

# Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 519.376

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАВНОНАПРЯЖЁННОГО АРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ МЕТАЛЛОКОМПЗИТНЫХ ПЛАСТИН, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

*А. П. Янковский*

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

E-mails: lab4nemir@rambler.ru

*Методами теории возмущений решена задача равнонапряжённого армирования изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести. Показана возможность существования нескольких альтернативных решений рассматриваемой задачи, которые можно надёжно выделять, используя разработанный алгоритм. Построены конкретные проекты равнонапряжённого армирования двусвязной пластины при разных плотностях армирования на внутреннем контуре.*

**Ключевые слова:** *изгибаемые пластины, установившаяся ползучесть, рациональное проектирование, равнонапряжённое армирование, малый параметр, теория возмущений.*

**Введение.** Настоящая работа продолжает исследования, опубликованные в [1, 2], где была сформулирована задача равнонапряжённого армирования (РА) изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести всех компонентов композиции. В [1] показано, что система разрешающих уравнений такой задачи РА является квазилинейной и относится к смешанно-составному типу [3]. Особенности этой системы уравнений и соответствующих ей нелинейных граничных условий, выявленные в [1, 2], не позволяют надеяться на построение широкого круга аналитических решений и требуют разработки обоснованных численных процедур решения, причём указанные особенности не позволяют произвести и простой перенос известных методов численного интегрирования квазилинейных систем уравнений [4, 5] на решение рассматриваемой задачи. Наличие в задаче естественного малого параметра (см. ниже) позволяет надеяться на эффективность применения хорошо зарекомендовавших себя методов теории возмущений [6 и др.].

Данное исследование посвящено разработке и изучению специфики применения методов теории возмущений для построения и анализа особенностей решений задачи РА изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести всех фазовых материалов.

---

*Андрей Петрович Янковский* (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, лаб. физики быстротекающих процессов.

**1. Система разрешающих уравнений и граничные условия.** Для удобства дальнейшего изложения систему разрешающих уравнений задачи РА и соответствующие ей граничные условия [1] запишем в безразмерном виде, предполагая, что в равномерно нагретую пластину постоянной толщины  $2\tilde{h}$  внедрено  $N$  семейств армирующих проволок постоянного поперечного сечения. (Все размерные функции и величины будем помечать сверху волной, например  $\tilde{h}$ , а соответствующие им безразмерные функции и величины — обозначать теми же символами, но без волны.) Тогда замкнутая система разрешающих уравнений, содержащая в качестве неизвестных функций безразмерную скорость прогиба установившейся ползучести  $v$  и параметры РА  $\omega_k, \psi_k, A_k$ , состоит [1] из уравнения равновесия

$$\sum_k \sigma_k^0 [\partial_n(\psi_k, A_k) - A_k^2/\omega_k] - \varepsilon B(v, \omega) = -p(x_1, x_2); \quad (1)$$

условий постоянства поперечных сечений волокон

$$\partial_s(\psi_k, \omega_k) + \omega_k \partial_n(\psi_k, \psi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (2)$$

условий равнонапряжённости арматуры

$$\partial_s(\psi_k, \partial_s(\psi_k, v)) - A_k \partial_n(\psi_k, v)/\omega_k = -\xi_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где

$$A_k = \omega_k \partial_s(\psi_k, \psi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (4)$$

$$B(v, \omega) \equiv \sum_{i=1,2} \left[ \left( 1 - \sum_k \omega_k \right) \kappa^{\mu_0-1} (2v_{,ii} + v_{,jj}) \right]_{,ii} + \\ + 2 \left[ \left( 1 - \sum_k \omega_k \right) \kappa^{\mu_0-1} v_{,12} \right]_{,12} \quad (j = 3 - i), \quad (5)$$

$$\partial_s(\psi_k, \cdot) = (\cdot)_{,1} \cos \psi_k + (\cdot)_{,2} \sin \psi_k,$$

$$\partial_n(\psi_k, \cdot) = \partial_s(\psi_k + \pi/2, \cdot) = -(\cdot)_{,1} \sin \psi_k + (\cdot)_{,2} \cos \psi_k \quad (1 \leq k \leq N),$$

$$\kappa = 2\sqrt{v_{,11}^2 + v_{,11}v_{,22} + v_{,22}^2 + v_{,12}^2}, \quad \omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\};$$

суммирование по  $k$  производится от 1 до  $N$ ; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $x_i, i = 1, 2$ .

Пусть область  $G$ , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром  $\Gamma$ , тогда на одной части этого контура (обозначим её  $\Gamma_p$ ) могут быть заданы статические [1]

$$\sum_k \sigma_k^0 \omega_k \cos^2(\psi_k - \beta) - \varepsilon D_M(v, \omega) = M_n, \\ - \sum_k \sigma_k^0 A_k \sin(\psi_k - \beta) + 0,5 \sum_k \sigma_k^0 \partial_\tau(\omega_k \sin 2(\psi_k - \beta)) - \\ - \varepsilon C_F(v, \omega) - \varepsilon D_F(v, \omega) = F_{nz}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_M(v, \omega) &\equiv \left(1 - \sum_k \omega_k\right) \kappa^{\mu_0-1} [(2v_{,11} + v_{,22}) \cos^2 \beta + \\
 &\quad + (2v_{,22} + v_{,11}) \sin^2 \beta + v_{,12} \sin 2\beta], \\
 C_F(v, \omega) &\equiv \sum_{i=1,2} n_i \left\{ \left[ \left(1 - \sum_k \omega_k\right) \kappa^{\mu_0-1} (2v_{,ii} + v_{,jj}) \right]_{,i} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \left(1 - \sum_k \omega_k\right) \kappa^{\mu_0-1} v_{,12} \right]_{,j} \right\}, \quad (7) \\
 D_F(v, \omega) &\equiv \sum_{i=1,2} (-1)^{i+1} n_i \left\{ \left(1 - \sum_k \omega_k\right) \kappa^{\mu_0-1} [0,5(v_{,22} - v_{,11}) \sin 2\beta + \right. \\
 &\quad \left. + v_{,12} \cos 2\beta] \right\}_{,j} \quad (j = 3 - i), \quad n_1 = \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta, \\
 \partial_\tau(\cdot) &= \partial_n(\beta, \cdot);
 \end{aligned}$$

на другой части (обозначим её  $\Gamma_v$ ) контура  $\Gamma$  — кинематические граничные условия:

$$v(\Gamma_v) = v_0, \quad \partial_s(\beta, v) = \theta_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_v. \quad (8)$$

Кроме того, на части контура  $\Gamma$  (обозначим её  $\Gamma_k$ ), на которой волокна  $k$ -того семейства «входят» в пластину, необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [1]:

$$\omega_k(\Gamma_k) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Решение краевой задачи РА (1)–(4), (6), (8), (9) должно удовлетворять физическим ограничениям [1]

$$0 \leq \omega_k, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad 0 \leq \sum_k \omega_k \leq \omega_* < 1. \quad (10)$$

В уравнениях и соотношениях (1)–(10) использованы следующие формулы обезразмеривания и обозначения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_k^0 &= \frac{2\tilde{\sigma}_k^0}{(2 + \mu_k)\tilde{\sigma}_1^0}, \quad \xi_k^0 = \frac{\tilde{\xi}_k^0}{\tilde{\xi}_1^0}, \quad \tilde{\xi}_k^0 = \tilde{B}_k (\tilde{\sigma}_k^0)^{m_k}, \quad v = \frac{\tilde{h}\tilde{v}}{\tilde{D}^2\tilde{\xi}_1^0}, \\
 x_i &= \frac{\tilde{x}_i}{\tilde{D}}, \quad p = \frac{\tilde{D}^2\tilde{p}}{\tilde{h}^2\tilde{\sigma}_1^0}, \quad M_n = \frac{\tilde{M}_n}{\tilde{h}^2\tilde{\sigma}_1^0}, \quad F_{nz} = \frac{\tilde{D}\tilde{F}_{nz}}{\tilde{h}^2\tilde{\sigma}_1^0}, \\
 v_0 &= \frac{\tilde{h}\tilde{v}_0}{\tilde{D}^2\tilde{\xi}_1^0}, \quad \theta_n = \frac{\tilde{h}\tilde{\theta}_n}{\tilde{D}\tilde{\xi}_1^0}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, N;
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{4}{2 + \mu_0} \frac{\tilde{B}_0 (\tilde{\xi}_1^0)^{\mu_0}}{\tilde{\sigma}_1^0} = \frac{4}{2 + \mu_0} \frac{\tilde{B}_0 (\tilde{\xi}_1^0)^{\mu_0}}{\tilde{B}_1 (\tilde{\xi}_1^0)^{\mu_1}} = \frac{4}{2 + \mu_0} \frac{\tilde{B}_0}{\tilde{B}_1} (\tilde{\xi}_1^0)^{\mu_0 - \mu_1}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_0 &= \left( \sqrt{3^{m_0+1}} \tilde{B}_0 \right)^{-\mu_0} = \text{const}, \quad \bar{B}_k = \tilde{B}_k^{-\mu_k} = \text{const}, \\ \mu_0 &= \frac{1}{m_0}, \quad \mu_k = \frac{1}{m_k} \quad (1 \leq k \leq N); \end{aligned} \quad (13)$$

