Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 4 (33). С. 25–33

УДК 517.956

ОБ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ КРИВЫХ СИСТЕМ ТИПА УИТТЕКЕРА

Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова,
Казахстан, 030000, Актобе, ул. Бр. Жубановых, 263.

E-mail: tasmam@rambler.ru

Изучены регулярные и иррегулярные особые кривые специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. С помощью понятия ранга и антиранга установлены необходимое и достаточное условия существования регулярного решения, первые и вторые необходимые условия существования нормально-регулярного решения. Определены виды решения вблизи регулярных и иррегулярных особенностей. Рассмотрено конкретное применение, связанное со специальными функциями двух переменных.

Ключевые слова: *особые точки, дифференциальные уравнения, метод Фробениуса—Латышевой.*

Результаты данной работы докладывались на Третьей Международной конференции «Математическая физика и её приложения» (27 августа – 1 сентября 2012 г., г. Самара)

Предварительные сведения. Изучением особых точек и их классификацией, а также построением аналитических решений в окрестности особых точек занимались многие известные математики прошлого, такие как К. Вейерштрасс, Л. Фукс, Г. Фробениус, Я. Горн, Л. Томе и др. Существуют различные классификации особых точек: подвижные и неподвижные, существенные и несущественные, регулярные и иррегулярные и др. Неподвижными особыми точками обладают линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Аналитический характер решений этих уравнений вполне определяется их поведением в области неподвижных особых точек. С регулярной особой точкой связано понятие «регулярное решение». Введение термина «регулярное решение» связано с имением Л. Томе [1]. Линейные дифференциальные уравнения, решения которых имеют все особые точки регулярными, называются уравнениями класса Фукса [2]. К. Я. Латышева регулярность и иррегулярность особых точек определяет [3] с помощью понятия ранга $p = 1 + k$ (k — подранг), введённого А. Пуанкаре [4], и антиранга $m = -1 - \chi$ (χ — антиподранг), введенного Л. Томе.

Обобщение понятия особых точек на функции многих переменных было дано К. Вейерштрассом в 1880 г. Было установлено, что аналитическая функция двух и более переменных не может иметь изолированные особые точки. Малоизученными остаются особенности системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, где особенностями являются особые линии или пересечения нескольких особых кривых.

Целью данной работы является установление регулярных и иррегулярных особых кривых системы дифференциальных уравнений в частных производ-

Жаксылык Нурадинович Тасмамбетов (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. информатики и вычислительной техники.

ных второго порядка

$$\begin{array}{l} P_0(x,y)Z_{xx} + P_1(x,y)Z_y + P_2(x,y)Z = 0, \\ Q_0(x,y)Z_{yy} + Q_1(x,y)Z_x + Q_2(x,y)Z = 0. \end{array} \tag{1}$$

Здесь коэффициенты $P_i = P_i(x,y)$ и $Q_i = Q_i(x,y)$, $i = 1, 2$ — многочлены двух переменных:

$$P_i(x,y) = x^{\pi_i} y^{\delta_i} \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,n} a^{(i)}_{\mu,\,\nu} x^\mu y^\nu, \quad Q_i(x,y) = x^{\gamma_i} y^{\lambda_i} \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,n} b^{(i)}_{\mu,\,\nu} x^\mu y^\nu, \tag{2}$$

где π_i, δ_i, γ_i, λ_i — целые неотрицательные числа.

Требуется изучить возможности установления основных особых кривых, исследовать их регулярность и иррегулярность и построить вблизи этих особенностей соответствующие им регулярные, а также иррегулярные решения.

Допустим, что система (1) с коэффициентами вида (2) совместная. Согласно общей теории таких систем [5], при выполнении условия совместности система (1), (2) имеет четыре линейно независимых частных решения $Z_k(x,y)$, а общее решение системы представляется в виде

$$Z(x,y) = C_1 Z_1(x,y) + C_2 Z_2(x,y) + C_3 Z_3(x,y) + C_4 Z_4(x,y),$$

то есть общее решение системы зависит от четырёх произвольных постоянных.

