Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 4 (29). С. 26–36

УДК 517.956.326

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ—ЛЫКОВА

Е. Ю. Арланова

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: earlanova@gmail.com

Рассмотрено уравнение Бицадзе—Лыкова. Для этого уравнения поставлена задача со смещением с операторами Кобера—Эрдейи и М. Сайго в краевом условии. Исследованы вопросы единственности (неединственности) решения задачи при различных функциях и значениях констант, входящих в краевые условия. Сформулирован и доказан ряд теорем.

Ключевые слова: *уравнение Бицадзе—Лыкова, краевая задача, оператор Кобера—Эрдейи, оператор М. Сайго, оператор Римана—Лиувилля, существование и единственность решения задачи.*

Рассмотрим уравнение Бицадзе—Лыкова

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x = 0, \quad |a| \leqslant 1, \tag{1}$$

в характеристической области $D = \left\{(x,\, y) : 0 < x - y^2/2 < x + y^2/2 < 1\right\}$, ограниченной интервалом $J = (0,\, 1)$ и характеристиками данного уравнения $AC = \left\{(x,\, y) : x - y^2/2 = 0,\, y \leqslant 0\right\}$ и $BC = \left\{(x,\, y) : x + y^2/2 = 1,\, y \leqslant 0\right\}$.

Это уравнение, описывающее при $a > 0$ процесс переноса влаги в капиллярно-пористых средах, выведено в 1965 г. А. В. Лыковым методами термодинамики необратимых процессов и с тех пор известно как уравнение влагопереноса [1]. Ранее в 1959 г. в монографии А. В. Бицадзе [2] это уравнение приводилось в качестве примера, для которого при $|a| \leqslant 1$ корректна по Адамару задача Коши с начальными данными на линиии $y = 0$ параболического вырождения. В монографии А. М. Нахушева [3] уравнение приведено в качестве математической модели одномерного потока $u = u(x, t)$ биомассы микробной популяции и названо уравнением Бицадзе—Лыкова при любых значениях параметра $a \in \mathbb{R}$.

Обозначим $\Theta_0(x) = (x/2, -\sqrt{x})$ и $\Theta_1(x) = \left((1+x)/2, -\sqrt{1-x}\right)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из произвольной точки $x \in (0, 1)$, с характеристиками AC и BC соответственно. Пусть $\left(I^{\alpha}_{0+} f\right)(x)$, $\left(I^{\alpha}_{1-} f\right)(x)$ — левосторонний и правосторонний операторы Римана—Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ [4]; $(E^{\alpha,\eta}_{0+} f)(x)$ — левосторонний оператор Кобера—Эрдейи в обозначениях, принятых в монографии [5]; $(I^{\alpha,\beta,\eta}_{1-} f)(x)$ — правосторонний оператор М. Сайго, введённый в [6]. Свойства этих операторов хорошо известны [4, 5]

Для уравнения (1) при $|a| < 1$ исследуем следующую краевую задачу.

Задача. *Найти функцию* $u(x,\, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, *удовлетворяющую урав-*

Екатерина Юрьевна Арланова (к.ф.-м.н.), старший преподаватель, каф. прикладной математики и информатики.

нению (1) *при* $|a| < 1$ *в области* D *и краевым условиям*

$$A(x)\left(E_{0+}^{\alpha_1,\frac{a-3}{4}-\alpha_1}u[\Theta_0(t)]\right)(x)+$$
$$+B(x)\left(I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,-\alpha_2-\frac{a+3}{4}}u[\Theta_1(t)]\right)(x)=C(x), \quad (2)$$

$$u(x,0)=\tau(x), \quad (3)$$

где $A^2(x)+B^2(x)\neq 0$ *для любых* $x\in\overline{J}$; $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\tau(x)$ *— заданные гладкие функции, на которые в дальнейшем будут наложены определенные дополнительные условия.*

Задачи, подобные сформулированной, названные позднее «нелокальными» или «со смещениями», начиная с работ [7–9] исследовались для различных уравнений в частных производных многими авторами (см. обзор в [10]). В подавляющем большинстве работ краевые условия содержали интегро-дифференциальные операторы Римана—Лиувилля, например, в работе [11]. В настоящей работе представлены некоторые результаты в направлении обобщения структуры нелокальных краевых условий.

