УДК 517.956.37

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЧАСТИ МНОГОМЕРНОГО ЯДРА В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

***Д. К. Дурдиев*[1], *Ж. Ш. Сафаров*[2]**

[1] Бухарский государственный университет,
705018, Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбала, 11.
[2] Ташкентский университет информационных технологий,
700000, Узбекистан, Ташкент, ул. А. Тимура, 108.

E-mail: durdiev65@mail.ru

Исследуется многомерная обратная задача определения пространственной части ядра интегрального члена в интегро-дифференциальном волновом уравнении. При этом прямую задачу представляет начально-краевая задача для этого уравнения с нулевыми начальными данными и граничным условием Неймана в виде дельта-функции Дирака, сосредоточенной на границе области $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $z > 0$. В качестве информации для решения обратной задачи на границе рассматриваемой области задаются следы решения прямой задачи. Существенным моментом постановки задачи является то обстоятельство, что все заданные функции предполагаются вещественными аналитическими функциями действительных переменных $x \in \mathbb{R}^n$. Основной результат работы заключается в получении теоремы локальной однозначной разрешимости обратной задачи в классе функций, непрерывных по переменной z и аналитических по остальным пространственным переменным. Для этого с использованием метода выделения особенностей прямая задача заменяется начально-краевой задачей для регулярной части решения этой задачи. Далее прямая и обратная задачи сводятся к решению эквивалентной системы интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа. Для решения последней применяется метод шкал банаховых пространств вещественных аналитических функций действительного переменного.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, единственность, оценка устойчивости, импульсный источник, характеристика.*

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_{tt} - u_{zz} - \Delta u = \int_0^t k(t-\tau, z, x)u(\tau, z, x)d\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ z > 0, \tag{1}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_z|_{z=0} = -\delta'(t) + f(t,x)\theta(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{2}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по переменным $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x$, $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда, f — заданная гладкая функция. Предполагается, что ядро интегрального члена уравнения (1) имеет вид

$$k(t,z,x) = k_0(t)p(z,x),$$

где $k_0(t)$ — известная функция. Обратная задача заключается в определении функции $p(z,x)$ по известному дополнительному условию относительно ре-

Дурдимурод Каландарович Дурдиев (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математической физики и анализа.
Журабек Шакарович Сафаров, инженер-программист, центр информационных технологий.

шения прямой задачи (1), (2):

$$u|_{z=0} = -\delta(t) + g(t,x)\theta(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{3}$$

$g(t,x)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Идея применения метода шкал банаховых пространств аналитических функций, развитая в работах Л. В. Овсянникова [1] и Л. Ниренберга [2], к многомерным обратным задачам принадлежит В. Г. Романову. В работах [3–5] он применил этот метод (с некоторыми модификациями) к вопросам локальной разрешимости многомерных обратных задач. На основе данного метода в [6] изучена задача определения функции k в уравнении (1), когда она не зависит от переменной z. В данной работе исследуется обратная задача (1)–(3) об определении $(n+1)$-мерной пространственной части функции $k(t,z,x)$. Доказывается, что поставленная задача локально однозначно разрешима в классе функций, аналитических по переменной x.

Следуя [7, с. 92], введём в рассмотрение банахово пространство A_s аналитических функций $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, для которых конечна норма

$$\|h\|_s(r) = \sup_{|x|\leqslant r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!} |D^\alpha \phi(x)| < \infty.$$

Здесь $r>0, s>0$ и $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$, α_i — неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = (\alpha_1)! \cdot (\alpha_2)! \cdot \cdots \cdot (\alpha_n)!$. В дальнейшем параметр r будет считаться фиксированным, в то время как параметр s рассматривается как переменный параметр. Далее для простоты параметр r будем опускать в обозначениях норм пространства A_s. При изменении параметра s возникает шкала банаховых пространств A_s, $s>0$. Очевидно следующее свойство: если $h(x) \in A_s$, то $h(x) \subset A_{s'}$ для всех $s' \in (0,s)$, следовательно, $A_s \subset A_{s'}$, если $s' < s$. Кроме того, если $h(x) \in A_s$, то $D^\alpha h(x) \subset A_{s'}$ для $s' \in (0,s)$, и в частности, справедливо неравенство

$$\|\Delta h\|_s' \leqslant \frac{4\pi}{(s'-s)} \|h\|_s, \quad s' > s > 0. \tag{4}$$

Пусть $D_{0T} = \{(t,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant t \leqslant T - t\}$, $T > 0$ — фиксированное число и $D_T = D_{0T} \times \mathbb{R}^n$.