Классификация регулярности и иррегулярности особых кривых. Данную классификацию лучше проводить для конкретных систем вида

$$x^2 p_0(x,y) Z_{xx} + y p_1(x,y) Z_y + p_2(x,y) Z = 0,$$
$$y^2 g_0(x,y) Z_{xx} + x g_1(x,y) Z_x + g_2(x,y) Z = 0,$$

где $p_i = p_i(x,y)$ и $g_i = g_i(x,y)$, $i = 0, 1, 2$ — полиномы двух переменных второго порядка:

$$p_i(x,y) = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{2} a^{(i)}_{\mu,\,\nu} x^\mu y^\nu, \quad g_i(x,y) = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{2} b^{(i)}_{\mu,\,\nu} x^\mu y^\nu;$$
$$a^{(i)}_{0,0} \neq 0, \quad b^{(i)}_{0,0} \neq 0; \quad i = 0, 1, 2.$$

Это соответствует случаю, когда в (2) $m = n = 2$.

Приравнивая к нулю коэффициенты при вторых частных производных Z_{xx} и Z_{yy}, то есть полагая $x^2 p_0(x,y) = 0$ и $y^2 g_0(x,y) = 0$, для определения особых кривых в раскрытом виде получим следующую систему уравнений

$$\begin{array}{l} x^2 \left(a^{(0)}_{00} + a^{(0)}_{10} x + a^{(0)}_{01} y + a^{(0)}_{11} xy + a^{(0)}_{20} x^2 + a^{(0)}_{02} y^2 \right) = 0, \\ y^2 \left(b^{(0)}_{00} + b^{(0)}_{10} x + b^{(0)}_{01} y + b^{(0)}_{11} xy + b^{(0)}_{20} x^2 + ab^{(0)}_{02} y^2 \right) = 0. \end{array} \tag{3}$$

Совместное решение (3) позволяет определить особые кривые заданной системы.

В работе [6] установлен простой признак определения регулярности и иррегулярности особых кривых. Действительно, пусть задана система вида

$$\begin{aligned} &x^2(a_{00}^{(0)}+a_{10}^{(0)}x)Z_{xx}+y(a_{00}^{(1)}+a_{10}^{(1)}x)Z_y+\\ &\qquad +(a_{00}^{(2)}+a_{10}^{(2)}x+a_{01}^{(2)}y+a_{11}^{(2)}xy+a_{20}^{(0)}x^2+a_{02}^{(0)}y^2)Z=0,\\ &y^2(b_{00}^{(0)}+b_{01}^{(0)}y)Z_{yy}+x(b_{00}^{(1)}+b_{01}^{(1)}y)Z_x+\\ &\qquad +(b_{00}^{(2)}+b_{10}^{(2)}x+b_{01}^{(2)}y+b_{11}^{(2)}xy+b_{20}^{(0)}x^2+b_{02}^{(0)}y^2)Z=0 \end{aligned} \tag{4}$$

с известными постоянными коэффициентами.

Особенности (особые кривые) системы: $(0,0)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)},0)$, $(0,-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)})$, $(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)},-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)})$, (∞,∞).

Правило 1. Если в системе (4) коэффициенты $a_{00}^{(0)}=0$ и $b_{00}^{(0)}=0$, то особенность $(0,0)$ является особой иррегулярной. Когда они отличны от нуля, особенность $(0,0)$ является особой регулярной. В этом случае получим систему с регулярной особенностью. Соответствующее им решение имеет вид

$$Z_i(x,y)=x^{\rho_i}y^{\sigma_i}\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}C_{\mu,\,\nu}^{(i)}x^{\mu}y^{\nu},\qquad C_{0,\,0}^{(i)}\neq 0,\quad i=1,2,3,4, \tag{5}$$

где ρ_i, σ_i, $C_{\mu,\nu}^{(i)}$ — известные постоянные.