Используя решение задачи Коши для уравнения влагопереноса при $|a| < 1$ [12, с. 261]

$$u(x,\,y)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-3}{4}}\,t^{-\frac{a+3}{4}}dt+$$
$$+y\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}\int_0^1\nu\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-1}{4}}\,t^{-\frac{a+1}{4}}dt,$$

вычислим значения $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$:

$$u[\Theta_0(x)]=k_1\left(E_{0+}^{\frac{1-a}{4},\,\frac{a-3}{4}}\tau(t)\right)(x)+k_2\sqrt{x}\left(E_{0+}^{\frac{3-a}{4},\,\frac{a-1}{4}}\nu(t)\right)(x),$$

$$u[\Theta_1(x)]=k_3\left(I_{1-}^{\frac{1+a}{4},0,-\frac{a+3}{4}}\tau(t)\right)(x)+k_4\left(I_{1-}^{\frac{3-a}{4},\,\frac{a-1}{4}}\nu(t)\right)(x),$$

где

$$k_1=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)},\quad k_2=-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)},\quad k_3=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)},\quad k_4=-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)}.$$

Подставив $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ в краевое условие (2), получим

$$A(x)k_2\left(E_{0+}^{\alpha_1+\frac{3-a}{4},\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\sqrt{t}\nu(t)\right)(x)+$$
$$+B(x)k_4\left(I_{1-}^{\alpha_2+\frac{a+3}{4},\beta_2-\frac{1}{2},-\alpha_2-\frac{a+3}{4}}\nu(t)\right)(x)=f(x), \quad (4)$$

где

$$f(x) = C(x) - A(x)k_1\left(E_{0+}^{\alpha_1+\frac{1-a}{4},\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\tau\right)(x)-$$
$$- B(x)k_3\left(I_{1-}^{\alpha_2+\frac{a+1}{4},\beta_2,-\alpha_2-\frac{a+3}{4}}\tau\right)(x).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^1(\overline{J})$; $\tau(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $B(x) \neq 0$ *для любых* $x \in \overline{J}$; $\alpha_2 = -(a+3)/4$, $\beta_2 = 1/2$, $\alpha_1 > (a-3)/4$. *Тогда решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 1 интегральное уравнение (4) примет вид

$$B(x)k_4\nu(x) + A(x)k_2\left(E_{0+}^{\alpha_1+\frac{3-a}{4},\,\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\sqrt{t}\nu(t)\right)(x) = f_1(x), \tag{5}$$

где

$$f_1(x) = C(x) - A(x)k_1\left(E_{0+}^{\alpha_1+\frac{1-a}{4},\,\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\tau\right)(x) - B(x)k_3\left(I_{1-}^{-\frac{1}{2}}\tau\right)(x).$$

Так как $\alpha + (1-a)/4 > 0$, используя определение интегрального оператора $\left(E_{0+}^{\alpha,\eta}f\right)(x)$, запишем уравнение (5) в виде

$$\nu(x) + \frac{A(x)k_2}{B(x)k_4\Gamma\left(\alpha_1+\frac{3-a}{4}\right)}\int_0^x (x-t)^{\alpha_1-\frac{a+1}{4}}t^{\frac{a+5}{4}-\alpha_1}\nu(t)dt = \frac{f_1(x)}{B(x)k_4}. \tag{6}$$

Таким образом, вопрос об однозначной разрешимости задачи (1)–(3) эквивалентно сводится к вопросу разрешимости уравнения (6).

Интегральное уравнение (6) есть интегральное уравнение Вольтерры второго рода. Для доказательства разрешимости уравнения (6) выясним гладкость правой части $f_1(x)$.