$\tilde{B}_0, m_0, \tilde{B}_k, m_k$  — известные характеристики (константы) материалов связующего и арматуры  $k$ -того семейства, определяющие степенной закон установившейся ползучести  $\tilde{\xi}_n = \tilde{B}_n \tilde{\sigma}_n^{m_n}$  ( $\tilde{\xi}_n$  — скорость деформации,  $\tilde{\sigma}_n$  — напряжение,  $0 \leq n \leq N$ ) фазовых материалов композиции;  $\tilde{v}$  — скорость прогиба установившейся ползучести;  $\tilde{p}$  — заданная распределённая поперечная нагрузка;  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  — прямоугольные декартовы координаты точек срединной плоскости пластины;  $\tilde{D}$  — характерный размер пластины в плане;  $\tilde{\sigma}_k^0 = \text{const}$  — заданное значение напряжения в равнонапряжённой арматуре  $k$ -того семейства на верхней лицевой поверхности пластины ( $\tilde{x}_3 = \tilde{h}$ );  $\tilde{\sigma}_k^0 = \text{const}$  — соответствующее  $\tilde{\sigma}_k^0$  значение скорости деформаций установившейся ползучести арматуры  $k$ -того семейства;  $\omega_k, \psi_k$  — плотность и угол (отсчитываемый от направления  $x_1$ ) армирования проволокой  $k$ -того семейства;  $\omega_* = \text{const}$  — предельно допустимая суммарная плотность армирования (на практике  $\omega_* \approx 0,7$ );  $\tilde{M}_n, \tilde{F}_{nz}$  — изгибающий момент и приведённая поперечная сила Кирхгофа, заданные на  $\Gamma_p$ ;  $\beta$  — угол, задающий направление внешней нормали к  $\Gamma$  и откладываемый от направления  $x_1$ ;  $\tilde{v}_0, \tilde{\theta}_n$  — скорость прогиба на  $\Gamma_v$  и производная от скорости прогиба по направлению внешней нормали к контуру  $\Gamma_v$ ;  $\omega_{0k}$  — заданные на  $\Gamma_k$  плотности армирования.

При выборе определённых материалов компонентов композиции параметр  $\varepsilon$  может быть малым. Как видно из (12), этот параметр зависит от значения скорости деформаций установившейся ползучести первого семейства равнонапряжённой арматуры  $\tilde{\xi}_1^0$ . Покажем, что для некоторых металлокомпозиций значения  $\varepsilon$  остаются малыми даже при изменении  $\tilde{\xi}_1^0$  в достаточно широком интервале.

Пусть металлокомпозитные пластины получены путем внедрения в медное (Cu) или алюминиевое (АМгЗ) связующее стальной проволоки У8А, тогда при температуре  $\tilde{T} \approx 200$  °С характеристики фазовых материалов таких композиций (см. (13)) имеют следующие значения [7–9]:

$$\begin{aligned} \text{Cu} : \quad m_0 &= 2,16, \quad \tilde{B}_0 = 5,63 \cdot 10^{-9} \text{ (МПа)}^{-m_0} \cdot \text{ч}^{-1}, \\ \text{АМгЗ} : \quad m_0 &= 6,045, \quad \tilde{B}_0 = 1,025 \cdot 10^{-14} \text{ (МПа)}^{-m_0} \cdot \text{ч}^{-1}, \\ \text{У8А} : \quad m_1 &= 24,98, \quad \tilde{B}_1 = 1,054 \cdot 10^{-84} \text{ (МПа)}^{-m_1} \cdot \text{ч}^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 1, а изображены обратные степенные зависимости

$$\tilde{\sigma}_k(\tilde{\xi}_k) = (\tilde{B}_k^{-1} \tilde{\xi}_k)^{\mu_k}, \quad k = 0, 1$$

при параметрах ползучести (13), (14). Кривая 1 соответствует меди, линия 2 — сплаву АМгЗ, кривая 3 — стальной проволоке У8А. На рис. 1, б изображены зависимости  $\varepsilon(\tilde{\xi}_1^0)$  (см. (12)–(14)), где кривая 1 соответствует Cu–У8А-композиции, а линия 2 – АМгЗ–У8А-композиции.

Как видно из рис. 1, б, в достаточно большом интервале изменения  $\tilde{\xi}_1^0 \in (0, 10^{-4}]$  ( $\text{ч}^{-1}$ ) значения параметра  $\varepsilon$  для рассматриваемых металлокомпозиций имеют порядок  $10^{-2}$ , т. е. являются малыми. При этом величины  $\sigma_k^0$

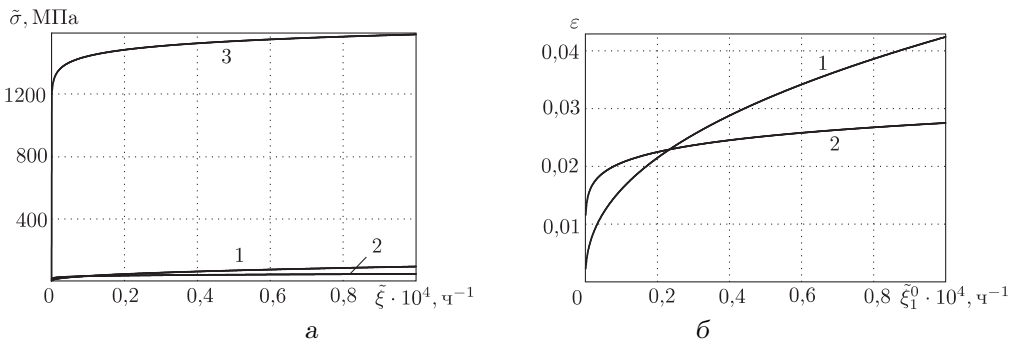


Рис. 1. Степенные аппроксимации установившейся ползучести некоторых фазовых материалов (а) и зависимости малого параметра от скорости деформаций ползучести в равнонапряжённой арматуре (б)

(входящие в те же уравнения (1), (6), что и  $\varepsilon$ ), согласно (11), (13), (14), для арматуры из проволоки У8А равны 0,98, т.е. множители  $|\sigma_k^0| \gg |\varepsilon|$ . Следовательно, параметр  $\varepsilon$  в уравнениях (1), (6) действительно можно рассматривать как малый. (Подобные оценки малости параметра  $\varepsilon$  можно получить и в случае использования в качестве арматуры вольфрамовых проволок [10 и др.]

В [1] показано, что система разрешающих уравнений (1)–(4) является системой квазилинейных уравнений смешанно-составного типа [3], причём траектории армирования, определяемые углами  $\psi_k$ , являются её двукратными действительными характеристиками. Структура уравнений (1)–(4) и граничных условий (6) (с учётом соотношений (5), (7)) показывает, что задачи определения параметров РА  $\psi_k$ ,  $\omega_k$  и скорости прогиба установившейся ползучести  $v$  связаны и решать их необходимо совместно. Последнее обстоятельство существенно усложняет разработку методов решения нелинейной краевой задачи РА (1)–(4), (6), (8), (9).

**2. Применение методов теории возмущений.** В настоящее время теория систем квазилинейных уравнений смешанно-составного типа разработана недостаточно полно [3], чтобы можно было аналитически исследовать свойства решений системы разрешающих уравнений (1)–(4) в общем случае, поэтому целесообразно воспользоваться какими-либо упрощениями этой системы и соответствующих ей граничных условий.

