Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.6+517.968.23

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

***О. А. Репин*[1,2], *С. К. Кумыкова*[3]**

[1] Самарский государственный экономический университет,
443090, Россия, Самара, ул. Советской Армии, 141.
[2] Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[3] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
360004, Россия, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mails: matstat@mail.ru, bsk@rect.kbsu.ru

Исследована однозначная разрешимость внутреннекраевой задачи с операторами Сайго для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. При ограничениях неравенственного типа на известные функции и различных порядках операторов обобщённого дробного интегро-дифференцирования доказана теорема единственности. Существование решения задачи эквивалентно редуцировано к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: *краевая задача, гипергеометрическая функция Гаусса, операторы дробного порядка, уравнение Фредгольма.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m = \text{const} > 0$, в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно, и характеристиками

$$AC\colon x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC\colon x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $J \equiv AB$ — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. *Найти функцию* $u(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^1(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(3,1)}_{x,y}(\Omega_1) \cap \mathbb{C}^{(2,2)}_{x,y}(\Omega_2)$, $u_x \in \mathbb{C}(\overline{\Omega_1})$, *являющуюся решением уравнения* (1) *при* $y \neq 0$, *удовлетворяющую условиям*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2}$$

Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики[1]; профессор, каф. прикладной математики и информатики[2]. *Светлана Каншубиевна Кумыкова* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. теории функций и функционального анализа.

$$a(x)\left(I_{0+}^{\alpha_1,\,\beta_1,\,\eta_1}\delta(t)u\left[\theta_0(t)\right]\right)(x)+b(x)\left(I_{1-}^{\alpha_2,\,\beta_2,\,\eta_2}\omega(t)u\left[\theta_1(t)\right]\right)(x)+$$
$$+\,c(x)u(x,\,0)+d(x)u_y(x,\,0)=g(x)\quad\forall x\in J,\quad(3)$$

где α_i, β_i, η_i $(i=1,2)$ *— вещественные числа,* $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ *— точки пересечения характеристик уравнения* (1)*, выходящих из точки* $(x,\,0)\in J$*, с характеристиками* AC, BC *соответственно;* $\varphi_i(y)$ $(i=1,2,3)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $g(x)$, $\delta(x)$, $\omega(x)$ *— заданные функции, такие, что* $\varphi_i(y)\in\mathbb{C}(\overline{J})$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $g(x)\in\mathbb{C}^1(\overline{J})\cap\mathbb{C}^3(J)$*, причём* $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ *одновременно в ноль не обращаются;* $\big(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}f\big)(x)$ *и* $\big(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}f\big)(x)$ *— операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса* $F(\alpha,\,\beta;\,\gamma;\,x)$*, введённые в* [1] *(см. также* [2, с. 326–327], [3, с. 14]*) и имеющие при действительных* α, β, η *и* $x>0$ *вид*

$$\big(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}f\big)(x)=\begin{cases}\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,\,-\eta;\,\alpha;\,1-\tfrac{t}{x}\right)f(t)\,dt, & \alpha>0;\\ \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n\left(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f\right)(x),\quad \alpha<0,\ n=[-\alpha]+1,\end{cases}$$
$$\big(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}f\big)(x)=\begin{cases}\frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^1(t-x)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,\,-\eta;\,\alpha;\,\tfrac{t-x}{1-x}\right)f(t)\,dt, & \alpha>0;\\ \left(-\tfrac{d}{dx}\right)^n\left(I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f\right)(x),\quad \alpha<0,\ n=[-\alpha]+1.\end{cases}\quad(4)$$

Для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в работах [4, 5] исследовались нелокальные задачи, в которых краевые условия содержали операторы дробного дифференцирования. Данная работа обобщает полученные ранее результаты и является продолжением этих исследований.

2. Единственность решения.