Определение. Функция $w = w(t,z,x) \in C(A_s, D_{0T})$, если $w \in A_s$ для всех $(t,z) \in D_{0T}$, непрерывна в D_{0T} как элемент пространства A_s и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\sup_{(t,z)\in D_{0T}} \|w\|_s(t,z) < \infty.$$

Из равенств (1), (2) следует, что $u \equiv 0$, $0 < t < z$, $x \in \mathbb{R}^n$. Функция $u(t,z,x)$ как решение задачи (1), (2) имеет в окрестности характеристической поверхности $t = z$ следующую структуру:

$$u(t,z,x) = -\delta(t-z) + v(t,z,x)\theta(t-z),$$

где $v(t,z,x)$ — функция, непрерывная при переходе через поверхность $t=z$. Из последнего уравнения следует равенство

$$v(z+0,z,x)=0.$$

Из вышесказанного следует, что обратная задача (1)–(3) эквивалентна задаче определения функции $p(z,x)$ из следующих уравнений:

$$v_{tt}-v_{zz}=\Delta v+k_0(t-z)p(z,x)+p(z,x)\int_0^{t-z}k_0(\alpha)v(t-\alpha,z,x)d\alpha, \quad (5)$$
$$(t,z,x)\in D=\{(t,z,x)\mid 0<z<t,\ x\in\mathbb{R}^n\},$$
$$v\,|_{z=0}=g(x,t)\ ,\quad v_z\,|_{z=0}=f(x,t)\ ,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \quad (6)$$
$$u|_{t=z+0}=0,\quad x\in\mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Построим исходя из этих равенств систему интегро-дифференциальных уравнений для неизвестных функций. Функция v удовлетворяет уравнению:

$$v(t,z,x)=v_0(t,z,x)-\frac{1}{2}\iint_{\Delta(z,t)}\Big[\Delta v\,(\tau,\xi,x)+k_0(\tau-\xi)p(\xi,x)+$$
$$+\,p(\xi,x)\int_0^{\tau-\xi}k_0(\alpha)v(\tau-\alpha,\xi,x)d\alpha\Big]d\tau d\xi, \quad (8)$$

в котором

$$v_0(t,z,x)=\frac{1}{2}\left[g(t+z,x)+g(t-z,x)\right]+\frac{1}{2}\int_{t-z}^{t+z}f(\tau,x)d\tau,$$

$\Delta(z,t)=\{(\xi,\tau)\mid 0\leqslant\xi\leqslant z,\ \xi+t-z\leqslant\tau\leqslant-\xi+t+z\}$ — характеристический треугольник в плоскости (ξ,τ) с вершиной в точке (z,t) и основанием на оси τ. Выше была использована формула Даламбера с данными Коши на плоскости $z=0$. Из формулы (8), являющейся решением прямой задачи (5), (6), с использованием условия (7) на характеристике при $t\to z+0$ имеем

$$2v_0(z+0,z,x)=\int_{\Delta(z,z+0)}\Big[\Delta v(\tau,\xi,x)+k_0(\tau-\xi)p(\xi,x)+$$
$$+\,p(\xi,x)\int_0^{\tau-\xi}k_0(\alpha)v(\tau-\alpha,\xi,x)d\alpha\Big]d\xi. \quad (9)$$

Полагая в (9) $z=0$, находим условие, которому должна удовлетворять функция g:

$$g(+0,x)=0.$$

Дифференцируем равенство (9) по z, получаем

$$\frac{d}{dz}v_0(z+0,z,x)=\int_0^z[\Delta v(2z-\xi,\xi,x)+p(\xi,x)k_0[2(z-\xi)]+$$
$$+\,p(\xi,x)\int_0^{2(z-\xi)}k_0(\alpha)v(2z-\xi-\alpha,\xi,x)d\alpha]d\xi. \quad (10)$$

