Функциональный анализ

УДК 517.983.3

КВАЗИОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Дж. К. К. Аль-Делфи

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
454080, Россия, Челябинск, пр. Ленина, 76.

E-mails: rassian71@mail.ru

На основе понятия квазинормы в статье вводится понятие квазисоболевских пространств. Показывается их полнота относительно соответствующих квазинорм и непрерывность вложений этих пространств. Также вводятся понятия квазиоператоров Лапласа и Грина и показывается, что эти квазиоператоры являются топлинейными изоморфизмами.

Ключевые слова: *квазинорма, квазибанахово пространство, квазисоболевы пространства, квазиоператор Лапласа, квазиоператор Грина.*

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^∞ (для простоты). Пусть $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ — соболевское пространство, а W_2^{-1} — сопряжённое к нему относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из $L_2(\Omega)$ пространство с негативной нормой. Отметим хорошо известные (см. например [1, гл. 4]) плотные и непрерывные (даже компактные) вложения

$$\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega). \tag{1}$$

Также хорошо известно, что оператор Лапласа $-\Delta$, определяемый формулой

$$-\langle \Delta u, v\rangle = \sum_{m=1}^{n} \int_\Omega u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задаёт топлинейный изоморфизм [2, гл. III]:

$$-\Delta : \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \to W_2^{-1}(\Omega). \tag{2}$$

Далее, пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — множество собственных значений оператора Лапласа $-\Delta$, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности. Построим пространства

$$l_2^1 = \Big\{ x = \{x^k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |x^k|^2 < +\infty \Big\}, \quad l_2^{-1} = \Big\{ x = \{x^k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |x^k|^2 < +\infty \Big\}$$

Джавад Кадим К. Аль-Делфи, аспирант, каф. уравнений математической физики.

и отметим топлинейные изоморфизмы $l_2^1 \cong \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $l_2^{-1} \cong W_2^{-1}(\Omega)$, а также плотность и непрерывность вложений

$$l_2^1 \hookrightarrow l_2 \hookrightarrow l_2^{-1}, \tag{3}$$

вытекающие из (1). Отметим банаховость пространств l_2^1 и l_2^{-1} с нормами $\|x\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |x^k|^2$ и $\|y\|_{-1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |y^k|^2$ соответственно. (В действительности эти пространства являются гильбертовыми, но их гильбертовость нам не понадобится). Введём в рассмотрение *квазиоператор Лапласа*

$$\Lambda x = \lambda_k x^k. \tag{4}$$

Поскольку $\|\Lambda x\|_{-1} = \|x\|_1$, из (4) следует топлинейность изоморфизма $\Lambda : l_2^1 \to l_2^{-1}$, который, впрочем, легко получить из (2), (3). Обратный к Λ оператор (*квазиоператор Грина* Λ^{-1}) задаётся формулой

$$\Lambda^{-1} y = \lambda_k^{-1} y^k. \tag{5}$$

Статья посвящена перенесению описанной выше идеологии на квазибанаховы пространства l_p, $p \in (0,1)$. В первой части вводятся в рассмотрение *квазисоболевы пространства*

$$l_p^1 = \Big\{ x = \{x^k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/2} |x^k|^p < +\infty \Big\}, \quad l_p^{-1} = \Big\{ x = \{x^k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p/2} |x^k|^p < +\infty \Big\},$$

где $p \in (0,1)$, а $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Устанавливается их полнота относительно соответствующих квазинорм, а также плотность и непрерывность вложений

$$l_p^1 \hookrightarrow l_p \hookrightarrow l_p^{-1}.$$

Во второй части статьи доказывается, что квазиоператор Лапласа (4) является топлинейным изоморфизмом, причем обратным к нему служит квазиоператор Грина (5).

1. Квазисоболевы пространства. Пусть $\mathfrak{L}$ — линейное вещественное (простоты ради) пространство.

Определение. *Квазинормированным пространством* называется упорядоченная пара $(\mathfrak{L}, {}_q\|\cdot\|)$, где *квазинорма* ${}_q\|\cdot\| : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(i) $\forall x \in \mathfrak{L}\ {}_q\|x\| \geqslant 0$, причём ${}_q\|x\| = 0$ точно тогда, когда $x = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нуль пространства $\mathfrak{L}$;

(ii) $\forall x \in \mathfrak{L}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ {}_q\|\alpha x\| = |\alpha|_q \|x\|$;

(iii) $\forall x, y \in \mathfrak{L}\ {}_q\|x + y\| \leqslant \mathrm{const}({}_q\|x\| + {}_q\|y\|)$, где константа $\mathrm{const} \geqslant 1$ и не зависит ни от x, ни от y.

В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{L}, {}_q\|\cdot\|)$ будем отождествлять с линейным пространством $\mathfrak{L}$. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathfrak{L}$ называется *сходящейся* к $x \in \mathfrak{L}$, если $\lim_{k\to\infty} {}_q\|x_k - x\| = 0$. Этот факт будем записывать так: $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Последовательность называется *фундаментальной*, если $\lim_{k,r\to\infty}(x_k - x_r) = 0$.

