVATION OF POPULATIONS

O. S. Afanas'eva[1]***, G. F. Egorova***[1]***, L. V. Kaidalova***[2]

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
[2] Samara State Transport University,
18, First Bezimyanniy per., Samara, 443066, Russia.

E-mails: afa@pm.samgtu.ru, galahouse2009@mail.ru, ludmila.kaid@gmail.com

The system of difference equations describing the process of industrial fish catching while their abundance is maintained is proposed. Population size changing and, consequently, the volume of catch are predicted on the basis of this model study. The impact on the model of the parameters responsible for catch rate and factors that characterize the population growth rate is analyzed taking into account the terms of the equation describing the increase in the population size at the expense of fish farms. The proposed model and the results, in particular, can be used to solve problems of the size reducing of population of the rare breed fish and disappearance of valuable species of fish such as sturgeon.

Key words: *system of difference equations, parameters, growth rate, population.*

Original article submitted 01/VI/2013;
revision submitted 22/VIII/2013.

Olga S. Afanas'eva (Ph. D. (Tehn.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Galina F. Egorova* (Ph. D. (Tehn.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Ludmila V. Kaidalova* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Hight Mathematics.