Из (8) следует, что

$$\frac{d}{dz}v_0(z+0,z,x) = g_t(t,x)\,|_{t=2z} + f(2z,x).$$

Отсюда и из предыдущего равенства находим условие согласования для заданных функций:

$$g_t(+0,x) = f(+0,x).$$

Интегральное уравнение для неизвестной функции $p(z,x)$ находим дифференцированием по z соотношения (10):

$$p(z,x) = p_0(z,x) - \frac{2}{k_0(0)}\int_0^z [\Delta v_t(2z-\xi,\xi,x) + p(\xi,x){k_0}'(2z-2\xi) + \\ + p(\xi,x)\int_0^{2z-2\xi} k_0(\alpha)v_t(2z-\xi-\alpha,\xi,x)d\alpha]d\xi, \quad (11)$$

где

$$p_0(z,x) = \frac{1}{k_0(0)}\frac{d^2}{dz^2}v_0(z+0,z,x) = \frac{2}{k_0(0)}[g_{tt}(t,x)+f_t(t,x)]_{t=2z}.$$

Воспользуемся формулой (8) для вычисления v_t. Дифференцируя это уравнение по t, получим

$$v_t(t,z,x) = v_{0t}(t,z,x) - \\ -\frac{1}{2}\int_0^z [\Delta v(\xi+t-z,\xi,z) + k_0(t-z)p(\xi,x) + p(\xi,x)\int_0^{t-z} k_0(\alpha)v(\xi+t-z-\alpha,\xi,x)d\alpha - \\ - \Delta v(-\xi+t+z,\xi,x) - k_0(t+z-2\xi)p(\xi,x) - \\ - p(\xi,x)\int_0^{t+z-2\xi} k_0(\alpha)v(t+z-\xi-\alpha,\xi,x)d\alpha]d\xi, \quad (12)$$

где

$$v_{0t}(t,z,x) = \frac{\partial}{\partial t}v_0(t,z,x) = \\ = \frac{1}{2}\left[g_t(t+z,x) + g_t(t-z,x)\right] + \frac{1}{2}\left[f(t+z,x) - f(t-z,x)\right].$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема о локальной разрешимости поставленной задачи.

Теорема. *Пусть $k_0(t) \in C^1[0,T]$, $k(0) \neq 0$ и выполнены условия согласования $g(+0,x) = 0$, $g_t(+0,x) = f(+0,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, кроме того,*

$$[f(t,x), g(t,x), g_t(t,x), f_t(t,x), g_{tt}(t,x)] \in C(A_{s_0}, [0,T]),$$
$$\max\left\{\|g\|_{s_0}(t), \max(1, \frac{T}{2})\|f\|_{s_0}(t), \|g_t\|_{s_0}(t)\right\} \leqslant \frac{R_0}{2},$$

$$\max\left\{\|f_t\|_{s_0}(t), \|g_{tt}\|_{s_0}(t)\right\}|k(0)|^{-1} \leqslant \frac{R_0}{4}, \quad t \in [0,T],$$

R_0 — известное положительное число. Тогда найдется $a \in (0, T/2)$ такое, что для любого $s \in (0, s_0)$ в области $\Gamma_{ST} := D_T \cap \{(t,z,s) \mid 0 \leqslant z \leqslant a(s_0 - s)\}$ существует единственное решение системы уравнений (8), (11), (12), *для которого $(v, v_t) \in C(A_{s_0}, F)$, $p \in C(A_{s_0}, [0, a(s_0 - s)])$,*

$$F = \{(t,z,s) \mid (t,z) \in D_{0T}, 0 < z < a(s_0 - s)\},$$

причём

$$\|v - v_0\|_s(t,z) \leqslant R_0, \quad \|v_t - v_{0t}\|_s \leqslant \frac{R_0}{s_0 - s}, \quad \|p - p_0\|_s \leqslant \frac{R_0}{(s_0 - s)^2}.$$