Теорема. *В области* Ω *не может существовать более одного решения задачи* (1)–(3)*, если*

$$\frac{a(1)}{E_1(1)}+\frac{b(0)}{E_1(0)}\geqslant 0,\quad(5)$$

$$\alpha_1=\alpha_2=-\beta,\quad\beta_1=\beta_2=0,\quad\eta_1=\eta_2=2\beta-1,$$
$$\delta(x)=\omega(x)=1,\quad\beta=m/(2m+4)\quad(6)$$

и выполняются условия

$$E_1(x)=\gamma_1\big(a(x)+b(x)\big)+c(x)\neq 0\quad\forall x\in\overline{J},\quad(7)$$

$$\left(\frac{a(x)}{E_1(x)}\right)'\leqslant 0,\quad\left(\frac{b(x)}{E_1(x)}\right)'\geqslant 0,\quad\frac{d(x)}{E_1(x)}\geqslant 0\quad\forall x\in\overline{J},\quad(8)$$

либо

$$\frac{a(1)}{E_2(1)}\geqslant 0,\quad\frac{b(0)}{E_2(0)}\geqslant 0,\quad(9)$$

$$\alpha_1=\alpha_2=\beta-1,\quad\beta_1=\beta_2=0,\quad\eta_1=\eta_2=1-2\beta,$$
$$\delta(x)=x^{2\beta-1},\quad\omega(x)=(1-x)^{2\beta-1},\quad(10)$$

$$E_2(x) = \gamma_2\big(a(x) + b(x)\big) - d(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \tag{11}$$

$$a(x)(1-x)^{1-2\beta} + b(x)x^{1-2\beta} + \Gamma(2\beta)\big(x(1-x)\big)^{1-2\beta} d(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \tag{12}$$

$$\Big(\frac{a(x)}{E_2(x)}\Big)' \leqslant 0, \quad \Big(\frac{b(x)}{E_2(x)}\Big)' \geqslant 0, \quad \frac{c(x)}{E_2(x)} \geqslant 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \tag{13}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}.$$

Доказательство. Пусть $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$.

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$, будем иметь функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое на $\overline{J}$ из области Ω_1:

$$\nu(x) = \tau'''(x).$$

Рассмотрим интеграл

$$J^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = \int_0^1 \tau(x)\tau'''(x)dx = \int_0^1 \tau(x)d\big(\tau''(x)\big).$$

Интегрируя последнее с учётом однородных граничных условий (2), получим

$$2J^* = -\big(\tau'(1)\big)^2 \leqslant 0. \tag{14}$$

Покажем, что при при выполнении условий теоремы $J^* \geqslant 0$. Действительно, решение задачи Коши в области Ω_2 имеет вид [7, с. 152]

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\Big(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\Big) t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\, y \int_0^1 \nu\Big(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\Big) t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt. \tag{15}$$

Используя (15) и (4), получим

$$u[\theta_0(x)] = \gamma_1\big(I_{0+}^{\beta,\,0,\,\beta-1}\tau(t)\big)(x) - \gamma_2\big(I_{0+}^{1-\beta,\,2\beta-1,\,\beta-1}\nu(t)\big)(x),$$

$$u[\theta_1(x)] = \gamma_1\big(I_{1-}^{\beta,\,0,\,\beta-1}\tau(t)\big)(x) - \gamma_2\big(I_{1-}^{1-\beta,\,2\beta-1,\,\beta-1}\nu(t)\big)(x).$$

Пусть выполняются условия (5)–(8) теоремы.

Подставляя $u[\theta_0(x)]$ и $u[\theta_1(x)]$ в условие (3) и опираясь на полугрупповые свойства обобщенных операторов [2, с. 327]

$$\Big(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}\big(I_{0+}^{\gamma,\,\delta,\,\alpha+\eta}f\big)(t)\Big)(x) = \big(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\,\beta+\delta,\,\eta}f\big)(x), \quad \gamma > 0,$$
$$\Big(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}\big(I_{1-}^{\gamma,\,\delta,\,\alpha+\eta}f\big)(t)\Big)(x) = \big(I_{1-}^{\alpha+\gamma,\,\beta+\delta,\,\eta}f\big)(x), \quad \gamma > 0,$$