Решение системы с иррегулярной особенностью представляется в виде

$$Z(x,y)=e^{Q(x,y)}x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}A_{\mu,\,\nu}x^{\mu}y^{\nu},\qquad A_{0,\,0}\neq 0, \tag{6}$$

где ρ, σ, $A_{\mu,\,\nu}$ — неизвестные постоянные; $Q(x,y)$ — многочлен двух переменных:

$$Q(x,y)=\frac{\alpha_{p0}}{p}x^p+\frac{\alpha_{0p}}{p}y^p+\cdots+\alpha_{11}xy+\alpha_{10}x+\alpha_{01}y \tag{7}$$

с неизвестными коэффициентами α_{p0}, α_{0p}, $\ldots$, α_{11}, α_{10}, α_{01}. Решение вида (6) называется нормально-регулярным. В случае функции одной переменной для решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особенности $x=0$ термин «нормально-регулярное решение» впервые введён профессором Киевского государственного университета К. Я. Латышевой.

Правило 2. Если в системе (4) коэффициенты $a_{10}^{(0)}=0$ и $b_{01}^{(0)}=0$, то особенность (∞,∞) является особой иррегулярной. Когда они отличны от нуля, особенность (∞,∞) является особой регулярной. Тогда получим систему с регулярной особенностью вблизи (∞,∞) с соответствующим решением:

$$Z_i(x,y)=x^{\rho_i}y^{\sigma_i}\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\,\nu}^{(i)}x^{-\mu}y^{-\nu},\quad B_{0,\,0}^{(i)}\neq 0, \tag{8}$$

где ρ_i, σ_i, $B_{\mu,\nu}^{(i)}$ — неизвестные постоянные. Решение системы вблизи иррегулярной особенности (∞,∞) представляется в виде

$$Z(x,y)=e^{Q(x,y)}x^{\rho}y^{\sigma}\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\,\nu}x^{-\mu}y^{-\nu},\quad B_{0,\,0}\neq 0, \tag{9}$$

где ρ, σ, $B_{\mu,\nu}$ — неизвестные коэффициенты; $Q(x,y)$ — многочлен двух переменных вида (7) и является общим для решений (6) и (9). Выражение (9) является формальным решением в виде нормальных рядов Томе двух переменных.

В общем случае регулярность и иррегулярность особенностей системы (1), (2) устанавливаются с помощью понятия ранга p и антиранга m. Для таких систем с полиномиальными коэффициентами одновременно можно говорить и о ранге $p = k + 1$ и антиранге $m = -1 - \chi$ системы, то есть можно определить как величину подранга k:

$$k = \max \frac{\tau_l - \tau_0}{l}, \quad l = 1, 2,$$

так и величину антиподранга χ:

$$\chi = \min \frac{\tau_j - \tau_0}{j}, \quad j = 1, 2,$$

где τ_l и τ_j совпадают с одним из чисел π_i, δ_i, γ_i и λ_i, $i = 0, 1, 2$.

На самом деле, если $x = 0$ является особой регулярной кривой системы, то выполняется неравенство вида

$$\pi_0 \leqslant \pi_s + s, \quad s = 1, 2. \tag{10}$$

Если хотя бы при одном значении s выполняется неравенство

$$\pi_0 > \pi_s + s, \quad s = 1, 2,$$

то $x = 0$ является особой иррегулярной.

Из (10) следует, что для регулярной особой точки

$$\pi_s - \pi_0 + s \quad \text{или} \quad \frac{\pi_s - \pi_0}{s} \geqslant -1, \quad s = 1, 2.$$

Отсюда вытекает, что если $x = 0$ — особая регулярная кривая, то число $m_s \leqslant 0$, а когда особая кривая $x = 0$ — иррегулярная, число $m_s > 0$.

Такие же условия должны выполняться и относительно переменной y.

Используя понятия ранга и антиранга, можно доказать ряд теорем.

Теорема 1. *Система* (1), (2) *имеет регулярные решения в виде рядов двух переменных* (5), *сходящихся вблизи особенности* $(x = 0, y = 0)$ *в том и только в том случае, когда антиранги системы* m_s, $s = 1, 2$, *равны нулю.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству из [7].

