Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 4 (29). С. 48–55

УДК 517.956.3

КОРРЕКТНОСТЬ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова,
030000, Казахстан, Актобе, ул. Бр. Жубановых, 263.

E-mail: aldash51@mail.ru

Показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: *многомерное волновое уравнение, цилиндрическая область, локальная краевая задача, разрешимость, единственность решения.*

В работе показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен критерий единственности регулярного решения.

Для двумерного пространства в [1] было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики — изучение поведения колебаний струны — некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как замечено в [2, 3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В [4] показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], которые сложно применить в приложениях.

Для трёхмерного пространства получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболических уравнений [6, 7], а в [8, 9] доказана корректность задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения.

Пусть D_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, x_2, \dots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

В области D_α рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geqslant 2$.

В дальнейшем для удобства перейдём от декартовых координат $x_1, x_2, \dots, x_m$, t к сферическим r, θ_1, θ_2, $\dots, \theta_{m-1}$, t, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Серик Аймурзаевич Алдашев (д.ф.-м.н., проф.), директор, институт прикладной математики и информатики.

Рассмотрим следующую локальную краевую задачу.

Задача 1. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D_α *из класса* $C(\overline{D}_\alpha)\cap C^1(D_\alpha\cup S_0)\cap C^2(D_\alpha)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\big|_{S_\alpha}=\varphi_1(r,\theta),\quad u\big|_{\Gamma_\alpha}=\phi_1(t,\theta),\quad (\beta u+\gamma u_t)\big|_{S_0}=\varphi_2(r,\theta),$$

где β, $\gamma=\mathrm{const}$, $\beta^2+\gamma^2\neq 0$, *которая является обобщением задач Дирихле* ($\gamma=0$) *и Пуанкаре* ($\beta=0$).

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_{m-1})$, W_2^l $(l=0,1,\dots)$ — пространства Соболева.

Имеют место следующие утверждения [10].

Лемма 1. *Пусть* $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. *Если* $l\geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\tag{2}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (2) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)|\leqslant c_1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leqslant c_2,\quad c_1,\,c_2=\mathrm{const}.$$

Через $\bar\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar\varphi_{2n}^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (2), соответственно функций $\varphi_1(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1(r,\theta)\in W_2^l(S_\alpha)$, $\psi(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\varphi_2(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$, $l>3m/2$ *и*

$$\beta\sin\mu_{s,n}\alpha\neq\gamma\cos\mu_{s,n}\alpha,\quad s=1,2,\dots.\tag{3}$$

Тогда задача 1 *однозначно разрешима, где* μ_s — *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+(m-2)/2}(z)$.

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}=0,\tag{4}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big),$$

$$g_1=1,\quad g_j=(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{j-1})^2,\quad j>1.$$

Известно [10], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,\dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи D принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$, его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ (см. [10]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\mu\bar{u}_n^k,\quad k=1,2,\ldots,k_n,\ n=0,1,\ldots, \tag{6}$$

при этом первое условие краевых условий (2) с учётом леммы 1 запишется в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t),\\ \beta\bar{u}_n^k(r,0)+\gamma\bar{u}_{nt}^k(r,0)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r),\quad k=1,2,\ldots k_n,\ n=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{7}$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$ в соотношениях (6), (7), получим

$$\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k-\bar{\upsilon}_{ntt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{8}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r),\ \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0,\quad \beta\bar{\upsilon}_n^k(r,0)+\gamma\bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0)=\varphi_{2n}^k(r), \tag{9}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t)=\psi_{nrr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k,\quad \varphi_{1n}^k(r)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_n^k(\alpha),$$

$$\varphi_{2n}^k(r)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r)-\beta\psi_n^k(0)-\gamma\psi_{nt}^k(0),\quad k=1,2,\ldots,k_n,\ n=0,1,\ldots.$$

После замены $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}\upsilon_n^k(r,t)$ задача (8), (9) приводится к следующему виду:

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k-\upsilon_{ntt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k=f_n^k(r,t), \tag{10}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,t)=0,\quad \beta\upsilon_n^k(r,0)+\gamma\upsilon_{nt}^k(r,0)=\tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \tag{11}$$

$$\bar{\lambda}_n=((m-1)(3-m)-4\lambda_n)/4,\quad f_n^k(r,t)=r^{(m-1)/2}\bar{f}_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\varphi}_{jn}^k(r)=r^{(m-1)/2}\varphi_{jn}^k(r),\quad j=1,2.$$