после некоторых преобразований получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое на $\overline{J}$ из гиперболической части Ω_2 смешанной области Ω:

$$\tau(x) = a_1(x)\big(I_{0+}^{1-2\beta}\nu\big)(x) + b_1(x)\big(I_{1-}^{1-2\beta}\nu\big)(x) + c_1(x)\nu(x) + g_1(x), \tag{16}$$

где $\big(I_{0+}^{1-2\beta}\nu\big)(x)$ и $\big(I_{1-}^{1-2\beta}\nu\big)(x)$ — дробные интегралы в смысле Римана—Лиувилля [2, с. 42],

$$a_1(x) = \gamma_2\frac{a(x)}{E_1(x)}, \quad b_1(x) = \gamma_2\frac{b(x)}{E_1(x)}, \quad c_1(x) = -\frac{d(x)}{E_1(x)}, \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{E_1(x)}.$$

При $g(x) = 0$, используя методику, восходящую к Ф. Трикоми [8, с. 385] и применённую в работах [5, 6], будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\,J^* = \frac{\pi}{\sin\pi\beta}\int_0^1 c_1(x)\nu^2(x)dx- \\ -\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 a_1'(x)\left(\left(\int_0^x \nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 + \left(\int_0^x \nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right)dx+ \\ +\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 b_1'(x)\left(\left(\int_x^1 \nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 + \left(\int_x^1 \nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right)dx+ \\ +\big(a_1(1)+b_1(0)\big)\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\times \\ \times\left(\left(\int_0^1 \nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 \nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right).\end{gathered} \tag{17}$$

При выполнении условий (5)–(8) теоремы $a_1'(x) \leqslant 0$, $b_1'(x) \geqslant 0$, $c_1(x) \geqslant 0$, $a_1(1) + b_1(0) \geqslant 0$ и, следовательно, $J^* \geqslant 0$.

Пусть теперь выполняются условия (9)–(13) теоремы.

Покажем, что и в этом случае $J^* \geqslant 0$.

Аналогичными вычислениями можно показать, что функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое из области Ω_2 на J, имеет вид

$$\nu(x) = a_2(x)\big(D_{0+}^{1-2\beta}\tau\big)(x) + b_2(x)\big(D_{1-}^{1-2\beta}\tau\big)(x) + c_2(x)\tau(x) + g_2(x), \tag{18}$$

где

$$a_2(x) = \gamma_1\frac{a(x)}{E_2(x)}, \quad b_2(x) = \gamma_1\frac{b(x)}{E_2(x)}, \quad c_2(x) = \frac{c(x)}{E_2(x)}, \quad g_2(x) = \frac{g(x)}{E_2(x)},$$

$D_{0+}^{1-2\beta}$ и $D_{1-}^{1-2\beta}$ — операторы дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля [2, с. 43].

Аналогично [6], в результате ряда преобразований получим

$$\frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\beta)\sin 2\pi\beta\cos\pi\beta\,J^* = \frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\beta)\sin 2\pi\beta\cos\pi\beta\int_0^1 c_2(x)\tau^2(x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 a_2'(x)\left(\left(\int_0^x \tau_1(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_0^x \tau_1(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\int_0^1 b_2'(x)\left(\left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}a_2(1)\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\left(\left(\int_0^1 \tau_1(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_0^1 \tau_1(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}b_2(0)\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\left(\left(\int_0^1 \tau_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int_0^1 \tau_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right), \quad (19)$$

где

$$\tau_1(x)=\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}},\quad \tau_2(x)=-\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}}.$$

При выполнении условий (9)–(13) теоремы $J^*\geqslant 0$. Отсюда с учётом (14) заключаем, что $J^*=0$.