Следствие. *Для того чтобы система* (1), (2) *имела четыре регулярных решения* $Z_j(x, y)$, $j = 1, 2, 3, 4$, *вблизи особенности* $(x = 0, y = 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы антиподранги системы* $\chi_s \geqslant -1$, $s = 1, 2$.

Аналогичные теоремы имеют место относительно ранга системы. Определение величины ранга p и антиранга m позволит нам: во-первых, определить степень многочлена $Q(x,y)$; во-вторых, произвести классификацию особых кривых по виду заданных коэффициентов.

Если одновременно $p \leqslant 0$ и $m \leqslant 0$, то особенности $(0, 0)$ и (∞, ∞) регулярные и вблизи них можно построить регулярные решения вида (5) и (8).

Построение иррегулярных решений. Нормально-регулярное решение (6) можно построить только тогда, когда ранг $p > 0$ и антиранг $m \leqslant 0$, то есть когда особенность (∞, ∞) — иррегулярная, а особенность $(0, 0)$ — регулярная.

При построении нормально-регулярного решения (6) важное место имеет преобразование

$$Z(x, y) = e^{Q(x,y)} U(x, y) \tag{11}$$

над системой (1), и полученную систему назовём вспомогательной. Это позволяет нам рассматривать правую часть нормально-регулярного решения (6) как произведение двух сомножителей:

а)

$$e^{Q(x,y)} \tag{12}$$

— определяющий множитель с неопределёнными коэффициентами α_{p0}, α_{0p}, …, α_{11}, α_{10} и α_{01} многочлена (7);

б)

$$x^\rho y^\sigma \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\,\nu} x^\mu y^\nu, \quad A_{0,\,0} \neq 0$$

— обобщённый степенной ряд двух переменных, представляющий решение вблизи особенности (0,0), где ρ, σ, $A_{\mu,\,\nu}$ — неизвестные постоянные.

Для нахождения неизвестных коэффициентов многочлена (7) и обобщённого степенного ряда (5) применяем методику, приведённую в [8]. Это позволяет получить ряд утверждений для рассматриваемой системы (1), (2).

Неопределённые коэффициенты многочлена $Q(x, y)$ определяющего множителя (12) находятся из так называемых систем характеристических уравнений

$$b_{n0}^{(j)} = 0,\ b_{0n}^{(j)} = 0,\ b_{n-1,1}^{(j)} = 0,\ \ldots,\ b_{10}^{(j)} = 0,\ b_{00}^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \tag{13}$$

полученных из вспомогательной системы приравниванием к нулю коэффициентов при наивысших степенях независимых переменных x и y.

Первое необходимое условие существования нормально-регулярного решения связано с определением неизвестных коэффициентов α_{p0}, α_{0p}, …, α_{01} многочлена $Q(x, y)$ и формулируется в следующем виде.

Теорема 2. *Для того чтобы вспомогательная система имела хотя бы одно решение вида* (6), *необходимо выполнение равенства* (13).

Второе необходимое условие связано с определением неизвестных постоянных ρ, σ, $A_{\mu,\,\nu}$ обобщённого степенного ряда двух переменных (5), представляющего решение вспомогательной системы вблизи особенности $(0, 0)$. Приведём формулировку второго необходимого условия.

Теорема 3. *Для существования у системы* (1) *с коэффициентами* (2) *решения вида* (6) *необходимо, чтобы пара* (ρ, σ) *была корнем системы определяющих уравнений относительно особенности* $(0, 0)$ *вида*

$$a_{00}^{(0)}\rho(\rho - 1) + a_{00}^{(1)}\sigma + a_{00}^{(2)} = 0, \quad b_{00}^{(0)}\sigma(\sigma - 1) + b_{00}^{(1)}\rho + b_{00}^{(2)} = 0, \tag{14}$$

полученных из вспомогательной системы путём подстановки вместо неизвестной $Z(x, y) = x^\rho y^\sigma$.