Важная особенность системы разрешающих уравнений задачи РА состоит в наличии в уравнении равновесия (1) и в статических граничных условиях (6) малого параметра  $\varepsilon$ . Это позволяет разыскивать решение задачи РА изгибаемых пластин при помощи методов теории возмущений [6 и др.], например метода разложения решения в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$  [6] или нижеследующего итерационного процесса (который качественно схож с итерационным методом определения основного моментного напряжённого состояния в теории оболочек [11]).

Пусть  $\psi_k^{(s)}$ ,  $\omega_k^{(s)}$ ,  $A_k^{(s)}$ ,  $v^{(s)}$  ( $1 \leq k \leq N$ ) –  $s$ -тое приближения неизвестных функций, тогда  $(s + 1)$ -е приближения получим путем интегрирования уравнений

$$\sum_k \sigma_k^0 \left[ \partial_n(\psi_k^{(r)}, A_k^{(r)}) - \frac{(A_k^{(r)})^2}{\omega_k^{(r)}} \right] = -p(x_1, x_2) + \varepsilon B(v^{(s)}, \omega^{(s)}); \quad (15)$$

$$\partial_s(\psi_k^{(r)}, \psi_k^{(r)}) = \frac{A_k^{(r)}}{\omega_k^{(r)}}, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (16)$$

$$\partial_s(\psi_k^{(r)}, \omega_k^{(r)}) + \omega_k^{(r)} \partial_n(\psi_k^{(r)}, \psi_k^{(r)}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (17)$$

$$\partial_s(\psi_k^{(r)}, V_k^{(r)}) - \frac{A_k^{(r)} \partial_n(\psi_k^{(r)}, v^{(r)})}{\omega_k^{(r)}} = -\xi_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad (18)$$

$$\partial_s(\psi_k^{(r)}, v^{(r)}) = V_k^{(r)}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (x_1, x_2) \in G$$

при граничных и краевых условиях

$$\begin{aligned} \sum_k \sigma_k^0 \omega_k^{(r)} \cos^2(\psi_k^{(r)} - \beta) &= M_n + \varepsilon D_M(v^{(s)}, \omega^{(s)}), \\ -\sum_k \sigma_k^0 A_k^{(r)} \sin(\psi_k^{(r)} - \beta) &= F_{nz} + \varepsilon C_F(v^{(s)}, \omega^{(s)}) + \varepsilon D_F(v^{(s)}, \omega^{(s)}) - \\ &- 0,5 \sum_k \sigma_k^0 \partial_\tau(\omega_k^{(r)} \sin 2(\psi_k^{(r)} - \beta)), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p; \end{aligned} \quad (19)$$

$$v^{(r)}(x_1, x_2) = v_0(\Gamma_v), \quad (20)$$

$$V_k^{(r)}(x_1, x_2) = \sin(\psi_k^{(r)} - \beta) \partial_\tau(v_0) + \cos(\psi_k^{(r)} - \beta) \theta_n(\Gamma_v), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_v;$$

$$\omega_k^{(r)}(x_1, x_2) = \omega_{0k}(\Gamma_k), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad r = s + 1, \quad (21)$$

где  $V_k^{(r)}$  — введённые для удобства функции;  $\omega^{(s)}$  — векторная функция, аналогичная  $\omega$  (см. (5)).

Для начала итерационного процесса нулевое приближение выберем в виде

$$v^{(0)} \equiv 0. \quad (22)$$

Уравнения итерационного процесса (15)–(21) получаются из соответствующих уравнений разрешающей системы следующим образом. В уравнении равновесия (1) и в статических граничных условиях (6) в операторы  $B$ ,  $D_M$ ,  $C_F$ ,  $D_F$ , имеющие в качестве множителя малый параметр  $\varepsilon$ , подставляются приближения неизвестных функций, определённые на предыдущей итерации. Поэтому слагаемые, имеющие множитель  $\varepsilon$ , на каждой итерации известны и в (15), (19) перенесены в правую часть. Задание начального приближения в виде (22) аналогично отбрасыванию в (15), (19) на первой итерации ( $r = 1$ ) слагаемых, содержащих  $\varepsilon$ . Остальные уравнения итерационного процесса на каждой итерации формально совпадают с соответствующими соотношениями разрешающей системы уравнений (см. п. 1).

Проанализируем систему (15)–(18) при различных количествах семейств арматуры ( $N$ ). Пусть в пластину внедрено одно семейство волокон ( $N = 1$ ). Тогда три квазилинейных уравнения (15)–(17) замкнуты относительно трех неизвестных функций  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$ , определяющих  $r$ -тые приближения параметров РА. Если эти функции известны из каких-то соображений, то два линейных уравнения (18) замкнуты относительно двух функций  $v^{(r)}$ ,  $V_1^{(r)}$ ,

определяющих  $r$ -тое приближение скорости прогиба установившейся ползучести. Аналогично распадаются граничные и краевые условия (19)–(21): условия (19), (21) состоят из трех равенств и замкнуты относительно контурных значений функций  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$ , кинематические же условия (20) задают на кромке  $\Gamma_v$  контурные значения функций  $v^{(r)}$ ,  $V_1^{(r)}$ . Следовательно, при  $N = 1$  итерационный процесс (15)–(22) позволяет расщепить ранее связанные задачи определения параметров РА и скорости прогиба в поперечно изгибаемой пластине на отдельные подзадачи, которые можно последовательно интегрировать на каждой итерации.

Если в пластину внедрены два семейства арматуры ( $N = 2$ ), то система (15)–(18) в целом замкнута относительно неизвестных функций  $\psi_k^{(r)}$ ,  $A_k^{(r)}$ ,  $\omega_k^{(r)}$ ,  $v^{(r)}$ ,  $V_k^{(r)}$ , но её подсистема (15)–(17), содержащая приближения только параметров РА  $\psi_k^{(r)}$ ,  $A_k^{(r)}$ ,  $\omega_k^{(r)}$  ( $k = 1, 2$ ), не замкнута, так как состоит из пяти уравнений и содержит шесть неизвестных функций. Следовательно, при  $N = 2$  система (15)–(18) не распадается столь же просто, как это было при  $N = 1$ , на несвязанные подзадачи определения приближений параметров РА и скорости прогиба. При исследовании типа системы (15)–(18) выясняется, что её характеристический определитель тождественно равен нулю. Это обстоятельство вызвано тем, что два последних уравнения (18) содержат частные производные только от одной функции  $v^{(r)}$ , а значит, должно выполняться некоторое условие совместности этих уравнений, которое можно получить за счёт перекрестного дифференцирования двух последних равенств (18) по направлениям  $\psi_m^{(r)}$  ( $m = 3 - k$ ) [12]. Однако такое условие совместности содержит функции  $\psi_k^{(r)}$ ,  $V_k^{(r)}$  и их частные производные, т.е. преобразованная соответствующим образом система (18) совместно с (15)–(17), по-прежнему не расщепляет задачу определения приближений скорости прогиба и параметров РА на отдельные подзадачи. Следовательно, при  $N = 2$  применение итерационного процесса для решения задачи РА изгибаемых пластин приводит лишь к упрощению структуры разрешающих уравнений и граничных условий, но качественные особенности системы уравнений итерационного процесса остаются прежними: для каждого  $r \geq 1$  в (15)–(22) задачи определения приближений параметров РА и скорости прогиба связаны между собой; соответствующие системы уравнений имеют составной тип [13]; система (15)–(18) является квазилинейной. Все это существенно усложняет разработку методов интегрирования уравнений итерационного процесса по сравнению со случаем  $N = 1$ .