Для удобства записи обозначим $f_1(x) = C(x) - A(x)k_1I_1(x) - B(x)k_3I_2(x)$, где $I_1(x) = \left(E_{0+}^{\alpha_1+\frac{1-a}{4},\,\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\tau\right)(x)$ и $I_2(x) = \left(I_{1-}^{-\frac{1}{2}}\tau(t)\right)(x)$. Рассмотрим выражение

$$I_1(x) = \left(E_{0+}^{\alpha_1+\frac{1-a}{4},\,\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\tau\right)(x) =$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{\Gamma\left(\alpha_1+\frac{1-a}{4}\right)}\int_0^x (x-t)^{\alpha_1-\frac{a+3}{4}}t^{\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\tau(t)dt.$$

Произведя замену переменной $t = xz$, получим

$$I_1(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1+\frac{1-a}{4}\right)}\int_0^1 (1-z)^{\alpha_1-\frac{a+3}{4}}z^{\frac{a-3}{4}-\alpha_1}\tau(xz)dz.$$

После несложных преобразований $I_2(x)$ можно записать так:

$$I_2(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} \tau'[(1-x)t + x] \frac{dt}{\sqrt{t}} - \\ - \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} \tau[(1-x)t + x] \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Учитывая свойства функций $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$, явный вид $I_1(x)$ и $I_2(x)$, можно заключить, что правая часть уравнения (5) $f_1(x) \in C^2(J)$, при $x = 0$ ограничена, а при $x = 1$ она может обращаться в бесконечность порядка не выше $1/2$.

Исследуем ядро

$$K(x,t) = \frac{A(x)}{B(x)} (x-t)^{\alpha_1 - \frac{a+1}{4}} t^{\frac{a+5}{4} - \alpha_1}.$$

На линии $t = x$ ядро имеет особенность порядка $\alpha_1 - (a+1)/4 > -1$, в остальных точках квадрата $0 < x,\ t < 1$ ядро дважды непрерывно дифференцируемо, так как $A(x)$, $B(x) \in C^1(\overline{J})$, $B(x) \neq 0$, $\alpha_1 > (a-3)/4$, функция $f_1(x) \in C^2(J)$. Тогда исходя из теории интегральных уравнений Вольтерры [13, 14] можно утверждать, что данное уравнение имеет единственное решение, откуда следует единственность решения данной задачи.$\square$

Теорема 2. *Пусть* $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^1(\overline{J})$; $\tau(x) \in C^1(\overline{J}) \cap C^2(J)$; $A(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{J}$; $\alpha_1 = (a-3)/4$, $\alpha_2 > -(a+1)/4$, $1/2 < \beta_2 < 1$. *Тогда решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 интегральное уравнение (4) примет вид

$$A_1(x) k_2 \nu(x) + B(x) k_4 \left(I_{1-}^{\alpha_2 + \frac{a+3}{4}, \beta_2 - \frac{1}{2}, -\alpha_2 - \frac{a+3}{4}} \nu(t) \right)(x) = f_2(x), \qquad (7)$$

где $f_2(x) = C(x) - A_1(x) k_1 \left(I_{0+}^{-\frac{1}{2}} \tau \right)(x) - B(x) k_3 \left(I_{1-}^{\alpha_2 + \frac{a+1}{4}, \beta_2, -\alpha_2 - \frac{a+3}{4}} \tau \right)(x)$, $A_1(x) = \sqrt{x} A(x)$. Перепишем уравнение (7) следующим образом:

$$\nu(x) + \frac{B(x) k_4}{A_1(x) k_2 \Gamma\left(\alpha_2 + \frac{a+3}{4}\right)} \times \\ \times \int_x^1 (t-x)^{\alpha_2 + \frac{a-1}{4}} (1-t)^{-\left(\alpha_2 + \beta_2 + \frac{a+1}{4}\right)} \nu(t) dt = \frac{f_2(x)}{A_1(x) k_2}. \qquad (8)$$

Таким образом, вопрос об однозначной разрешимости задачи (1)–(3) эквивалентно сводится к вопросу разрешимости уравнения (8).

Интегральное уравнение (8) — интегральное уравнение Вольтерры второго рода. Для доказательства разрешимости уравнения (8) выясним гладкость правой части $f_2(x)$.