Система определяющих уравнений (14) имеет до четырёх пар корней (ρ_k, σ_k), $k = 1, 2, 3, 4$, действительных и комплексных. Поэтому система (1), (2) может иметь до четырёх линейно независимых частных решений вида (6), если выполняются условия теорем 2 и 3. Тем самым и устанавливается вид нормально-регулярного решения. Важно установить, имеют ли системы характеристических уравнений (13) простые или кратные пары корней. Следующее утверждение обеспечивает существование четырёх решений вида (6).

Теорема 4. *Если системы характеристических уравнений* (13) *имеют только простые пары корней, то система* (1), (2) *при положительном ранге* $p > 0$ *и антиранге* $m \leqslant 0$ *допускает четыре нормально-регулярных решения вида* (13).

Аналогичные утверждения имеют место и для нормальных решений вида (8) вблизи иррегулярной особенности (∞, ∞).

Применение этих результатов покажем на конкретном примере.

Пример. Пусть задана система

$$\begin{aligned} &x^2 Z_{xx} - xyZ_y + \Big(-\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{2} + kx + \frac{1}{4} - \mu^2\Big)Z = 0,\\ &y^2 Z_{yy} - xyZ_x + \Big(-\frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} + ky + \frac{1}{4} - \nu^2\Big)Z = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Это известная система Уиттекера, и для неё выполняются все условия совместности [5]. Применяя вышеприведенный метод Фробениуса—Латышевой, требуется определить регулярные и иррегулярные особенности заданной системы и построить вблизи этих особенностей регулярные и иррегулярные решения.

Определим особенности системы. Легко заметить, что система (15) является частным случаем системы (4). Поэтому на основании вышеприведенных правил 1 и 2 особенность $(0, 0)$ является особой регулярной, а (∞, ∞) — особой иррегулярной. Это подтверждается также определением ранга и антиранга. Действительно, по наибольшим степеням независимых переменных x и y определим подранги: $k_1' = 0$, $k_1'' = 0$, а ранг $p = 1 + k = 1$. Тогда преобразование (11) запишется в виде

$$Z = \exp(\alpha_{10}x + \alpha_{01}y)\Phi(x, y),$$

где α_{10} и α_{01} — неопределённые коэффициенты, которые следует определить.

В преобразованной системе

$$\begin{aligned} &x^2\Phi_{xx} + 2\alpha_{10}x^2\Phi_x - xy\Phi_y +\\ &\qquad +\big\{(\alpha_{10}^2 - 1/4)x^2 - (\alpha_{01}^2 - 1/2)xy + kx + 1/4 - \mu^2\big\}\Phi = 0,\\ &y^2\Phi_{yy} + xy\Phi_x + 2\alpha_{01}^2 x^2\Phi_y +\\ &\qquad +\big\{(\alpha_{01}^2 - 1/4)y^2 - (\alpha_{10}^2 + 1/2)xy + ky + 1/4 - \nu^2\big\}\Phi = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

приравнивая к нулю коэффициенты при наибольших степенях независимых переменных при неизвестной $\Phi(x, y)$, определим систему характеристических уравнений вида (13):

$$f_{10}^{(1)}(\alpha_{10}, \alpha_{01}) = \alpha_{10}^2 - 1/4 = 0, \quad f_{01}^{(2)}(\alpha_{10}, \alpha_{01}) = \alpha_{01}^2 - 1/4 = 0. \tag{17}$$

Система (16) — вспомогательная. Система характеристических уравнений (17) имеет четыре пары корней:

$$\begin{aligned} &(\alpha_{10}^{(1)}, \alpha_{01}^{(1)}) = (1/2, 1/2), \quad &(\alpha_{10}^{(1)}, \alpha_{01}^{(2)}) = (1/2, -1/2), \\ &(\alpha_{10}^{(2)}, \alpha_{01}^{(1)}) = (-1/2, 1/2), \quad &(\alpha_{10}^{(2)}, \alpha_{01}^{(2)}) = (-1/2, -1/2), \end{aligned} \tag{18}$$