Пространство $\mathfrak{L}$ называется *квазибанаховым*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к некоторой точке этого пространства. Отметим сразу, что любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Пространства l_p — квазибанаховы при всех $p \in (0, +\infty]$, однако они банаховы только при $p \in [1, +\infty]$.

Лемма. *Квазисоболевы пространства l_p^1 и l_p^{-1} являются квазибанаховыми при всех $p \in (0, +\infty]$.*

Доказательство этого факта аналогично п. 4.2 [3]. Заметим лишь, что константа $\mathrm{const} = 2^{1/p}$ при $p \in (0, 1)$ и $\mathrm{const} = 1$ при $p \in [1, +\infty]$.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — два квазибанаховых пространства. Будем говорить, что
– $\mathfrak{U}$ *вложено в* $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U}$ подмножество $\mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;
– $\mathfrak{U}$ *плотно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;
– $\mathfrak{U}$ *плотно и непрерывно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ ${}_q\|u\|_{\mathfrak{U}} \geqslant C_q\|u\|_{\mathfrak{F}}$, где $C \in \mathbb{R}_+$ — некоторая константа, не зависящая от u; плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема. *При всех $p \in (0, +\infty]$ имеют место плотные и непрерывные вложения $l_p^1 \hookrightarrow l_p \hookrightarrow l_p^{-1}$.*

Доказательство. Докажем плотность вложения l_p^1 в l_p. Пусть $x \in l_p$, рассмотрим последовательность $\{x_k\}$, где

$$x_1 = (x^1, 0, 0, \ldots),\ x_2 = (x^1, x^2, 0, 0, \ldots),\ \ldots,\ x_k = (x^1, x^2, \ldots, x^k, 0, 0, \ldots), \ldots.$$

Очевидно, $\{x_k\} \subset l_p^1$, причём $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ в квазинорме l_p.

Непрерывность вложения $l_p^1 \hookrightarrow l_p$ очевидна.

Утверждение $l_p \hookrightarrow l_p^{-1}$ доказывается аналогично. □

2. Квазиоператор Лапласа. Пусть, как и выше, $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонная последовательность такая, что $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Формулой (4) определим квазиоператор Лапласа. Очевидно, что $\Lambda : l_p^1 \to l_p^{-1}$ при всех $p \in (0, +\infty]$, причём ${}_q\|\Lambda\|_{-1} = {}_q\|x\|_1$, где

$${}_q\|x\|_{-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p/2}|x^k|^p\right)^{1/p} \quad \text{и} \quad {}_q\|x\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/2}|x^k|^p\right)^{1/p} \text{ —}$$

квазинормы в пространствах l_p^{-1} и l_p^1 соответственно. Далее формулой (5) определим квазиоператор Грина.

Очевидно, что $\Lambda\Lambda^{-1}x = x$ при всех $x \in l_p^{-1}$ и $\Lambda^{-1}\Lambda x = x$ при всех $x \in l_p^1$, $p \in (0, +\infty]$, причём ${}_q\|\Lambda^{-1}x\|_1 = {}_q\|x\|_{-1}$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *При всех $p \in (0, +\infty]$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : l_p^1 \to l_p^{-1}$ — топлинейный изоморфизм.*

Напомним, что линейный непрерывный оператор $S : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, называется топлинейным изоморфизмом, если существует обратный $S^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, который тоже непрерывен.

Замечание. Распространение результатов данной статьи на случай комплексных пространств l_p, $p \in (0, +\infty]$, очевидно.

Автор выражает свою искреннюю благодарность профессору Г. А. Свиридюку за постановку задачи и проявленный интерес к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Х. Трибель*, Теория интерполяций. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с. [*Kh. Tribel'*, Interpolation theory, function spaces, differential operators. Moscow: Mir, 1980. 664 pp.]
2. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 578 с. [*O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva*, Linear and quasilinear equations of elliptic type. Moscow: Nauka, 1973. 578 pp.]
3. *R. Al-Saphory, A. Al-Janabi, J. Al-Delfi*, “Quasi-Banach Space for the Sequence Space l_p, where $0 < p < 1$” / Journal of Education College, 3. Baghdad, Iraq: University of Al-Mustansriyah, 2007. Pp. 285–295.

Поступила в редакцию 30/I/2013;
в окончательном варианте — 15/II/2013.

MSC: 46B45, 46E35

THE LAPLACE' QUASI-OPERATOR IN QUASI-SOBOLEV SPACES

J. K. K. Al-Delfi

South Ural State University (National Research University),
76, Lenin av., Chelyabinsk, 454080, Russia.

E-mails: `rassian71@mail.ru`

The quasi-Sobolev spaces notion introduced in the article is based on the quasinorms concept. Completeness of these spaces on the appropriate quasi-norms is proved and the continuous embedding of these spaces is shown in the work. Also Laplace' and Green's quasi-operators concepts are introduced; it is shown that these quasi-operators are toplinear isomorphisms.

Key words: *quasi-norm, quasi-Banach space, quasi-Sobolev spaces, Laplace' quasi-operator, Green's quasi-operator.*

Original article submitted 30/I/2013;
revision submitted 15/II/2013.

Jawad K. K. Al-Delfi, Postgraduate Student, Dept. of Equations of Mathematical Phisics.