Поскольку слагаемые справа в соотношениях (17) и (19) неотрицательны, они также равны нулю. В частности,

$$\int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\left(\int_0^1\nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2=0,\quad \int_0^\infty t^{2\beta-1}dt\left(\int_0^1\nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2=0.$$

Так как $t^{2\beta-1}\geqslant 0$,

$$\int_0^1\nu(\xi)\cos t\xi d\xi=0,\quad \int_0^1\nu(\xi)\sin t\xi d\xi=0$$

для всех $t\in(0,\infty)$, в частности при $t=2\pi k$, $k=0,\,1,\,2,\,\ldots$. При этих значениях t функции $\sin t\xi$ и $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в $\mathbb{L}^2$. Следовательно, $\nu(\xi)=0$ почти всюду, а так как $\nu(x)$ непрерывна по условию, $\nu(x)=0$ всюду.

При $g_1(x)=0$ подставим в (16) $\nu(x)=0$ и получим $\tau(x)=0$. Отсюда $u(x,\,y)\equiv 0$ в Ω_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω_1 — как решение однородной задачи (1), (2), $u(x,\,0)=0$.

В случае соотношения (19) аргументация доказательства тождества $u(x,\,y)\equiv 0$ аналогична. □

3. Существование решения. Воспользуемся соотношением $\tau'''(x)=\nu(x)$, принесённым из области Ω_1 на линию AB. Проинтегрируем его трижды от 0 до x. Получим

$$\tau(x)=\int_0^x\frac{(x-\xi)^2}{2}\nu(\xi)d\xi+\tau''(0)\frac{x^2}{2}+\tau'(0)x+\tau(0).$$

Из граничных условий (2) следует, что

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau(1)=\varphi_2(0),\quad \tau'(0)=\varphi_3(0).$$

Поэтому

$$\tau(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2\nu(\xi)d\xi - \frac{x^2}{2}\int_0^1 (1-\xi)^2\nu(\xi)d\xi + \\ + \varphi_2(0)x^2 + (x-x^2)\varphi_3(0) + (1-x^2)\varphi_1(0). \quad (20)$$

Пусть выполняются условия (5)–(8) теоремы. Исключим $\tau(x)$ из (16) и (20). После простых преобразований получим

$$c_1(x)\nu(x) + \int_0^1 \frac{K_1(x,\,\xi)\nu(\xi)}{|x-\xi|^{2\beta}}d\xi = f_1(x), \quad (21)$$

где

$$K_1(x,\,\xi) = \begin{cases} \dfrac{a_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)} - \dfrac{1}{2}(x-\xi)^{2+2\beta} + \dfrac{x^2}{2}(1-\xi)^2(x-\xi)^{2\beta}, & \xi \leqslant x, \\ \dfrac{b_1(x)}{\Gamma(1-2\beta)} + \dfrac{x^2}{2}(1-\xi)^2(\xi-x)^{2\beta}, & \xi \geqslant x, \end{cases}$$

$$f_1(x) = -g_1(x) + \varphi_2(0)x^2 + (x-x^2)\varphi_3(0) + (1-x^2)\varphi_1(0).$$

При $c_1(x) \neq 0$ или, что то же самое, $d(x) \neq 0$ уравнение (21) есть уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре, правая часть которого $f_1(x) \in \mathbb{C}^1(\overline{J}) \cap \mathbb{C}^2(J)$.

Безусловная разрешимость уравнения (21) в требуемом классе функций следует из единственности решения задачи.

Докажем теперь существование решения задачи (1)–(3) при выполнении условий (9)–(13) теоремы. Для этого исключим $\tau(x)$ из (18) и (20). После довольно громоздких вычислений имеем

$$\nu(x) + \int_0^1 K_2(x,\,t)\nu(t)dt = f_2(x), \quad (22)$$

где

$$K_2(x,\,t) = \begin{cases} K_3(x,\,t), & x \geqslant t, \\ K_4(x,\,t), & x \leqslant t, \end{cases}$$