определяющие четыре многочлена первой степени вида (7):

$$Q_i(x, y) = \alpha_{10}^{(i)} x + \alpha_{01}^{(i)} y, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Следует отметить, что степень многочлена $Q(x, y)$ определяется величиной ранга. В (7) $p = 1$, то есть наибольшая степень многочлена $Q(x, y)$ равна единице. Четыре пары $(\alpha_{10}^{(l)}, \alpha_{01}^{(l)})$, $l = 1, 2$, в (18) определяют четыре системы из вспомогательной системы (16). Они называются присоединёнными. Итак, применение первого необходимого условия позволило нам определить четыре системы. Решения каждой системы следует находить в отдельности. Для каждой из них должны существовать по четыре линейно независимых решения. Таким образом, исходная система (1), (2) имеет всего 16 линейно независимых решений. Однако подробное исследование показывает, что из вышеназванных четырёх систем только система

$$\begin{aligned} &x^2 \Phi_{xx} + x^2 \Phi_x - xy \Phi_y + \left\{ kx + 1/4 - \mu^2 \right\} \Phi = 0, \\ &y^2 \Phi_{yy} - y^2 \Phi_y - xy \Phi_x + \left\{ ky + 1/4 - \nu^2 \right\} \Phi = 0 \end{aligned}$$

имеет четыре линейно независимых частных решения. Все они выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Горна $\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= x^{1/2+\mu} y^{1/2+\nu} \Psi_2(\mu + \nu + 1 - k, 2\mu + 1, 2\nu + 1; x, y), \\ \Phi_2(x, y) &= x^{1/2+\mu} y^{1/2-\nu} \Psi_2(\mu - \nu + 1 - k, 2\mu + 1, 2\nu - 1; x, y), \\ \Phi_3(x, y) &= x^{1/2-\mu} y^{1/2+\nu} \Psi_2(-\mu + \nu + 1 - k, 2\mu - 1, 2\nu + 1; x, y), \\ \Phi_4(x, y) &= x^{1/2-\mu} y^{1/2-\nu} \Psi_2(-\mu - \nu + 1 - k, 2\mu - 1, 2\nu - 1; x, y). \end{aligned}$$

Это показывается выполнением второго необходимого условия (теорема 3).

Система определяющих уравнений относительно особенности $(0, 0)$

$$f_{00}^{(1)}(\rho, \sigma) = \rho(\rho - 1) + 1/4 - \mu^2 = 0, \quad f_{00}^{(2)}(\rho, \sigma) = \sigma(\sigma - 1) + 1/4 - \nu^2 = 0$$

имеет четыре пары корней:

$$\begin{aligned} (\rho_1, \sigma_1) &= (1/2 + \mu, 1/2 + \nu), \quad (\rho_1, \sigma_2) = (1/2 + \mu, 1/2 - \nu), \\ (\rho_2, \sigma_1) &= (1/2 - \mu, 1/2 + \nu), \quad (\rho_2, \sigma_2) = (1/2 - \mu, 1/2 - \nu). \end{aligned}$$

Выполнение двух необходимых условий обеспечивает существование четырёх нормально-регулярных решений:

$$\begin{aligned} Z_1(x, y) &= \exp(-x/2 - y/2) \Phi_1(x, y) = M_{k,\,\mu,\,\nu}(x, y), \\ Z_2(x, y) &= \exp(-x/2 - y/2) \Phi_2(x, y) = M_{k,\,\mu,\,-\nu}(x, y), \\ Z_3(x, y) &= \exp(-x/2 - y/2) \Phi_3(x, y) = M_{k,\,-\mu,\,\nu}(x, y), \\ Z_4(x, y) &= \exp(-x/2 - y/2) \Phi_4(x, y) = M_{k,\,-\mu,\,-\nu}(x, y). \end{aligned}$$

Общее решение таких систем зависит [5] от четырёх произвольных постоянных. Поэтому общее решение (15) выражается следующим образом:

$$Z(x,y) = C_1 M_{k,\,\mu,\,\nu}(x,y) + C_2 M_{k,\,\mu,\,-\nu}(x,y) + \\ + C_3 M_{k,\,-\mu,\,\nu}(x,y) + C_4 M_{k,\,-\mu,\,-\nu}(x,y)$$

и найденные таким путём все частные решения совпадают с решениями, приведёнными в [5], где $M_{k,\,\pm\mu,\,\pm\nu}(x,y)$ — функции Уиттекера двух переменных.