Если в пластину внедрены более двух семейств волокон ( $N \geq 3$ ), то (по тем же причинам, что и при  $N = 2$ ) характеристический определитель системы (15)–(18) тождественно равен нулю. Однако в этом случае можно легко получить условия совместности подсистемы (18), содержащие только приближения параметров РА, что позволяет замкнуть подсистему (15)–(18) относительно функций  $\psi_k^{(r)}$ ,  $A_k^{(r)}$ ,  $\omega_k^{(r)}$  ( $1 \leq k \leq N$ ), а значит, и расщепить исходную задачу РА на её составляющие, как при  $N = 1$ . Получим указанные зависимости, переписав условия РА (18) в исходной форме (см. (12) в [1]):

$$v_{,11}^{(r)} l_{k1}^{(r)} l_{k1}^{(r)} + v_{,22}^{(r)} l_{k2}^{(r)} l_{k2}^{(r)} + 2v_{,12}^{(r)} l_{k1}^{(r)} l_{k2}^{(r)} = -\xi_k^0 = \text{const} \neq 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (23)$$

где  $l_{k1}^{(r)} \equiv \cos \psi_k^{(r)}$ ,  $l_{k2}^{(r)} \equiv \sin \psi_k^{(r)}$ .

Рассмотрим (23) как систему линейных алгебраических уравнений относительно  $v_{,ij}^{(r)}$ . Выберем из (23) три уравнения, определитель которых отличен от нуля в некоторой окрестности точки  $(x_1, x_2)$ . Пусть для конкретности это будут три первых уравнения, тогда, используя правило Крамера, из них можно однозначно определить

$$v_{,ij}^{(r)} = \frac{\Delta_{ij}(\psi_1^{(r)}, \psi_2^{(r)}, \psi_3^{(r)})}{\Delta(\psi_1^{(r)}, \psi_2^{(r)}, \psi_3^{(r)})}, \quad i, j = 1, 2, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -2 \det \begin{vmatrix} \xi_k^0 & l_{k2}^{(r)} l_{k2}^{(r)} & l_{k1}^{(r)} l_{k2}^{(r)} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{12} &= \Delta_{21} = - \det \begin{vmatrix} l_{k1}^{(r)} l_{k1}^{(r)} & l_{k2}^{(r)} l_{k2}^{(r)} & \xi_k^0 \end{vmatrix}, \\ \Delta_{22} &= -2 \det \begin{vmatrix} l_{k1}^{(r)} l_{k1}^{(r)} & \xi_k^0 & l_{k1}^{(r)} l_{k2}^{(r)} \end{vmatrix}, \\ \Delta &= 2 \det \begin{vmatrix} l_{k1}^{(r)} l_{k1}^{(r)} & l_{k2}^{(r)} l_{k2}^{(r)} & l_{k1}^{(r)} l_{k2}^{(r)} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (25)$$

(Здесь использована построчная запись определителей по  $k$ .) Следовательно, производные  $v_{,ij}^{(r)}$  являются функциями от  $\psi_k^{(r)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Если количество семейств волокон больше трех, то, подставив выражения (24) в уравнения (23) при  $4 \leq k \leq N$ , получим  $N - 3$  нелинейные конечные зависимости между функциями  $\psi_n^{(r)}$  ( $1 \leq n \leq N$ ). Кроме того, производные  $v_{,ij}^{(r)}$  должны удовлетворять условиям совместности деформаций:

$$(v_{,11}^{(r)})_{,2} = (v_{,12}^{(r)})_{,1}, \quad (v_{,12}^{(r)})_{,2} = (v_{,22}^{(r)})_{,1}. \quad (26)$$

Подстановка выражений (24) в (26) даёт ещё две, но уже дифференциальные зависимости между  $\psi_k^{(r)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Получающиеся в итоге конечные и дифференциальные связи совместно с (15)–(17) образуют замкнутую систему уравнений относительно приближений параметров РА  $\psi_k^{(r)}$ ,  $A_k^{(r)}$ ,  $\omega_k^{(r)}$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Следовательно, преобразованная таким образом система (15)–(18) вновь распадается на несвязанные подзадачи определения приближений параметров РА и скорости прогиба установившейся ползучести пластины, интегрировать которые можно последовательно на каждой итерации.

Однако такой подход имеет следующую особенность. Пусть уже известны приближения  $\psi_k^{(r)}$  ( $1 \leq k \leq N$ ), тогда из (24) с учётом (25) будут известны производные  $v_{,ij}^{(r)}$ , удовлетворяющие условиям совместности (26). А значит, во всей области  $G$ , занимаемой пластиной в плане, будут известны полные дифференциалы  $dv_{,i}^{(r)} = v_{,i1}^{(r)} dx_1 + v_{,i2}^{(r)} dx_2$ . Интегрируя эти выражения, задав для них начальные условия всего в одной точке [14], получим производные  $v_{,i}^{(r)}$ ,  $i = 1, 2$ , которые отвечают условиям  $v_{,12}^{(r)} = v_{,21}^{(r)}$ , поэтому выражение  $dv^{(r)} = v_{,1}^{(r)} dx_1 + v_{,2}^{(r)} dx_2$  будет полным дифференциалом функции  $v^{(r)}$ . Интегрирование последнего выражения (при задании начального условия всего



в одной точке) позволит определить во всей области  $G$   $r$ -тое приближение скорости прогиба  $v^{(r)}$ . Очевидно, что случаи закрепления пластины, когда кинематические граничные условия для скорости прогиба и её частных производных первого порядка заданы всего в одной точке (или каждое в своей точке) кромки, практически не встречаются.

Таким образом, проведенное рассуждение показывает, что при внедрении в пластину более одного семейства арматуры итерационный процесс (15)–(22) не приводит к принципиальному упрощению исходной системы разрешающих уравнений задачи РА.

Проанализируем более подробно уравнения итерационного процесса (15)–(22) в случае укладки одного семейства равнонапряжённой арматуры ( $N = 1$ ). Характеристическое уравнение подсистемы (15)–(17), замкнутой относительно функций  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$ , имеет вид

$$(\sin \psi_1^{(r)} - x_2' \cos \psi_1^{(r)})^2 (x_2' \sin \psi_1^{(r)} + \cos \psi_1^{(r)}) = 0, \quad r = s + 1, \quad (27)$$

где производная  $x_2' = dx_2/dx_1$  задаёт направление характеристики.

Равенство (27) означает, что система (15)–(17) имеет две ортогональные действительные характеристики, причём одна из них, задаваемая углами  $\psi_1^{(r)}$ , является двукратной. Наличие только действительных характеристик у этой системы указывает на её сходство с системами уравнений гиперболического типа, рассмотренными в [15]. Однако если уравнения (15), (16) записаны в инвариантах Римана, то уравнение (17) не удаётся ни записать в инвариантах Римана, ни привести к характеристической форме [15], что не позволяет отнести систему (15)–(17) к гиперболическому типу (в смысле определения, введенного в [15]). Кратность же одной из характеристик указывает на близость этой системы к системам параболического типа [16].

Действительно, если задать некоторые значения функций  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$  на двукратной характеристике системы (15)–(17), определяемой углами  $\psi_1^{(r)}$ , и попытаться определить частные производные первого порядка от этих функций, то окажется, что от  $\psi_1^{(r)}$  эти производные можно определить непосредственно из системы (15)–(17), а для определения производных от  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$  по направлениям, не касательным к этой характеристике (например, по нормальному направлению  $\partial_n(\psi_1^{(r)}, \cdot)$ ), необходимо дважды продифференцировать  $\omega_1^{(r)}$  по направлению двукратной характеристики, т.е. необходимо использовать вторую производную  $\partial_s^2(\psi_1^{(r)}, \omega_1^{(r)})$ . Известно, что подобными особенностями обладают системы уравнений параболического типа [16].

Если же задать значения функций  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$  на характеристике, определяемой углами  $\psi_1^{(r)} + \pi/2$ , и вновь попытаться определить частные производные первого порядка от этих функций, то окажется, что от  $\psi_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$  эти производные можно определить из системы (15)–(17), а производную от  $A_1^{(r)}$  по направлению, не касательному к указанной характеристике, вообще определить нельзя. Подобной особенностью обладают системы уравнений гиперболического типа [15].

Следовательно, система (15)–(17) не подпадает ни под один из типов су-

пствующей на сегодняшний день классификации систем дифференциальных уравнений с частными производными. Можно лишь констатировать, что эта система относится к некоторому более общему типу, частными случаями которого являются системы уравнений гиперболического и параболического типов. (Полная ясность в этот вопрос пока ещё не внесена.)