Решение задачи (10), (11) представляется так:

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{12}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0,\quad \upsilon_{1n}^k(1,t)=0,\quad \beta\upsilon_{1n}^k(r,0)+\gamma\upsilon_{1nt}^k(r,0)=0, \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0, \quad \beta\upsilon_{1n}^k(r{,}0) + \gamma\upsilon_{2nt}^k(r{,}0) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r). \tag{16}$$

Решение вышеуказанных задач будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{17}$$

при этом

$$\begin{gathered} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}R_s(r), \\ \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n}R_s(r). \end{gathered} \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учётом (18) получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{19}$$

$$R_s(1) = 0, \quad \left|R_s(0)\right| < \infty, \tag{20}$$

$$T_{stt} + \mu T_s(t) = -a_{s,n}(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha) = 0, \quad \beta T_s(0) + \gamma T_{st}(0) = 0. \tag{22}$$

Согласно [11], ограниченным решением задачи (19), (20) является

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{23}$$

где $\nu = (n + (m-2))/2$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (21) представимо в виде

$$\begin{aligned} T_{s,n}(t) = c_{1s}\cos\mu_{s,n}t + c_{2s}\sin\mu_{s,n}t + \frac{\cos\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi - \\ - \frac{\sin\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi, \end{aligned} \tag{24}$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные [10].

Удовлетворив условиям (22), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{1s}\cos\mu_{s,n}\alpha + c_{2s}\sin\mu_{s,n}\alpha = -\dfrac{\cos\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\displaystyle\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi + \\ \qquad + \dfrac{\sin\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\displaystyle\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi, \\ \beta c_{1s} + \gamma\mu_s c_{2s} = 0, \end{cases} \tag{25}$$

которое имеет единственное решение, если выполняется условие (3).

Подставляя (23) в (18), определяем

$$r^{-1/2}f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\quad r^{-1/2}\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r),$$
$$r^{-1/2}\tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r),\quad 0<r<1. \tag{26}$$

Ряды (26) — разложения в ряды Фурье—Бесселя [12], если

$$a_{s,n}(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{27}$$

$$b_{s,n}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,$$
$$e_{s,n}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \tag{28}$$

μ_s, $s=1,2,\ldots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23), (24) получим решение задачи (13), (14) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{29}$$

где $a_{s,n}(t)$, c_{1s}, c_{2s} определяются из (27), (25).

Далее, подставляя (23) в (15) и (16), с учётом (18) будем иметь задачу

$$V_{stt}+\mu_s^2V_s=0, \tag{30}$$
$$V_s(\alpha)=b_{s,n},\ \beta V_s(0)+\gamma V_{st}(0)=e_s. \tag{31}$$

Общее решение уравнения (30) имеет вид

$$V_{s,n}(t)=c'_{1s}\cos\mu_{s,n}t+c'_{2s}\sin\mu_{s,n}t, \tag{32}$$

где c'_{1s}, c'_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив условиям (31), получим

$$\begin{cases} c'_{1s}\cos\mu_{s,n}\alpha+c'_{2s}\sin\mu_{s,n}\alpha=b_{s,n},\\ \beta c'_{1s}+\gamma\mu_s c'_{2s}=e_{s,n}. \end{cases} \tag{33}$$

Из (23), (32) имеем

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}V_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{34}$$

где b_s, e_s, c'_{1s}, c'_{2s} находятся из (28), (33).

Таким образом, из (5), (12) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_n^k(t)+r^{(1-m)/2}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{35}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (29), (34).

Отметим следующие свойства нулей функций Бесселя (см. [12, 13]):

1°) если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, \ldots$ — положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < \ldots, \quad \nu > -1; \tag{36}$$

2°) если μ_ν, μ'_ν, μ''_ν являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $J''_\nu(z)$ соответственно, то справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \quad \nu > 0, \\ \sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \quad \nu > 0, \\ \sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{(\nu^2-1)}, \quad \nu > 1 \end{gathered} \tag{37}$$

и формулы

$$\begin{gathered} \sin z = z\Big(1 - z\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2\Big), \\ J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\Big(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\Big) + \mathsf{O}\Big(\frac{1}{z^{3/2}}\Big), \quad \nu \geqslant 0, \\ 2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z). \end{gathered} \tag{38}$$

Учитывая (36)–(38) и применяя признак Даламбера, можно показать, что ряды (29), (34) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее, используя формулы (38) и оценки [12]

$$|k_n| \leqslant c_1 n^{m-2}, \quad \Big|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y^k_{n,m}(\theta)\Big| \leqslant c_2 n^{m/2-1+q}, \tag{39}$$

где $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $q = 0, 1, \ldots$, а также леммы, ограничения на заданные функции $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, аналогично [8, 9] показывается, что полученное решение в виде ряда (35) и дважды продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно. Это означает, что решение (35) принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$. □

Теорема 2. *Решение задачи* 1 *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3).