Нормальные решения не существуют, так как не выполняется второе необходимое условие, поскольку отсутствует система определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞).

Таким образом, благодаря применению метода Фробениуса—Латышевой нам полностью удалось исследовать всевозможные особые кривые системы (1), (2), в частности, системы Уиттекера, решениями которой являются функции Уиттекера двух переменных. Системы вида (1), (2), решениями которых являются специальные функции двух переменных, остаются малоизученными. Отсутствует общий метод исследования. Поэтому исследования в этом направлении ждут своего продолжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *L. W. Thomé*, “Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen” // *J. Reine Angew. Math.*, 1872. Vol. 1872, no. 74. Pp. 193–213.

2. *L. Fuchs*, “Ueber Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden” // *J. Reine Angew. Math.*, 1873. Vol. 1873, no. 76. Pp. 177–213.

3. *К. Я. Латышева, Н. И. Терещенко*, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1970. 394 с. [*K. Ya. Latysheva, N. I. Tereshchenko*, Lectures on the Analytic Theory of Differential Equations and Their Applications. Kiev: Mathematics Institute, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1970. 394 pp.]

4. *H. Poincaré*, “Sur les intégrales irrégulières” // *Acta Math.*, 1886. Vol. 8, no. 1. Pp. 295–344.

5. *P. Appell, J. Kampé de Fériet*, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d’Hermite. Paris: Gauthier-Villars, 1926. vii+434 pp.

6. *Ж. Н. Тасмамбетов*, Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса–Латышевой: Препр. /АН УССР. Институт математики: 91.29. Киев, 1991. 44 с. [*Zh. N. Tasmambetov*, The construction of solutions of the system of differential equations with a regular feature by Frobenius–Latysheva generalized method: Preprint /Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Mathematics Institute: 91.29. Kiev, 1991. 44 pp.]

7. *А. Ж. Тасмамбетова, Ж. Н. Тасмамбетов*, “Решение систем дифференциальных уравнений в частных производственных с положительным антирангом” // *Вестн. КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика*, 2008. № 3. Специальный выпуск. С. 237–244. [*A. Zh. Tasmambetova, Zh. N. Tasmambetov*, “The solution of systems of partial differential equations with positive antirank” // *Vestn. KazNU. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2008. no. 3. Special Issue. Pp. 237–244].

8. *Ж. Н. Тасмамбетов*, Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами: Автореф. дисс. … доктора физ.-мат. наук. Алматы, 2004. 41 с. [*Zh. N. Tasmambetov*,

Normal solutions of special systems of differential equations of second order with polynomial coefficients: Dr. Sci. Thesis (Phys. & Math.). Almaty, 2004. 41 pp.]

Поступила в редакцию 04/VII/2013;
в окончательном варианте — 12/VIII/2013.

MSC: 35A20; 35A25, 35C05

ON IRREGULAR SINGULAR CURVES OF WHITTAKER TYPE SYSTEMS

Zh. N. Tasmambetov

Aktobe State University after K. Zhubanov,
263, Zhubanov Bruthers st., Aktobe, 030000, Kazakhstan.

E-mail: tasmam@rambler.ru

The given work studies the regular and irregular singular curves of special systems of the second order partial differential equations. By the means of rank and antirank, the necessary and sufficient condition for an existence of regular solution, also the first and the second necessary condition for an existence of normal-regular solution were established. The types of solutions in the neighborhood of regular and irregular features were defined. The application of two variables special functions was considered.

Keywords: *special points, differential equations, Frobenius–Latysheva's method.*

Original article submitted 04/VII/2013;
revision submitted 12/VIII/2013.

Zhaksylyk N. Tasmambetov (Dr. Phys. & Math. Sci.), Professor, Dept. of Informatics and Computer Science.