Указанная особенность системы (15)–(17) приводит к тому, что характеристики системы могут быть линиями слабых разрывов. Кроме того, решение задачи Коши для нее может быть построено только в области определённости решения (об этом свидетельствуют многочисленные расчёты, проведенные автором), что характерно для решений задачи Коши для систем уравнений гиперболического типа [15].

Если функции  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$  известны из системы (15)–(17), то система уравнений (18) является линейной системой параболического типа, замкнутой относительно функций  $v^{(r)}$ ,  $V_1^{(r)}$ , характеристическое уравнение которой имеет вид

$$(\sin \psi_1^{(r)} - x_2' \cos \psi_1^{(r)})^2 = 0, \quad r = s + 1. \quad (28)$$

(Качественно аналогичная система уравнений встречается в механике деформируемого твердого тела при решении жёсткопластических задач в случае обобщённого плоского напряжённого состояния с использованием критерия текучести Мизеса и при учёте массовых сил [17].)

Уравнения (27), (28) показывают, что на каждой итерации подсистемы (15)–(17) и (18) имеют совпадающие двукратные характеристики, которые в силу квазилинейности подсистемы (15)–(17) изменяются от итерации к итерации и определяются углами  $\psi_1^{(r)}$ . Так как функция  $\psi_1$  задаёт траектории РА, а  $\psi_1^{(r)}$  —  $r$ -тое приближение к  $\psi_1$ , то двукратные характеристики систем (15)–(17) и (18) можно трактовать как  $r$ -тые приближения к траекториям РА. Если итерационный процесс (15)–(22) сходится, то двукратные характеристики совпадут в пределе с траекториями РА, которые, в свою очередь, являются двукратными характеристиками системы разрешающих уравнений задачи РА (1)–(4) (см. (21) в [1]).

Для квазилинейных систем уравнений с действительными характеристиками наиболее естественно и просто ставится задача Коши, поэтому обратимся к вопросу постановки задачи Коши для систем (15)–(17) и (18). Эти подсистемы удовлетворяют условиям теоремы Коши–Ковалевской [18], поэтому при аналитических входных данных решение задачи Коши для них существует и единственно. Для более широких классов входных данных теоремы существования для этих подсистем автору неизвестны.

Покажем, что статические граничные условия (19) совместно с краевым условием (21) задают контурные значения функций  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ . Для этого будем считать, что арматура «входит» в пластину на той части контура  $\Gamma$ , где заданы статические граничные условия ( $\Gamma_p = \Gamma_1$ ). Тогда на контуре  $\Gamma_p$  из (21) известны контурные значения функции  $\omega_1^{(r)}$ , входящей в (19). Исключив эту функцию из первого равенства (19), получим замкнутое относительно  $\psi_1^{(r)}$  трансцендентное уравнение, решение которого имеет вид

$$\psi_1^{(r)} = \pm \arccos \left\{ -\sqrt{\frac{M_n + \varepsilon D_M(v^{(s)}, \omega^{(s)})}{\sigma_1^0 \omega_{01}}} \right\} + \beta, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p. \quad (29)$$

Здесь угол  $\beta$  задаёт направление внешней нормали к контуру  $\Gamma_p$ , поэтому, чтобы ортогональные характеристики системы (15)–(17) входили в область  $G$ , занимаемую пластиной в плане, необходимо решение уравнения (29) разыскивать на открытом интервале  $(\psi_1^{(r)} - \beta) \in (\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2)$ . Это же требование приводит к выбору знака  $(-)$  перед радикалом в (29). Если краевые значения функции  $\psi_1^{(r)}(\Gamma_p)$  уже известны из уравнения (29), то второе граничное условие (19) определяет контурные значения функции

$$A_1^{(r)}(\Gamma_p) = -\frac{1}{\sigma_1^0 \sin(\psi_1^{(r)} - \beta)} \left\{ F_{nz} + \varepsilon C_F(v^{(s)}, \omega^{(s)}) + \varepsilon D_F(v^{(s)}, \omega^{(s)}) - 0,5\sigma_1^0 \partial_\tau [\omega_{01} \sin 2(\psi_1^{(r)} - \beta)] \right\}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p. \quad (30)$$

Равенства (29), (30) имеют смысл при условиях  $\sin(\psi_1^{(r)} - \beta) \neq 0$ ,  $\cos(\psi_1^{(r)} - \beta) \neq 0$ ,  $\omega_{01} \neq 0$ , причём два первых из этих неравенств возможны лишь при условии

$$0 < [M_n + \varepsilon D_M(v^{(s)}, \omega^{(s)})] / (\sigma_1^0 \omega_{01}) < 1, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p. \quad (31)$$

При выполнении ограничений (31) равенство (29) за счёт выбора знаков  $(\pm)$  определяет два корня  $\psi_1^{(r)}(\Gamma_p)$ , которые попадают в указанный выше интервал и задают два направления, симметричные относительно нормали к контуру  $\Gamma_p$ . При известной контурной функции  $\psi_1^{(r)}(\Gamma_p)$  равенство (30) однозначно определяет  $A_1^{(r)}(\Gamma_p)$ . Следовательно, статические граничные условия (19) и краевое условие (21) задают на контуре  $\Gamma_p$  два набора альтернативных краевых условий для подсистемы (15)–(17). А значит, в классе аналитических входных данных задача Коши для этой подсистемы может быть корректно сформулирована.

Косвенным доказательством этого может служить следующий частный случай — случай чистого изгиба пластины, когда  $p \equiv 0$ ,  $F_{nz} \equiv 0$ . При  $M_n = \text{const} \neq 0$ ,  $\omega_{01} = \text{const} \neq 0$  из (15)–(17), (29), (30) в силу теоремы Коши–Ковалевской следует, что на первой итерации  $A_1^{(1)} \equiv 0$ , а подсистема (16), (17) формально совпадает с (17), (31) в [19], т. е. траектории РА в первом приближении являются прямыми линиями, а функции  $\psi_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$  определяются аналитическими выражениями (3.14)–(3.24) в [20].

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Как уже отмечалось, в общем случае нагружения пластины ( $p \neq 0$ ,  $F_{nz} \neq 0$ ,  $M_n \neq \text{const}$ ) теоремы существования решения задачи Коши (15)–(17), (21), (29), (30) в более широких, чем аналитический, классах входных данных автору не известны. Однако в рассмотренном выше случае чистого изгиба решение этой задачи Коши на первой итерации существует, если краевые значения для функций  $\psi_1^{(1)}$  принадлежат классу гладких функций, а краевые значения для  $\omega_1^{(1)}$  (т. е.  $\omega_{0k}$ ) принадлежат классу непрерывных функций, заданных на части контура  $\Gamma_p$ . (Об этом свидетельствует структура решения (3.19), (3.21)–(3.24) в [20].)

Если после интегрирования задачи Коши (15)–(17), (21), (29), (30) её область определённости покрывает всю область  $G$ , занимаемую пластиной

в плане, то в каждой точке  $(x_1, x_2) \in G$  известны функции  $\psi_1^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $\omega_1^{(r)}$ . В этом случае подсистема (18), согласно (28), является линейной системой уравнений параболического типа [16]. Для этой подсистемы также естественно ставится задача Коши, причём в качестве краевых условий для функций  $v^{(r)}$ ,  $V_1^{(r)}$  выступают кинематические граничные условия (20), в которых функции  $v_0(\Gamma_v)$ ,  $\theta_n(\Gamma_v)$  предполагаются аналитическими. Напомним, что по высказанному ранее условию волокна «выходят» из пластины на части контура  $\Gamma_v$ , где заданы кинематические граничные условия (20). В связи с этим для однозначной формулировки задачи Коши для системы (18) необходимо, чтобы характеристики системы (15)–(17) (см. (27)) нигде не касались контура  $\Gamma_v$ .

Таким образом, на каждой итерации решение задачи РА сводится к последовательному интегрированию задачи Коши (15)–(17), (21), (29), (30) с учётом (31) и задачи Коши (18), (20). Такое неклассическое сведение краевой задачи РА к последовательности решений двух задач Коши возникает из-за того, что система разрешающих уравнений (1)–(4) совместно с граничными и краевыми условиями (6), (8), (9) образует краевую задачу с сингулярным возмущением [6], а итерационный процесс (15)–(22) относится к разряду методов теории возмущений.