Для удобства положим

$$I_3(x) = \left(I_{1-}^{\alpha_2 + \frac{a+1}{4}, \beta_2, -\alpha_2 - \frac{a+3}{4}} \tau \right)(x), \quad I_4(x) = \left(I_{0+}^{-\frac{1}{2}} \tau(t) \right)(x).$$

Тогда
$$f_2(x) = C(x) - B(x)k_3 I_3(x) - A_1(x)k_1 I_4(x).$$
Рассмотрим
$$I_3(x) = \left(I_{1-}^{\alpha_2+\frac{a+1}{4},\,\beta_2,\,-\alpha_2-\frac{a+3}{4}}\tau\right)(x) = \frac{(1-x)^{-\left(\alpha_2+\beta_2+\frac{a+1}{4}\right)}}{\Gamma\left(\alpha_2+\frac{a+1}{4}\right)}\times$$
$$\times\int_x^1 (t-x)^{\alpha_2+\frac{a-3}{4}} F\left(\alpha_2+\beta_2+\frac{a+1}{4}, \frac{a+3}{4}+\alpha_2; \alpha_2+\frac{a+1}{4}; \frac{t-x}{1-x}\right)\tau(t)dt.$$
Применяя к гипергеометрической функции Гаусса формулу Больца [15]
$$F(a,\,b;\,c;\,z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,\,c-b;\,c;\,z),$$
получим
$$I_3(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\Gamma\left(\alpha_2+\frac{a+1}{4}\right)}\times$$
$$\times\int_x^1 \tau(t)(t-x)^{\alpha_2+\frac{a-3}{4}}(1-t)^{-\alpha_2-\beta_2-\frac{a+3}{4}} F\left(-\beta_2, -\frac{1}{2}; \alpha_2+\frac{a+1}{4}; \frac{t-x}{1-x}\right)dt.$$
После несложных преобразований $I_4(x)$ можно записать в виде
$$I_4(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^1 \frac{\tau(xz)dz}{\sqrt{x}\sqrt{1-z}} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^1 \sqrt{x}\tau'(xz)\frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

Учитывая свойства функций $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$, явный вид $I_3(x)$ и $I_4(x)$, можно заключить, что правая часть уравнения (7) $f_2(x) \in C^2(J)$, причём при $x = 0$ она может обращаться в бесконечность порядка не выше $1/2$, а при $x = 1$ — в бесконечность порядка не выше β_2.

Исследуем ядро
$$K(x,t) = \frac{B(x)}{A(x)}(t-x)^{\alpha_2-\frac{a+1}{4}}(1-t)^{\alpha_2+\beta_2+\frac{a+1}{4}}.$$
На линии $t = x$ ядро имеет особенность порядка $\alpha_2 - (a+1)/4 > -1$, на линии $t = 1$ — особенность порядка $\alpha_2 + \beta_2 + (a+1)/4 > -1$, в остальных точках квадрата $0 < x,\ t < 1$ ядро дважды непрерывно дифференцируемо, так как $A(x)$, $B(x) \in C^1(\overline{J})$, $A(x) \neq 0$, $\alpha_2 > -(a+1)/4$, $1/2 < \beta_2 < 1$, функция $f(x) \in \in C^2(J)$. Тогда исходя из теории интегральных уравнений Вольтерры [13, 14] можно сделать вывод о том, что данное уравнение имеет единственное решение, откуда следует единственность решения данной задачи.□

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы* 2 $\alpha_1 = (a-3)/4$, $\alpha_2 = -1/2$, $\beta_2 = 1/2$. *Тогда решение задачи* (1)–(3), *вообще говоря, не единственно.*

Доказательство. При $C(x) = 0$, $\tau(x) = 0$ интегральное уравнение (4) запишется в виде
$$\nu(x) + \frac{B(x)k_4}{A_1(x)k_2}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}\int_x^1 (t-x)^{\frac{a-3}{4}}(1-t)^{-\frac{a+1}{4}}\nu(t)dt = 0. \qquad (9)$$

Положим $\nu_1(x) = (1-x)^{-\frac{a+1}{4}}\nu(x)$. Тогда из уравнения (9) получим интегральное уравнение Вольтерры третьего рода [16]

$$(1-x)^{\frac{a+1}{4}}\nu_1(x) + \frac{B(x)k_4}{A_1(x)k_2}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)}\int_x^1 \frac{\nu_1(t)dt}{(t-x)^{\frac{3-a}{4}}} = 0. \tag{10}$$