$$K_3(x,\,t) = \Psi(x,\,t) - \Big(\frac{a_2(x)}{\Gamma(3+2\beta)}(x-t)^{1+2\beta} + \frac{1}{2}c_2(x)(x-t)^2 + \\ + \frac{b_2(x)}{\Gamma(2+2\beta)}(1-x)^{1+2\beta}(x-t) + \frac{b_2(x)(1-x)^{2+2\beta}}{(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)}\Big),$$

$$K_4(x,\,t) = \Psi(x,\,t) + \frac{b_2(x)}{2\Gamma(1+2\beta)}(1-x)^{2\beta}(1-t)^2 F\Big(-2\beta,\,1;\,3;\,\frac{1-t}{1-x}\Big),$$

$$\Psi(x,\,t) = \Big(\frac{a_2(x)}{\Gamma(2+2\beta)} - \frac{b_2(x)(1+2\beta)}{\Gamma(2\beta)}(1-x)^{2\beta-1} + \\ + \frac{b_2(x)(1-x)^{2\beta}}{\Gamma(2\beta)} - \frac{1}{2}c_2(x)x^2\Big)(1-t)^2 + \frac{b_2(x)}{2\beta\Gamma(2\beta)}(1-x)^{2\beta}(1-t),$$

$$f_2(x) = g_2(x) + \frac{a_2(x)}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \Big(\big(\varphi_2(0) - \varphi_3(0) - \varphi_1(0)\big)\xi^2 + \xi\varphi_3(0) \Big) \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} -$$
$$- \frac{b_2(x)}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_x^1 \Big(\big(\varphi_2(0) - \varphi_3(0) - \varphi_1(0)\big)\xi^2 + \xi\varphi_3(0) + \varphi_1(0) \Big) \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}}.$$

Исследуем гладкость $f_2(x)$ правой части уравнения (22). Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} = x^{2\beta-1}, \quad \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{dx}{(\xi-x)^{1-2\beta}} = (1-x)^{2\beta-1},$$
$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} = (1-2\beta)\mathrm{B}(2,\, 2\beta)x^{2\beta},$$
$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\xi d\xi}{(\xi-x)^{1-2\beta}} = \frac{1}{2\beta}(1-x)^{2\beta} - (1-x)^{2\beta-1},$$
$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi^2 d\xi}{(x-\xi)^{1-2\beta}} = (2+2\beta)\mathrm{B}(3,\, 2\beta)x^{1+2\beta},$$
$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(\xi-x)^{1-2\beta}} = 2(1-x)^{2\beta} - (4\beta+1)(1-x)^{2\beta-1}.$$

Таким образом, правая часть уравнения (22)

$$f_2(x) = [x(1-x)]^{2\beta-1} f_2^*(x),$$

где $f_2^*(x) \in \mathbb{C}(\overline{J}) \cap \mathbb{C}^2(J)$.

Итак, уравнение (22) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K_2(x,\, t) \in \mathbb{C}[0{,}1) \cap \mathbb{C}^1(0{,}1)$, причём при $x = 1$ оно может обращаться в бесконечность порядка $1 - 2\beta$.

Уравнение (22) безусловно разрешимо в требуемом классе функций на основании теоремы единственности.

Зная $\nu(x)$, можно определить из (16), (20) $\tau(x) = u(x,\, 0)$.

Для определения решения $u(x,\, y)$ уравнения (1) при $y > 0$ решается задача (1), (2), $u(x,\, 0) = \tau(x)$. Решение этой задачи даётся с помощью формулы [9, с. 133–135]

$$\pi u(x,\, y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x,\, y;\, 0,\, \eta)\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x,\, y;\, 0,\, \eta)\varphi_3(\eta)d\eta -$$
$$- \int_0^y G_{\xi\xi}(x,\, y;\, 1,\, \eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int_0^1 G(x,\, y;\, \xi,\, 0)\tau(\xi)d\xi,$$