Доказательство. Для удобства дальнейших исследований введём обозначения:

$$\phi_1(t,z,x) = v(t,z,x), \quad \phi_2(t,z,x) = v_t(t,z,x), \quad \phi_3(z,x) = p(z,x),$$
$$\phi_1^0(t,z,x) = v_0(t,z,x), \quad \phi_2^0(t,z,x) = v_{0t}(t,z,x), \quad \phi_3^0(z,x) = p_0(z,x).$$

Уравнения (8), (11), (12) образуют полную систему равенств для неизвестных функций в области $D_T = \{(t,z,x) \,|0 \leqslant z \leqslant t \leqslant T - z, \ x \in \mathbb{R}^n\}$. Согласно введённым обозначениям для вектор-функций $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ запишем эту систему в операторном виде

$$\phi = B\phi, \tag{13}$$

где $B = (B_1, B_2, B_3)$, и компоненты оператора B в соответствии с интегро-дифференциальными уравнениями (8), (11), (12) определяются по формулам

$$B_1\phi = \phi_1^0(t,z,x) - \frac{1}{2}\iint_{\Delta(z,t)} \Big[\Delta\phi_1(\tau,\xi,x) + k_0(\tau - \xi)\phi_3(\xi,x) + \\ + \phi_3(\xi,x)\int_0^{\tau-\xi} k_0(\alpha)\phi_1(\tau - \alpha, \xi, x)d\alpha\Big] d\tau d\xi,$$

$$B_2\phi = \phi_2^0(t,z,x) - \frac{1}{2}\int_0^z \Big[\Delta\phi_1(\xi + t - z, \xi, x) + (k_0(t - z) - k_0(t + z - 2\xi)\phi_3(\xi,x) - \\ - \Delta\phi_1(-\xi + t + z, \xi, x) + \phi_3(\xi,x)\int_0^{t-z} k_0(\alpha)\phi_1(\xi + t - z - \alpha, \xi, x)d\alpha - \\ - \phi_3(\xi,x)\int_0^{t+z-2\xi} k_0(\alpha)\phi_1(t + z - \xi - \alpha, \xi, x)d\alpha\Big] d\xi,$$

$$B_3\phi = \phi_3^0(z,x) - \frac{2}{k_0(0)}\int_0^z \Big[\Delta\phi_2(2z - \xi, \xi, x) + \phi_3(\xi,x)k_0'(2z - 2\xi) + \\ + \phi_3(\xi,x)\int_0^{2z-2\xi} k_0(\alpha)\phi_2(2z - \xi - \alpha, \xi, x)d\alpha\Big] d\xi.$$

Пусть убывающая числовая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена соотношениями

$$a_{n+1} = a_n\Big(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а число a — формулой

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \prod_{n=0}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{-1}.$$

Положительное число $a_0 < T/(2s_0)$ будет выбрано позже. Для уравнения (13) построим последовательные приближения:

$$\phi^{n+1} = B\phi^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \phi^n = (\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n),$$

и обозначим

$$\psi^n = \phi^{n+1} - \phi^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \psi^n = (\psi_1^n, \psi_2^n, \psi_3^n)\,.$$

Определим функцию $s'(z)$ формулой

$$s'(z) = \frac{s + v^n(z)}{2}, \quad v^n(z) = s_0 - \frac{z}{a_n}. \tag{14}$$

В дальнейшем нижний индекс у ϕ означает номер компоненты вектор-функции ϕ, а верхний индекс — номер приближения. Докажем, что при подходящем выборе a_0 выполнены следующие неравенства:

$$\lambda_n = \max\Big\{\sup_{(t,z,s)\in F_n}\Big[\|\psi_1^n\|_s(t,z)\frac{v^n(z)-s}{z}\Big], \sup_{(t,z,s)\in F_n}\Big[\|\psi_2\|_s(t,z)\frac{(v^n(z)-s)^2}{z}\Big],$$
$$\sup_{(t,z,s)\in F_n}\Big[\|\psi_3\|_s(z)\frac{(v^n(z)-s)^3}{z}\Big]\Big\} < +\infty, \tag{15}$$

$$\big\|\phi_i^{n+1} - \phi_i^0\big\|_{s_0}(t,z) \leqslant \frac{R_0}{(s_0-s)^{i-1}}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{16}$$