Доказательство. Если выполняется условие (3), то из теоремы 1 вытекает единственность решения задачи 1. Пусть теперь условие (3) нарушено хотя бы для одного $s = p$. Тогда нетривальным решением однородной задачи, соответствующей задаче 1, является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(2-m)/2}\left[\beta\sin\mu_p t - \gamma\mu_p\cos\mu_p t\right] J_{n+(m-2)/2}(\mu_p r) Y^k_{n,m}(\theta),$$

при этом из (38), (39) следует, что она принадлежит искомому классу, если $l > 3m/2$.□

В заключение отметим, что в [14] для уравнения (1) внутри характеристической области приведены корректные постановки задач Дирихле и Пуанкаре.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hadamard J.* Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique // *Princeton University Bulletin*, 1902. Vol. 13. Pp. 49–52.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959. 164 с. [*Bitsadze A. V.* Mixed-Type Equations. Moscow: Akad. Nauk USSR, 1959. 164 pp.]
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. [*Nakhushev A. M.* Problems with Displacement for a Partial Differential Equation. Moscow: Nauka, 2006. 287 pp.]
4. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the virbrating string equation // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1939. Vol. 45. Pp. 851–858.
5. *Fox D. W., Pucci C.* The Dirichlet problem for the wave equation // *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1958. Vol. 46. Pp. 155–182.
6. *Нахушев А. М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // *Диффер. уравн.*, 1970. Т. 6, № 1. С. 190–191. [*Nakhushev A. M.* Uniqueness Criterion for the Dirichlet Problem for an Equation of Mixed Type in a Cylindrical Domain // *Differ. Uravn.*, 1970. Vol. 6, no. 1. Pp. 190–191].
7. *Dunninger D. R.; Zachmanoglou E. C.* The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // *J. Math. Mech.*, 1969. Vol. 18. Pp. 763–766.
8. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation // *Math. Probl. Eng*, 2010. Vol. 2010, 653215. 7 pp.
9. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения / Современная математика и ее приложения, Т. 67, Уравнения с частными производными, 2010. С. 28–32; *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Poincaré problem in the cylindric domain for the higher-dimensional wave equation // *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2011. Vol. 173, no. 2. Pp. 150–154.
10. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1962. 254 с. [*Mihlin S. G.* Higher-dimensional singular integrals and integral equations. Moscow: Fizmatlit, 1962. 254 pp.]
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с. [*Kamke É.* Manual of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1965. 703 pp.]
12. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. II / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 396 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 295 с.
13. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с. [*Tihonov A. N., Samarskiy A. A.* Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1966. 724 pp.]
14. *Алдашев С. А.* Задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения // *Изв. НАН РК, Сер. физ.-мат.*, 2010. № 1. С. 3–6. [*Aldashev S. A.* Dirichlet and Poincaré problems for higher-dimensional wave equation // *Izv. NAN RK, Ser. Fiz.-Mat.*, 2010. no. 1. Pp. 3–6].

Поступила в редакцию 10/V/2012;
в окончательном варианте — 12/VIII/2012.

MSC: 35L05; 35R25

THE WELL-POSEDNESS OF THE LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A CYLINDRIC DOMAIN FOR THE MULTI-DIMENSIONAL WAVE EQUATION

S. A. Aldashev

Aktobe State University after K. Zhubanov,
263, Zhubanov Bruthers st., Aktobe, Kazakhstan, 030000.

E-mail: `aldash51@mail.ru`

This paper proves the unique solvability of the local boundary value problem in a cylindric domain for the multi-dimensional wave equation, which is the generalization of the Dirichlet and Poincare problems. We also obtain the criterion for the uniqueness of the regular solution.

Key words: *multi-dimensional wave equation, cylindrical domain, local boundary value problem, solvability, uniqueness of solutions.*

Original article submitted 10/V/2012;
revision submitted 12/VIII/2012.

Serik A. Aldashev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Director, Institute of Applied Mathematics.