Для проверки сходимости итерационного процесса целесообразно  $r$ -тые приближения неизвестных функций подставить в систему разрешающих уравнений и соответствующие ей граничные и краевые условия (п. 1), а затем проконтролировать нормы возникающих при этом невязок. Следует отметить, что невязки возникают лишь в уравнении равновесия (1) и статических граничных условиях (6) и имеют вид

$$\begin{aligned} \delta^{(r)} &= -\varepsilon[B(v^{(r)}, \omega^{(r)}) - B(v^{(s)}, \omega^{(s)})], \quad (x_1, x_2) \in G, \\ \delta_M^{(r)} &= -\varepsilon[D_M(v^{(r)}, \omega^{(r)}) - D_M(v^{(s)}, \omega^{(s)})], \\ \delta_F^{(r)} &= -\varepsilon[C_F(v^{(r)}, \omega^{(r)}) - C_F(v^{(s)}, \omega^{(s)}) + D_F(v^{(r)}, \omega^{(r)}) - \\ &\quad - D_F(v^{(s)}, \omega^{(s)})], \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \quad r = s + 1, \end{aligned} \quad (32)$$

где нужно учесть соотношения (5), (7).

Равенства (32) показывают, что определение невязок при использовании итерационного процесса не требует дополнительных вычислительных затрат, так как все выражения, входящие в (32), необходимо вычисляются для построения решения на  $(r+1)$ -й итерации. Автор считает, что на настоящий момент времени контроль норм невязок (32) является наиболее удобным практическим критерием проверки сходимости процесса (15)–(22).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Так как равенства (21), (29), (30) с учётом (31) могут определять на контуре  $\Gamma_p$  до двух альтернативных наборов краевых условий для системы (15)–(17) (выбор того или иного набора этих условий определяется только волей проектировщика или из каких-либо дополнительных соображений), удовлетворяющей условиям теоремы Коши–Ковалевской [18], а также в силу единственности решения задачи Коши (18), (20) (в случае аналитических входных данных) при помощи итерационного метода (15)–(22) можно построить до двух различных решений исходной задачи РА, если, конечно, они существуют. Этими решениями можно управлять за счёт варьирования

контурных функций  $\omega_{0k}$  в краевых условиях (21). (Так как выбор того или иного решения всецело зависит от воли проектировщика, то в процессе решения задачи РА при использовании разработанного итерационного метода не может произойти «несанкционированного» перехода от одного решения к другому, например за счёт погрешности численных схем и т. п.) Такое многообразие альтернативных проектов РА выгодно с практической точки зрения, так как позволяет выбрать из их совокупности проекты, обладающие теми или иными эксплуатационными свойствами, а также наиболее удобные с точки зрения технологической реализации.

**Замечание 3.** Два корня  $\psi_1^{(r)}$ , определяемые равенством (29), задают два направления, симметричных относительно нормали к контуру  $\Gamma_p$ . Поэтому анализ уравнений итерационного процесса показывает, что если форма пластины, её нагружение и закрепление обладают симметрией относительно некоторой оси, лежащей в плоскости  $(x_1, x_2)$ , то два получающихся решения задачи РА будут симметричными относительно этой оси. С технологической точки зрения эти два решения представляют собой один и тот же проект РА. Действительно, если уже изготовлен один из указанных проектов, то второй можно получить поворотом вокруг оси симметрии на угол  $\pi$ . (Эти результаты подтверждаются конкретными расчётами, например в осесимметричном случае [2].)

**Замечание 4.** Как уже отмечалось в начале настоящего пункта, решение рассматриваемой задачи РА можно построить и с помощью разложения всех неизвестных функций в асимптотические ряды по малому параметру [6]:

$$\begin{aligned} \psi_k(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^{(m)}(x_1, x_2)\varepsilon^{m-1}, & \omega_k(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \omega_k^{(m)}(x_1, x_2)\varepsilon^{m-1}, \\ A_k(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_k^{(m)}(x_1, x_2)\varepsilon^{m-1}, & v(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} v^{(m)}(x_1, x_2)\varepsilon^{m-1}, \\ V_k(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_k^{(m)}(x_1, x_2)\varepsilon^{m-1}, & V_k &\equiv \partial_s(\psi_k, v), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (33)$$

Асимптотический анализ системы разрешающих уравнений (1)–(4) и соответствующих ей граничных (6), (8) и краевых (9) условий с учётом разложений (33) показывает следующее:

- 1) первые слагаемые  $(\psi_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}, A_k^{(1)}, v^{(1)}, V_k^{(1)})$  в рядах (33) полностью совпадают с решением системы (15)–(22) на первой ( $r = 1$ ) итерации;
- 2) если на второй ( $r = 2$ ) итерации метода (15)–(22) левые части уравнений (15)–(19), (21) и правую часть второго уравнения (20) линеаризовать в окрестности решения для первой итерации, то получающаяся система и краевые условия будут совпадать с уравнениями и краевыми условиями, определяющими коэффициенты при вторых слагаемых  $(\psi_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}, A_k^{(2)}, v^{(2)}, V_k^{(2)})$  в разложениях (33).

На основе столь существенного сходства уравнений итерационного процесса (15)–(22) и метода асимптотических рядов (33) все результаты исследований, полученные ранее в настоящем пункте при анализе уравнений (15)–(22),

можно перенести и на соответствующие цепочки уравнений, получающиеся после подстановки (33) в исходную систему разрешающих уравнений и краевые условия задачи РА (п. 1). Однако итерационный процесс (15)–(22) обладает рядом преимуществ перед методом асимптотических рядов:

- 1) правые части в уравнениях (15)–(20) на каждой итерации имеют одну и ту же достаточно простую структуру (в цепочках же уравнений метода асимптотических рядов (33) структура правых частей с увеличением номера уточнения  $m$  существенно усложняется);
- 2) для построения  $r$ -того приближения по методу итераций используется информация лишь о предыдущем  $(r - 1)$ -м приближении (в правых же частях уравнений метода асимптотических рядов используется информация о всех предыдущих  $n$ -х уточнениях:  $n = 1, 2, \dots, r - 1$ );
- 3) характеристики подсистем (15)–(17), (18) изменяются от итерации к итерации и при сходящемся итерационном процессе двукратные характеристики совпадают в пределе с траекториями армирования (в уравнениях же метода асимптотических рядов (33) характеристики в соответствующих подсистемах уравнений фиксированы и совпадают с характеристиками подсистем (15)–(17), (18) на первой итерации; см. (27), (28) при  $r = 1$ );
- 4) для проверки сходимости обоих обсуждаемых методов целесообразно  $r$ -тые приближения по методу итераций и  $r$ -тые частичные суммы типа (33) подставить в систему разрешающих уравнений и соответствующие ей краевые условия (п. 1) и проконтролировать нормы возникающих при этом невязок, причём в случае метода асимптотических рядов (33) эти невязки возникают во всех уравнениях и краевых условиях исходной системы (п. 1) и с увеличением номера уточнения (с увеличением  $r$ ) структура их существенно усложняется, в случае же итерационного процесса невязки возникают только в уравнениях (1), (6) и имеют достаточно простую структуру (32).

Указанные преимущества позволяют отдать предпочтение итерационному процессу (15)–(22) при практическом решении задач РА изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Если задача РА уже решена (известны функции  $\psi_1, \omega_1, v$ ), то по формулам (3)–(5) из [21] можно определить напряжённое состояние в связующем и в композиции  $(\tilde{\sigma}_{ij})$  пластины, изгибаемой в условиях установившейся ползучести. Кроме того, зная  $\psi_1, \omega_1$ , можно определить и начальное напряжённое состояние  $\bar{\sigma}_{ij}$  в пластине (его можно вычислить, например, методами, изложенными в [22, 23]). Решение же о неустановившейся ползучести на первой её стадии можно получить приближенно, используя методику, подробно описанную в замечании 2 в [21].

Особенности уравнений итерационного процесса (15)–(22), которые обсуждались в настоящем пункте, требуют привлечения высокоточных устойчивых методов численного интегрирования задач Коши (15)–(17), (21), (29), (30) и (18), (20), поэтому для интегрирования этих задач использовались обобщённые методы Рунге–Кутты четвёртого порядка точности [24]. (Болезнь подробное обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования.)