для $(t,z,s) \in F_{n+1}$. Здесь

$$F_n = \{(t,z,s) \mid (t,z) \in D_{0T}, 0 < z < a_n(s_0 - s), 0 < s < s_0\}.$$

На самом деле для $n = 0$ имеем

$$\big\|\psi_1^0\big\|_s(t,z) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Big[\big\|\Delta\phi_1^0\big\|_s(\tau,\xi) + |k_0(\tau-\xi)|\,\big\|\phi_3^0\big\|_s(\xi) +$$
$$+ \big\|\phi_3^0\big\|_s(\xi)\int_0^{\tau-\xi} k_0(\alpha)\big\|\phi_1^0\big\|_s(\tau-\alpha,\xi)d\alpha\Big]d\tau d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Big(\frac{4\pi R_0}{(s'(\xi)-s)^2} + k_1 R_0\,(1 + R_0 t)\Big)d\tau d\xi.$$

Здесь использована оценка (4) и введено обозначение $k_1 = \|k_0(t)\|_{C^1[0,T]}$. Используя функцию $s'(\xi)$ из (14), для $n = 0$ получим

$$\left\|\psi_1^0\right\|_s(t,z) \leqslant \int_0^z (z-\xi)\left[\frac{16\pi R_0}{(v^0(\xi)-s)^2} + k_1 R_0(1+R_0 t)\right] d\xi \leqslant$$
$$\leqslant R_0\left[16\pi + s_0^2 k_1(1+R_0T)\right]\int_0^z \frac{(z-\xi)d\xi}{(v^0(\xi)-s)^2} \leqslant$$
$$\leqslant R_0\left[16\pi + s_0^2 k_1(1+R_0T)\right]\frac{z}{v^0(z)-s}, \quad (t,z,s)\in F_0.$$

Поступая аналогично, находим

$$\left\|\psi_2^0\right\|_s(t,z) \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^z \left[\frac{8\pi R_0}{(s'(\xi)-s)^2} + 2k_1 R_0(1+2R_0 t)\right] d\xi \leqslant$$
$$\leqslant R_0\left[16\pi + s_0^2 k_1(1+2R_0T)\right]\frac{z}{(v^0(z)-s)^2}, \quad (t,z,s)\in F_0,$$

$$\left\|\psi_3^0\right\|_s(z) \leqslant \frac{2s_0R_0}{|k_0(0)|}\left[16\pi + s_0^2 k_1(1+2R_0T)\right]\frac{z}{(v^0(z)-s)^3}, \quad (t,z,s)\in F_0.$$

В последних оценках были использованы неравенства

$$\frac{1}{v\,(\xi)-s} \leqslant \frac{1}{v^0(z)-s}, \quad v^0(z)-s<s_0,$$

справедливые для $\xi\in(0,z)$, $s\in(0,s_0)$, $(t,z,s)\in F_0$. Из полученных оценок следует выполнение неравенства (15) при $n=0$. Кроме того, для $(t,z,s)\in F_1$ находим

$$\left\|\phi_i^1-\phi_i^0\right\|_s(t,z) = \left\|\psi_i^0\right\|_s(t,s) \leqslant \frac{\lambda_0 z}{(v^0(z)-s)^i} \leqslant \frac{2^{i-1}a_0\lambda_0}{(s_0-s)^{i-1}}, \quad i=1,2,3.$$

При выборе a_0 так, что $4a_0\lambda_0 \leqslant R$, неравенства (16) будут выполняться для $n=0$. Покажем методом индукции, что неравенства (15), (16) имеют место и для других n, если выбрать a_0 подходящим образом. Пусть неравенства (15), (16) справедливы для $n=1,2,3,\ldots,j$. Тогда для $(t,z,s)\in F_{j+1}$