где

$$G(x,\, y;\, \xi,\, \eta) = V(x,\, y;\, \xi,\, \eta) - W(x,\, y;\, \xi,\, \eta),$$
$$V(x,\, y;\, \xi,\, \eta) = \begin{cases} (y-\eta)^{-1/3} f\big((x-\xi)(y-\eta)^{-1/3}\big), & y > \eta, \\ 0, & y \leqslant \eta, \end{cases}$$
$$W(x,\, y;\, \xi,\, \eta) = \begin{cases} (y-\eta)^{-1/3} \varphi\big((x-\xi)(y-\eta)^{-1/3}\big), & y > \eta, \\ 0, & y \leqslant \eta, \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{\pi\sqrt{t}}{3\sqrt{3}} \left(\mathrm{I}_{1/3}\Big(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\Big) + \mathrm{I}_{-1/3}\Big(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\Big) \right),$$

$$\varphi(t) = \frac{\pi\sqrt{t}}{3} \left(\mathrm{I}_{1/3}\Big(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\Big) - \mathrm{I}_{-1/3}\Big(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\Big) \right),$$

$\mathrm{I}_\nu(z)$ — функции Бесселя, $f(t)$, $\varphi(t)$ — функции Эйри [10, с. 196; с. 264].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // *Math. Rep. Kyushu Univ.*, 1977/78. Vol. 11, no. 2. Pp. 135–143.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
3. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Изд-во Саратов. ун-та, Самарский филиал, 1992. 164 с. [*Repin O. A.* Boundary value problems with shift for equations of hyperbolic and mixed type. Samara: Izd-vo Saratovskogo Universiteta, Samarskiy Filial, 1992. 164 pp.]
4. *Елеев В. А., Кумыкова С. К.* Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2010. № 5(37), Часть 2. С. 5–14. [*Eleev V. A., Kumykova S. K.* The inner boundary value problem for mixed-type equation of third order with multiple characteristics // *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2010. no. 5(37), Part 2. Pp. 5–14].
5. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 25–36. [*Repin O. A., Kumykova S. K.* Nonlocal problem for a equation of mixed type of third order with generalized operators of fractional integro-differentiation of arbitrary order // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 4(25). Pp. 25–36].
6. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Дифференц. уравнения*, 2012. Т. 48, № 8. С. 1140–1149; англ. пер.: *Repin O. A., Kumykova S. K.* On a boundary value problem with shift for an equation of mixed type in an unbounded domain // *Diff. Equ.*. Vol. 48, no. 8. Pp. 1127–1136.
7. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с. [*Smirnov M. M.* Equations of mixed type. Moscow: Nauka, 1970. 295 pp.]
8. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Иностр. лит., 1957. 443 с. [*Tricomi F.* Lectures on partial differential equations. Moscow: Inostr. Lit., 1957. 443 pp.]
9. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 239 с. [*Dzhuraev T. D.* Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types. Tashkent: Fan, 1979. 239 pp.]
10. Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с. [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / eds. M. Abramowitz, I. Stegun. Moscow: Nauka, 1979. 831 pp.]

Поступила в редакцию 17/X/2012;
в окончательном варианте — 16/XI/2012.

MSC: 35M12; 26A33, 33C05

PROBLEM WITH SHIFT FOR THE THIRD-ORDER EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

***O. A. Repin*[1,2], *S. K. Kumykova*[3]**

[1] Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russia.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
[3] Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, Russia, 360004.

E-mails: `matstat@mail.ru`, `bsk@rect.kbsu.ru`

The unique solvability of boundary value problem with Saigo operators for the third-order equation with multiple characteristics was investigated. The uniqueness theorem with constraints of inequality type on the known functions and different orders of generalized fractional integro-differentiation was proved. The existence of solution is equivalently reduced to the solvability of Fredholm integral equation of the second kind.

Key words: *boundary value problem, Gauss hypergeometric function, operators of fractional order, Fredholm equation.*

Original article submitted 17/X/2012;
revision submitted 16/XI/2012.

Oleg A. Repin (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept of Mathematical Statistics and Econometrics[1]; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science[2].
Svetlana K. Kumykova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Functions Theory and Functional Analysis.