Решение задачи РА должно удовлетворять физическим ограничениям (10). Так как на каждой итерации уравнение (17) формально совпадает с (2), то, как показано в [25], при  $\omega_{01}(\Gamma_1) > 0$  (см. (9), (21)) всюду в области определённости решения задачи Коши для подсистемы (15)–(17) будет выполняться неравенство  $\omega_1^{(r)}(x_1, x_2) > 0$ . Следовательно, при  $\omega_{01}(\Gamma_1) > 0$  (см. (29)) на каждой итерации, а значит, и в пределе, если итерационный процесс сходится, первые  $N$  неравенств (10) выполняются автоматически, поэтому в процессе решения задачи РА необходимо контролировать выполнение лишь последнего неравенства (10), нарушение которого означает, что при технологической укладке волокна выпучиваются из элементарных армированных слоев из-за недостатка места.

**3. Обсуждение результатов расчётов.** В качестве примера рассмотрим расчёт РА-структур при установившейся ползучести изгибаемой металлокомпозитной двусвязной пластины, ограниченной контурами, уравнения которых заданы в безразмерной полярной  $(r, \phi)$  системе координат:

$$\begin{aligned} \Gamma_p = \Gamma_1 : \quad r_1(\varphi) &= 0,5 + 0,052 \cos(3\varphi - 3\pi/2), \\ \Gamma_v : \quad r_2(\varphi) &= 0,9 - 0,15 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

По внешнему контуру  $\Gamma_v$  пластина жёстко закреплена ( $v_0(\varphi)=0, \theta_n(\varphi)=0$ , см. (8)), а на внутреннем контуре  $\Gamma_p$  задан равномерно распределённый безразмерный изгибающий момент  $M_n = 0,55, F_{nz} = 0$  (см. (6)). Безразмерная равномерно распределённая поперечная нагрузка характеризуется значением  $p = 0,08$  (см. (1)). Пластина изготовлена из меди и армирована одним семейством стальной проволоки У8А (механические характеристики установившейся ползучести фаз композиции имеют значения (13), (14)). Напряжения в арматуре на лицевых поверхностях по модулю имеют значения  $|\tilde{\sigma}_1^0| = 1,2$  ГПа. Согласно поведению кривой 3 на рис. 1, а и линии 1 на рис. 1, б, малый параметр  $\varepsilon = 2,28 \cdot 10^{-3}$ .

Плотность армирования проволокой У8А на внутреннем контуре имеет значение

$$\omega_1(\Gamma_p) = \omega_{01}(\varphi) = 0,7, \quad \Gamma_p = \Gamma_1. \quad (34)$$

На рис. 2 изображены две альтернативные структуры, соответствующие двум разным решениям рассматриваемой задачи РА. Проект, изображенный на рис. 2, а, определяется выбором знака  $(-)$  в (29), а на рис. 2, б — знаком  $(+)$ . В этих двух проектах существенно различаются не только РА-структуры, но и податливости пластин и напряжённо-деформированное состояние в связующем материале. Общий расход арматуры в проектах, изображенных на рис. 2, примерно одинаков, однако при схеме укладки волокон, приведённой на рис. 2, а, максимальная по модулю скорость прогиба установившейся ползучести на 9 % больше, чем при укладке, приведённой на рис. 2, б. Более того, максимальное значение интенсивности скоростей деформаций ползучести в связующем пластине, изображенной на рис. 2, а, на порядок больше, чем в пластине на рис. 2, б.

Согласно замечанию 2, РА-проектами можно управлять за счёт варьирования контурных значений плотностей армирования  $\omega_{01}$  (см. (9)). Продемонстрируем это, задав на внутреннем контуре, в отличие от (34), переменную

плотность армирования

$$\omega_1(\Gamma_p) = \omega_{01}(\varphi) = 0,68 + 0,1 \cos(\varphi + 0,85), \quad \Gamma_p = \Gamma_1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (35)$$

На рис. 3 изображены два альтернативных РА-проекта при задании краевого условия (9) в виде (35). Общий расход арматуры в этих проектах также примерно одинаков и на 3,2 % меньше, чем в проектах, изображенных на рис. 2. Однако в случае (35) скорость прогиба пластины, изображенной на рис. 3, а, на 19,7 % больше, чем пластины на рис. 3, б, а интенсивность скоростей деформаций в связующем пластины, приведённой на рис. 3, а, в 7,9 раза больше, чем в пластине на рис. 3, б.

На рис. 2, 3 траектории РА изображены таким образом, что между двумя соседними траекториями на внутреннем контуре  $\Gamma_p = \Gamma_1$  входит фиксиро-

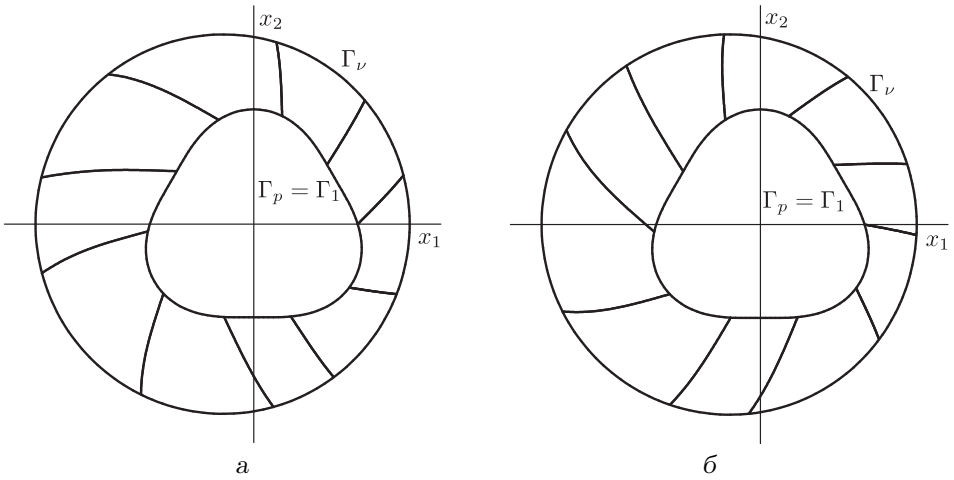


Рис. 2. Два альтернативных проекта равнонапряжённого армирования двусвязной пластины, армированной на внутреннем контуре с постоянной плотностью (34)

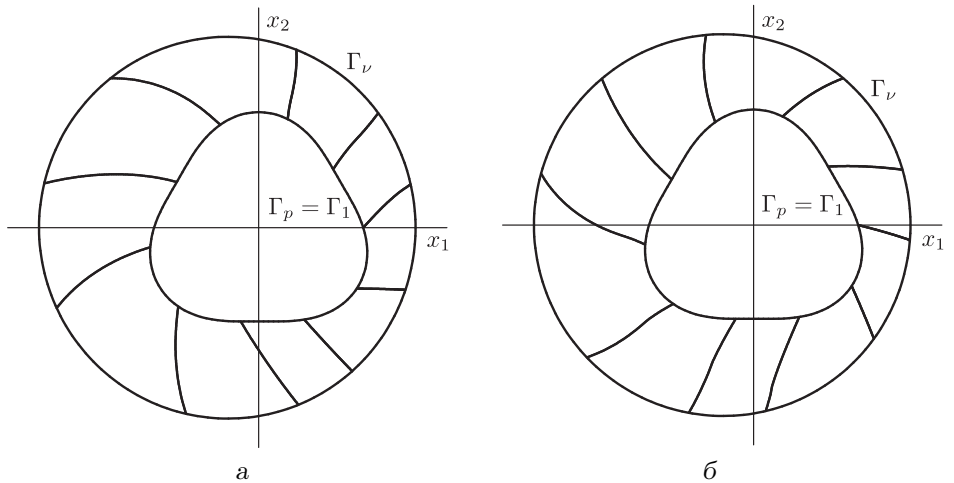


Рис. 3. Два альтернативных проекта равнонапряжённого армирования двусвязной пластины, армированной на внутреннем контуре с переменной плотностью (35)



ванное количество арматуры. Это позволяет получить некоторое наглядное представление о действительном распределении плотностей армирования в РА-проектах, приведённых на этих рисунках. При совмещении рис. 2, а и 3, а, а также рис. 2, б и 3, б можно увидеть, что точки «входа» изображенных траекторий армирования на рис. 3 сместились против часовой стрелки относительно тех же точек и траекторий РА на рис. 2. Кроме того, изменилась и кривизна траекторий как по знаку, так и по модулю. В целом, продемонстрированные проекты качественно отражают все многообразие решений задачи РА изгибаемых пластин, работающих в условиях установившейся ползучести.