$$\|\psi_1^{j+1}\|(t,z) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^z\int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg[\|\Delta\psi_1^j\|(\tau,\xi) + k_1\|\psi_3^j\|(\xi) +$$
$$+ k_1\|\psi_3^j\|_s(\xi)\int_0^{\tau-\xi}\|\phi_1^{j+1}\|(\tau-\alpha,\xi)d\alpha + k_1\|\phi_3^j\|\int_0^{\tau-\xi}\|\psi_1^j\|(\tau-\alpha,\xi)d\alpha\Bigg]d\tau d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^z\int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg[\frac{4\pi\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(v^j(\xi)-s)} + \frac{k_1\lambda_j\xi}{(v^j(\xi)-s)^3} + \frac{2k_1R_0\lambda_j t\xi}{(v^j(\xi)-s)^3} +$$
$$+ \frac{k_1\lambda_j t\xi R_0(1+s_0^2)}{(v^j(\xi)-s)(s_0-s)^2}\Bigg]d\tau d\xi \leqslant \lambda_j a_0^2\left[16\pi + k_1\left(1+3R_0T+R_0s_0^2T\right)\right]\frac{z}{v^{j+1}(z)-s}.$$

Здесь в промежуточных выкладках функция $s'(\xi)$ взята в виде (14) при $n=j$ и использованы неравенства

$$\|\phi_1^{j+1}\|_s(t,z) \leqslant 2R_0, \quad \|\phi_3^j\|_s(z) \leqslant 2R_0\frac{1+s_0^2}{(s_0-s)^2},$$

справедливые согласно индуктивному предположению, а также очевидные неравенства $a_i \leqslant a_0$, $v^{j+1}(z) \leqslant v^j(z)$. Аналогичные рассуждения для ψ_2^{j+1}, ψ_3^{j+1} приводят к следующим неравенствам:

$$\|\psi_2^{j+1}\|(t,z) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[\frac{8\pi\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(v^j(\xi)-s)} + \frac{2k_1\lambda_j\xi}{(v^j(\xi)-s)^3} + \frac{2k_1R_0\lambda_j t\xi}{(v^j(\xi)-s)^3} +$$
$$+\frac{k_1\lambda_j t\xi R_0(1+s_0^2)}{(v^j(\xi)-s)(s_0-s)^2}\Bigg]d\xi \leqslant \lambda_j a_0\left[16\pi + k_1\left(1+2R_0T+R_0s_0^2T\right)\right]\frac{z}{(v^{j+1}(z)-s)^2},$$

$$\|\psi_3^{j+1}\|(z) \leqslant \frac{2}{|k_0(0)|}\int_0^z \Bigg[\frac{4\pi\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(v^j(\xi)-s)^2} + \frac{k_1\lambda_j\xi}{(v^j(\xi)-s)^3} +$$
$$+\frac{2k_1zR_0\lambda_j(1+s_0)\xi}{(v^j(\xi)-s)^3(s_0-s)^2} + \frac{2k_1\lambda_j z\xi R_0(1+s_0^2)}{(v^j(\xi)-s)^2(s_0-s)^2}\Bigg]d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\lambda_j a_0}{|k_0(0)|}\left[16\pi + k_1s_0 + 2k_1R_0T\left(2+s_0+s_0^2\right)\right]\frac{z}{(v^j(z)-s)^3}, \quad (t,z,s)\in F_{j+1}.$$

Из полученных оценок следует $\lambda_{j+1} \leqslant \lambda_j\rho$, $\lambda_{j+1} < \infty$,

$$\rho = a_0\left[16\pi + \max(1,s_0)\,k_1 + 2k_1R_0T(2+s_0+s_0^2)\right]\max(1,a_0,2|k_0(0)|^{-1}).$$

Вместе с тем для $(t,z,s)\in F_{j+2}$ имеем

$$\|\phi_i^{j+2}-\phi_i^0\|_s(t,z) \leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\|\phi_i^{n+1}-\phi_i^n\|_s(t,z) =$$
$$= \sum_{n=0}^{j+1}\|\psi_i^n\|_s(t,z) \leqslant \sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n z}{(v^n(z)-s)^i} \leqslant \frac{1}{(s_0-s)^{i-1}}\sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_n a_{j+2}}{\left(1-a_{j+2}a_n^{-1}\right)^i} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_0 a_0}{(s_0-s)^{i-1}}\sum_{n=0}^{j+1}\rho^n(n+1)^{2i}, \quad i=1,2,3.$$