Пусть

$$B(x) = -\frac{A_1(x)k_2\Gamma(n+1)}{k_4\Gamma\left(n+\frac{3-a}{4}\right)}.$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$(1-x)^{\frac{a+1}{4}}\nu_1(x) + a_1^*\int_x^1 \frac{\nu_1(t)dt}{(t-x)^{\frac{3-a}{4}}} = 0,$$

где

$$a_1^* = -\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)\Gamma\left(n+\frac{3-a}{4}\right)}.$$

Покажем, что $\nu(x) = (1-x)^n$ является ненулевым решением уравнения (9). Для этого подставляя выражение для $\nu(x)$ в уравнение (9), делая в интеграле замену переменных $t = 1-(1-x)z$, используя определение бета-функции [15]

$$\mathrm{B}(x,\, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \mathrm{Re}x > 0, \quad \mathrm{Re}y > 0$$

и ее выражение через гамма-функции [15]

$$\mathrm{B}(x,\, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

получим верное равенство

$$(1-x)^n\left[1 - \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)\Gamma\left(n+\frac{3-a}{4}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{4}\right)\Gamma\left(n+\frac{3-a}{4}\right)}{\Gamma(n+1)}\right] = 0.$$

Отсюда следует, что $\nu(x) = (1-x)^n$ при любых n удовлетворяет уравнению (9).$\square$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha_1 = (a-3)/4$, $-(a+5)/4 < \alpha_2 < -(a+3)/4$, $\beta_2 = 3/2$, $\tau(x) = (1-x)^\delta\tau_1(x)$, $\delta \geqslant 3/2$; $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C(\overline{J})\cap C^1(J)$; $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{J}$; $\tau_1(x) \in C^1(\overline{J})\cap C^3(J)$. *Тогда задача* (1)–(3) *имеет более одного решения.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы интегральное уравнение (4) примет вид

$$\nu(x) + a_{11}(x)\frac{d}{dx}\int_x^1 \nu(t)(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+3}{4}}(1-t)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt = f_3(x), \tag{11}$$

где

$$f_3(x)=\frac{f_2(x)}{A_1(x)k_2},\quad a_{11}(x)=\frac{B(x)k_4}{A_1(x)k_2}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}.$$

Покажем, что однородное уравнение, соответствующее (11), имеет нетривиальное решение.

Запишем однородное уравнение ($C(x)=0$, $\tau(x)=0$) в виде

$$\nu(x)+a_{11}\frac{d}{dx}\int_x^1\nu(t)(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+3}{4}}(1-t)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt=0. \tag{12}$$

Введём новую неизвестную функцию

$$\varphi(x)=-\int_1^x\frac{(1-t)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}\nu(t)}{(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}}dt \tag{13}$$

и применим формулу обращения [4, с. 39]

$$f(x)=-\frac{\sin\pi\mu}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{F(t)dt}{(t-x)^{1-\mu}}$$

интегрального уравнения Абеля

$$\int_x^1\frac{f(t)dt}{(t-x)^{\mu}}=F(t),\quad 0<\mu<1,$$

к уравнению (13). Получим

$$\begin{aligned}\nu(x)=-&\frac{\sin\pi\left(-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)\right)}{\pi}(1-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}}=\\&=\frac{\sin\pi\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}{\pi}(1-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Найдём $\varphi(1)$. Производя в уравнении (13) замену переменных $t{=}1{-}(1{-}x)z$, получим

$$\varphi(x)=\int_0^1 z^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}(1-z)^{\alpha_2+\frac{a+3}{4}}\nu(1-(1-x)z)dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\varphi(1)=\nu(1)\mathrm{B}\Big(-\alpha_2-\frac{a+3}{4},\,\alpha_2+\frac{a+7}{4}\Big)=\\&=\nu(1)\frac{\Gamma\left(-\alpha_2-\frac{a+3}{4}\right)\Gamma\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}{\Gamma(1)}=\nu(1)\frac{\pi}{\sin\pi\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}\neq 0\quad(\nu(1)\neq 0).\end{aligned}$$