Возможность построения двух альтернативных РА-проектов при заданном краевом условии (9) (в частности, (34), (35)) определяется тем, что задачи РА относятся к разряду обратных задач механики композитов (а точнее, к специфическим коэффициентным задачам), которые, как известно, могут иметь неединственное решение.

Из четырёх РА-структур, изображённых на рис. 2 и 3, наиболее выгодным с точки зрения экономии арматуры и уменьшения податливости пластины в условиях установившейся ползучести является проект, приведённый на рис. 3, б. Следовательно, как уже отмечалось, на множестве РА-проектов действительно имеет смысл осуществлять целевую оптимизацию.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 11-08-00186-а).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А. П. Янковский, “О некоторых свойствах решения задачи равнонапряженного армирования изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 62–73. [А. P. Yankovskii, “On some properties of equal-stress problem solution reinforcement bending the metal-composite plates working in steady creep conditions” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 2(23). Pp. 62–73].
2. А. П. Янковский, “Равнонапряженное армирование кольцевых изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 42–54. [А. P. Yankovskii, “Equal-Stress Reinforcement the Ring Bending Metal-Composites Plates Working in Conditions of Steady Creep” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 42–54].
3. Т. Д. Джурев, Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 239 с. [T. D. Dzhuraev, Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types. Tashkent: Fan, 1979. 239 pp.]
4. А. А. Самарский, Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с. [A. A. Samarskii, Theory of Difference Schemes. Moscow: Nauka, 1989. 616 pp.]
5. O. C. Zeinkiewicz, R. L. Taylor, The finite element method. Vol. 1: The Basis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. xviii+689 pp.
6. A. Nayfeh, Introduction to Perturbation Techniques. New York: Wiley-Interscience, 1981. xiv+519 pp.; русск. пер.: А. Найфе, Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
7. Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский, Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1981. 496 с. [G. S. Pisarenko, N. S. Mozharovskii, Equations and Boundary-Value Problems of the Theory of Plasticity and Creep: Handbook. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 496 pp.]
8. А. Ф. Никитенко, Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Новосиб. госуд. архит.-строит. унив., 1997. 278 с. [A. F. Nikitenko, Creep

- and Long-Term Strength of Metal Materials. Novosibirsk: Novosib. Gosud. Arkhit. Stroit. Univ., 1997. 278 pp.]
9. Композиционные материалы: Справочник / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с. [Composite Materials: Handbook / ed. D. M. Karpinos. Kiev: Naukova Dumka, 1985. 592 pp.]
  10. Д. М. Карпинос, В. А. Невгод, Л. И. Тучинский, Л. Н. Клименко, Л. Р. Вишняков, В. А. Беспятыи, В. Х. Кадыров, “Ползучесть и длительная прочность вольфрамовых проволок” // *Пробл. прочности*, 1972. №1. С. 70–73; англ. пер.: D. M. Karpinos, V. A. Nevgod, L. I. Tuchinskii, L. N. Klimenko, L. R. Vishnyakov, V. A. Bespyatyii, V. Kh. Kadyrov, “Creep and durability of tungsten wire” // *Strength of Materials*, 1972. Vol. 4, no. 1. Pp. 72–75.
  11. В. В. Новозhilов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский, Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с. [V. V. Novozhilov, K. F. Chernykh, E. I. Mikhaylovskiy, Linear Theory of Thin Shells. Leningrad: Politekhnik, 1991. 656 pp.]
  12. Е. Камке, Differentialgleichungen. Losungsmethoden und Losungen. Vol. II: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. Leipzig, 1959; русск. пер.: Э. Камке, Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
  13. А. Джуряев, Системы уравнений составного типа. М.: Наука, 1972. 228 с. [A. Dzhuraev, Systems of Equations of Composite Type. Moscow: Nauka, 1972. 228 pp.]
  14. Г. М. Фикhtенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 607 с. [G. M. Fikhtengol'ts, A Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1970. 607 pp.]
  15. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 592 с. [B. L. Rozhdestvenskii, N. N. Yanenko, Systems of Quasi-Linear Equations. Moscow: Nauka, 1969. 592 pp.]
  16. О. А. Ладыженская, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с. [O. A. Ladyzhenskaya, Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. Moscow: Nauka, 1967. 736 pp.]
  17. Л. М. Качанов, Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. [L. M. Kachanov, Fundamentals of the Theory of Plasticity. Moscow: Nauka, 1969. 420 pp.]
  18. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с. [I. G. Petrovskii, Lectures on Partial Differential Equations. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 400 pp.]
  19. А. П. Янковский, “Применение методов теории возмущений в плоской задаче равнонапряжённого армирования металлокомпозитных пластин при установившейся ползучести” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. №2(19). С. 53–71. [A. P. Yankovskii, “Application of methods of the theory of perturbations in flat problem of equally-stressed reinforcing of metal-composite plates at steady creep” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 2(19). Pp. 53–71].
  20. Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, “Равнонапряжённое армирование металлокомпозитных пластин волокнами постоянного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести” // *Мех. композ. матер.*, 2008. Т. 44, №1. С. 11–34; англ. пер.: Yu. V. Nemirovskii, A. P. Yankovskii, “Equal-stressed reinforcement of metal-composite plates with fibers of constant cross section in steady-state creep” // *Mech. Compos. Mater.*, 2008. Vol. 44, no. 1. Pp. 9–24.
  21. Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, “Установившаяся ползучесть слоисто-волокнистых изгибаемых металлокомпозитных пластин” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. №2(17). С. 66–76. [Yu. V. Nemirovskii, A. P. Yankovskii, “The steady creep layer-fibrous bendings metal-composites plates” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 2(17). Pp. 66–76].
  22. Ю. В. Немировский, Б. С. Резников, Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 168 с. [Yu. V. Nemirovskii, B. S. Reznikov,

- Strength of Structural Elements Made of Composite Materials. Novosibirsk: Nauka, 1986. 168 pp.]
23. Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, “Термоупругопластический изгиб сложно армированных пластин” // *Мех. композ. матер.*, 2005. Т. 41, № 6. С. 715–742; англ. пер.: Yu. V. Nemirovskii, A. P. Yankovskii, “Thermoelastoplastic Bending of Complexly Reinforced Plates” // *Mech. Compos. Mater.*, 2005. Vol. 41, no. 6. Pp. 477–496.
  24. Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, “Обобщение методов Рунге–Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики” // *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2005. Т. 8, № 1. С. 57–76. [Yu. V. Nemirovskii, A. P. Yankovskii, “Generalization of the Runge–Kutta methods and their application to integration of initial-boundary value problems of mathematical physics” // *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2005. Vol. 8, no. 1. Pp. 57–76].
  25. Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, “О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения” // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 1997. Т. 3, № 2. С. 15–39. [Yu. V. Nemirovskii, A. P. Yankovskii, “On some features of the equations of shells reinforced with fibres of constant crosssection” // *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsiy*, 1997. Vol. 3, no. 2. Pp. 15–39].

Поступила в редакцию 31/I/2013;  
в окончательном варианте — 27/II/2013.

MSC: 74K20, 74R20

## APPLICATION OF METHODS OF THE PERTURBATION THEORY TO PROBLEM OF EQUALLY-STRESSED REINFORCING OF BENDING METAL-COMPOSITE PLATES IN CONDITIONS OF STEADY-STATE CREEP

*A. P. Yankovskii*

Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics  
the Siberian Branch of the Russian Academy of Science,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russia.

E-mails: lab4nemir@rambler.ru

*The problem of equally-stressed reinforcing of bending metal-composite plates in conditions of steady-state creep, is solved by the help of methods of the perturbation theory. The opportunity of existence of several alternative solutions of a considered problem which can be reliably determined using the developed algorithm is shown. Concrete projects are constructed for equally-stressed reinforcing doubly connected plates with different density of reinforcing on an internal contour.*

**Key words:** *bending plates, steady-state creep, rational designing, equally-stressed reinforcing, small parameter, perturbation theory.*

Original article submitted 31/I/2013;  
revision submitted 27/II/2013.