Выберем $a_0 \in (0,T/2)$ таким, что

$$\rho \leqslant 1, \quad \lambda_0 a_0\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(n+1)^6 \leqslant R_0.$$

Тогда

$$\|\phi_i^{j+2}-\phi_i^0\|_s(t,z) \leqslant \frac{R_0}{(s_0-s)^{i-1}}, \quad (t,z,s)\in F_{j+2}, \quad i=1,2,3.$$

Так как выбор a_0 не зависит от номера приближения, последовательные приближения $\phi^n = (\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n)$ принадлежат $C(F, A_s)$, $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ и для них имеют место неравенства

$$\left\|\phi_i^n - \phi_i^0\right\|_s(t,z) \leqslant \frac{R_0}{(s_0 - s)^{i-1}}, \quad (t,z,s) \in F, \quad i = 1,2,3.$$

При $s \in (0, s_0)$ ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\phi_i^n - \phi_i^{n-1}\right)$, $i = 1,2,3$, сходятся равномерно в норме пространства $C(F, A_s)$, поэтому $\phi^n = (\phi_1^n, \phi_2^n, \phi_3^n) \to \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ предельная функция ϕ является элементом $C(F, A_s)$ и удовлетворяет уравнению (13).

Покажем, что найденное решение единственно. Пусть $\phi^{(1)} = (\phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \phi_3^{(1)})$ и $\phi^{(2)} = (\phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}, \phi_3^{(2)})$ — любые два решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\phi_i^{(j)} - \phi_i^0\|_s(t,z) \leqslant R_0, \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2, \quad (t,z,s) \in F.$$

Обозначим $w_i = \phi_i^{(1)} - \phi_i^{(2)}$, $i = 1,2,3$, и пусть

$$\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} \left\{ \sup_{(t,z,s) \in F} \left[\|w_i\|_s(t,z) \frac{(v(z) - s)^i}{z} \right] \right\} < \infty,$$

где $v(z) = s_0 - s/a$, $a = a_0 \prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{-1}$. Тогда из формулы (13) для функций w_i можно получить соотношения

$$w_1(t,z,x) = -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(z,t)} \Big[\Delta w_1(\tau, \xi, x) + k_0(\tau - \xi) w_3(\xi, x) + \\ + w_3(\xi, x) \int_0^{\tau - \xi} k_0(\alpha) \phi_1^{(1)}(\tau - \alpha, \xi, x) d\alpha + \\ + \phi_3^{(2)}(\xi, x) \int_0^{\tau - \xi} k_0(\alpha) w_1(\tau - \alpha, \xi, x) d\alpha \Big] d\tau d\xi,$$

$$w_2(t,z,x) = -\frac{1}{2} \int_0^z \Big[\Delta w_1 (\xi + t - z, \xi, x) + (k_0(t - z) - k_0(t + z - 2\xi)) w_3(\xi, x) - \\ - \Delta w_1(\xi + t - z, \xi, x) + w_3(\xi, x) \int_0^{\tau - \xi} k_0(\alpha) \phi_1^{(1)}(\xi + t + z - \alpha, \xi, x) d\alpha - \\ - \phi_3^{(2)}(\xi, x) \int_0^{t + z - 2\xi} k_0(\alpha) w_1(t + z - \xi - \alpha, \xi, x) d\alpha \Big] d\xi,$$

$$w_3(t,x) = -\frac{2}{k_0(0)} \int_0^z \Big[\Delta w_2(2z - \xi, \xi, x) + k_0'(2z - 2\xi) w_3(\xi, x) +$$

$$+ w_3(\xi, x) \int_0^{2z-2\xi} k_0(\alpha)\phi_2^{(1)}(2z-\xi-\alpha,\xi,x)d\alpha+ \\ + \phi_3^{(2)}(\xi,x)\int_0^{2z-2\xi} k_0(\alpha)w_2(2z-\xi-\alpha,\xi,x)d\alpha\Big] d\xi.$$