Обозначим $\varphi(1) = C_1 \neq 0$. Если обозначить

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x), \tag{15}$$

то очевидно

$$\varphi(x) = C_1 - \int_x^1 \psi(z)dz. \tag{16}$$

Подставляя (14) и (15) в (12), получим

$$a_{11}(x)\psi(x) + \frac{\sin\pi\left(\alpha_2 + \frac{a+3}{4}\right)}{\pi}(1-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} = 0.$$

Найдём

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}}.$$

Сделаем замену переменных $t = 1-(1-x)z$ и продифференцируем:

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} = \frac{d}{dx}(1-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}\int_0^1 \frac{\varphi(1-(1-x)z)dz}{(1-z)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} =$$
$$= \left(\alpha_2 + \frac{a+3}{4}\right)(1-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}\int_0^1 \frac{\varphi(1-(1-x)z)dz}{(1-z)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} +$$
$$+ (1-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}\int_0^1 \frac{\varphi'(1-(1-x)z)zdz}{(1-z)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}}.$$

Делая замену переменных $z = (1-t)/(1-x)$ и учитывая (16), имеем

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} = \left(\alpha_2 + \frac{a+3}{4}\right)\frac{1}{1-x}\int_x^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} +$$
$$+ \frac{1}{1-x}\int_x^1 \frac{\varphi'(t)(1-t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} = \left(\alpha_2 + \frac{a+3}{4}\right)\frac{1}{1-x}\int_x^1 \frac{C_1 dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} -$$
$$-\left(\alpha_2 + \frac{a+3}{4}\right)\frac{1}{1-x}\int_x^1 \frac{dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}}\int_t^1 \psi(z)dz + \frac{1}{1-x}\int_x^1 \frac{\psi(t)(1-t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}}.$$

Рассмотрим интегралы

$$\int_x^1 (t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt = \left.\frac{(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}}{-\left(\alpha_2\frac{a+3}{4}\right)}\right|_x^1 = -\frac{(1-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}}{\alpha_2+\frac{a+3}{4}},$$

$$\int_x^1 \frac{dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}}\int_t^1 \psi(z)dz = \int_x^1 \psi(z)dz\int_x^z (t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt =$$

$$= \int_x^1 \psi(z)dz\, \frac{(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}}{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}\Bigg|_x^z = -\frac{1}{\alpha_2+\frac{a+3}{4}}\int_x^1 \psi(t)(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}dt.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} = -C_1(1-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)} +$$
$$+\frac{1}{1-x}\int_x^1 \psi(t)(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}dt + \frac{1}{1-x}\int_x^1 \frac{\psi(t)(1-t)dt}{(t-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}} =$$
$$= -C_1(1-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)} + \int_x^1 \psi(t)(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt.$$

Итак, получено уравнение

$$a_{11}(x)\psi(x) + \frac{\sin\pi\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}{\pi}(1-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}\int_x^1 \psi(t)(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt =$$
$$= C_1\frac{\sin\pi\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}{\pi},$$

или при $B(x)\neq 0$

$$\psi(x) + a_{11}^*(x)\int_x^1 \psi(t)(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt = h(x), \tag{17}$$

где

$$a_{11}^*(x) = \frac{\sin\pi\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}{a_{11}(x)\pi}(1-x)^{\alpha_2+\frac{a+7}{4}}, \quad h(x) = \frac{C_1\sin\pi\left(\alpha_2+\frac{a+3}{4}\right)}{a_{11}(x)\pi}$$

$(a_{11}(x)\neq 0)$.

Уравнение (17) — интегральное уравнение Вольтерры второго рода, для которого существует единственное решение. Отсюда следует, что исследованная задача имеет неединственное решение.

Докажем существование решения задачи. Используя (17), имеем уравнение

$$\psi(x) + a_{11}^*(x)\int_x^1 \psi(t)(t-x)^{-\left(\alpha_2+\frac{a+7}{4}\right)}dt = F(x), \tag{18}$$

где $F(x) = h(x) + f_3(x)$.