Применяя к ним оценки, приведённые выше, имеем неравенство $\lambda \leqslant \lambda\rho'$, где $\rho' = a\left[16\pi + \max(1,s_0)k_1 + 2k_1R_0T_0(2+s_0+s_0^2)\right]\max(1,\alpha_0,|k_0(0)|^{-1}) < \rho < 1$. Следовательно $\lambda = 0$. Поэтому $\phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)}$, $i = 1,2,3$. Теорема доказана. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // *Докл. АН СССР*, 1971. Т. 200, № 4. С. 789–792; англ. пер.: *Ovsyannikov L. V.* A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces // *Sov. Math., Dokl.*, 1971. Vol. 12. Pp. 1497–1502.
2. *Nirenberg L.* Topics in nonlinear functional analysis. New York: Courant Institute Math. Sci., New York University, 1974. viii+259 pp.
3. *Романов В. Г.* О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // *Дифференциальные уравнения*, 1989. Т. 25, № 2. С. 275–283; англ. пер.: *Romanov V. G.* Local solvability of some multidimensional inverse problems for equations of hyperbolic type // *Differ. Equ.*, 1989. Vol. 25, no. 2. Pp. 203–209.
4. *Романов В. Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // *Сиб. матем. журн.*, 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134; англ. пер.: *Romanov V. G.* Questions of the well-posedness of a problem of determining the speed of sound // *Siberian Math. J.*, 1989. Vol. 30, no. 4. Pp. 598–605.
5. *Романов В. Г.* О разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // *Докл. АН СССР*, 1989. Т. 304, № 4. С. 807–811; англ. пер.: *Romanov V. G.* On the solvability of inverse problems for hyperbolic equations in a class of functions analytic in some of the variables // *Sov. Math., Dokl.*, 1989. Vol. 39, no. 1. Pp. 160–164.
6. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // *Сиб. матем. журн.*, 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582; англ. пер.: *Durdiev D. K.* A multidimensional inverse problem for an equation with memory // *Siberian Math. J.*, 1994. Vol. 35, no. 3. Pp. 514–521.
7. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный Мир, 2005. 296 с. [*Romanov V. G.* Stability in inverse problems. Moscow: Nauchniy Mir, 2005. 296 pp.]

Поступила в редакцию 22/VI/2012;
в окончательном варианте — 04/IX/2012.

MSC: 35R30; 35L10, 35R10, 35L20

THE LOCAL SOLVABILITY OF A PROBLEM OF DETERMINING THE SPATIAL PART OF A MULTIDIMENSIONAL KERNEL IN THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE

***D. K. Durdiev*[1], *J. Sh. Safarov*[2]**

[1] Bukhara State University,
11, M. Ikbol str., Bukhara, 705018, Uzbekistan.
[2] Tashkent University of Information Technology,
108, A. Timur str., Tashkent, 700000, Uzbekistan.

E-mail: `durdiev65@mail.ru`

The multidimensional inverse problem of determining spatial part of integral member kernel in integro-differential wave equation is considered. Herein, the direct problem is represented by the initial-boundary problem for this with zero initial data and Neyman's boundary condition as Dirac's delta-function concentrated on the boundary of the domain $(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $z>0$. As information in order to solve the inverse problem on the boundary of the considered domain the traces of direct problem solution are given. The significant moment of the problem setup is such a circumstance that all given functions are real analytical functions of variables $x\in\mathbb{R}^n$. The main result of the work is concluded in obtaining the local unique solvability of the inverse problem in the class of continuous functions on variable z and analytical on other spatial variables. For this, by means of singularity separation method, the inverse problem is replaced by the initial-boundary problem for the regular part of the solution of this problem. Further, direct and inverse problems are reduced to the solution of equivalent system of Volterra type integro-differential equations. For the solution of the latter, the method of Banach space scale of real analytical functions is used.

Key words: *integro-differential equation, inverse problem, uniqueness, estimate of stability, pulse source, characteristic.*

Original article submitted 22/VI/2012;
revision submitted 04/IX/2012.

Durdimurod K. Durdiev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Mathematical Physics & Analysis.
Jurabek Sh. Safarov, Engineer Programmer, Center of Information Technology.