Учитывая условия теоремы 4, заметим, что правая часть (18) $F(x)\in C(\overline{J})$. В этом классе уравнение (18) имеет нетривиальное решение $\psi(x)$. По найденному $\psi(x)$ находится $\nu(x)$ а, следовательно, и $u(x,\,y)$. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лыков А. В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов с исследованием тепло и массообмена // *Инж.-физ. журн.*, 1965. Т. 9, № 3. С. 287–304; англ. пер.: *Luikov A. V.* Application of the methods of thermodynamics of irreversible processes to the investigation of heat and mass transfer // *J. Eng. Physics Thermophysics*, 1965. Vol. 9, no. 3. Pp. 189–202.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 134 с.; англ. пер.: *Bitsadze A. V.* Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964. xiii+160 pp.
3. *Нахушев А. М.* Уравнение математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. [*Nakhushev A. M.* Equations of mathematical biology. Moscow: Vyssh. Shk., 1995. 301 pp.]
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.; англ. пер.: *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. New York: Gordon & Breach, 1993. xxxvi+976 pp.
Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 c.
5. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 271 с. [*Nakhushev A. M.* Fractional calculus and its applications. Moscow: Fizmatlit, 2003. 271 pp.]
6. *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation // *Math. Japon*, 1979. Vol. 24, no. 4. Pp. 377–385.
7. *Жегалов В. И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии / В сб.: *Краевые задачи теории аналитических функций* / Учён. зап. Казан. гос. ун-та, Т. 122. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1962. С. 3–16. [*Zhegalov V. I.* A boundary-value problem for an equation of mixed type with boundary conditions on both characteristics and with discontinuities on the transition curve / In: *Boundary value problems in the theory of analytic functions* / Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap., 122. Kazan: Kazan University, 1962. Pp. 3–16].
8. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *ДАН СССР*, 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739; англ. пер.: *Nakhushev A. M.* A new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation // *Sov. Math., Dokl.*, 1969. Vol. 10. Pp. 935–938.
9. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Диффер. уравн.*, 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59. [*Nakhushev A. M.* On Some Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations and Equations of the Mixed Type // *Differ. Uravn.*, 1969. Vol. 5, no. 1. Pp. 44–59].
10. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. [*Nakhushev A. M.* Problems with Shift for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka, 2006. 287 pp.]
11. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Нелокальная задача для уравнения Бицадзе–Лыкова // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. № 3. С. 28–35; англ. пер.: *Repin O. A., Kumykova S. K.* A nonlocal problem for the Bitsadze-Lykov equation // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010. Vol. 54, no. 3. Pp. 24–30.
12. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 448 pp.]
13. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / пер. с итал. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.; англ. пер.: *Tricomi F.* On linear partial differential equations of the second order of mixed type. Dayton: Brown University, 1948. 372 pp.
14. *Килбас А. А.* Интегральные уравнения: курс лекций. Минск: БГУ, 2005. 143 с. [*Kilbas A. A.* Integral equations. A course of lectures. Minsk: BGU, 2005. 143 pp.]

15. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
16. *Нахушев А. М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерры третьего рода // *Диффер. уравн.*, 1974. Т. 10, № 1. С. 100–111. [*Nakhushev A. M.* Inverse problems for degenerate equations and Volterra integral equations of the third kind // *Differ. Uravn*, 1974. Vol. 10, no. 1. Pp. 100–111].

Поступила в редакцию 05/VII/2012;
в окончательном варианте — 19/XI/2012.

MSC: 35L80; 35L20

THE PROBLEM WITH SHIFT FOR THE BITSADZE–LYKOV EQUATION

E. Yu. Arlanova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `earlanova@gmail.com`

The Bitsadze-Lykov equation is considered. The problem with shift containing the Kober–Erdélyi and M. Saigo operators in boundary condition is set for this equation. The questions of uniqueness (ununiqueness) of this problem solution with different functions and constants in boundary condition are investigated. The number of theorems is formulated and proved.

Key words: *Bitsadze–Lykov equation, boundary value problem, Kober–Erdélyi operator, M. Saigo operator, Riemann–Liouville operator, existence and uniqueness of the problem solution.*

Original article submitted 05/VII/2012;
revision submitted 19/XI/2012.

Ekaterina Yu. Arlanova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Senior Teacher, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.