

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376+539.434

ОБОБЩЁННАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ БАЛКИ В УСЛОВИЯХ ЧИСТОГО ИЗГИБА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К ОЦЕНКЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ

В. П. Радченко, М. В. Шершнева, В. В. Цветков

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: radch@samgtu.ru, mary-sofya@mail.ru, vi.v.tsvetkoff@mail.ru

Предложена обобщённая стохастическая модель ползучести и длительной прочности балки в условиях чистого изгиба в терминах «обобщённая нагрузка», «обобщённое перемещение», «время». Балка рассматривается как единое целое (специфический образец). Установлена полная аналогия между кривыми ползучести одноосного образца при постоянном напряжении и обобщёнными кривыми ползучести балки в координатах «кривизна балки — время» при постоянном изгибающем моменте. На основе этой аналогии сформированы стохастические уравнения состояния балки. Разработана методика оценки показателей надёжности балки при изгибе в условиях ползучести по параметрическим критериям отказа в условиях существенного разброса данных. Приведены результаты расчётов и даны рекомендации по назначению ресурса.

Ключевые слова: *ползучесть, длительная прочность, стохастическая обобщённая модель балки, чистый изгиб, надёжность, параметрический критерий отказа, вероятность безотказной работы.*

1. Постановка задачи. Несмотря на существенный разброс экспериментальных данных для деформации ползучести даже в лабораторных условиях, вопросам построения стохастических моделей реологического деформирования и разработке на их основе методов решения стохастических краевых задач уделяется недостаточное внимание в силу ряда причин. Во-первых, для построения феноменологических стохастических уравнений ползучести необходима полная трёхмерная информация о реологических характеристиках материала, получение которой экспериментальным путём крайне проблематично. Во-вторых, в полную систему уравнений для стохастической краевой задачи должны входить стохастические уравнения состояния для материала. Однако в настоящее время стохастическая теория реологического деформирования и разрушения в условиях сложного напряженного состояния развита слабо, особенно для процессов разупрочнения материала. Здесь

Владимир Павлович Радченко (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. прикладной математики и информатики.

Мария Викторовна Шершнева, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.
Виталий Владимирович Цветков, студент, каф. прикладной математики и информатики.

можно отметить лишь работы для одноосного напряженного состояния [1–5]. В-третьих, сдерживающим фактором разработки методов решения стохастических краевых задач являются физическая и стохастическая нелинейности определяющих уравнений ползучести и длительной прочности, что не позволяет в должной мере развивать аналитические и численные методы решения. Здесь имеются решения лишь на стадии установившейся ползучести [6–9] и единичные работы посвящены решению краевых задач с учётом третьей стадии ползучести [10].

Очевидно, что оценка показателей надёжности на основе детерминированных моделей или решений детерминированных краевых задач ползучести является первым (и явно недостаточным) приближением величины ресурса элементов конструкций по параметрическим критериям отказа.

В силу отмеченных обстоятельств в работе [11] предложен метод оценки надёжности элементов конструкций в условиях ползучести на основе обобщённых стохастических моделей, позволяющий в определённой мере преодолеть указанные выше трудности. Суть данного подхода состоит в следующем. Рассматривая конструктивный элемент как единое целое (специфический образец, хотя и сложной структуры), можно установить связь между входными (нагрузки) и выходными (перемещения, деформация, углы закручивания и т.п.) параметрами, аналогично тому, как строятся модели ползучести для одноосного растягиваемого образца. Тогда для конкретизации связи между входными параметрами (обобщённая нагрузка) и выходными характеристиками (обобщённые перемещения) можно использовать уже имеющиеся одноосные модели реологического деформирования. Такой подход основан на полной аналогии кривых ползучести для растягиваемого одноосного стержня и соответствующих диаграмм в координатах «обобщённое перемещение — время» конструктивного элемента как целого при постоянных температурно-силовых нагрузках, что убедительно показано в работах [12–15] при построении соответствующих детерминированных моделей.

В общем случае выбор обобщённого перемещения в качестве наблюдаемой величины неоднозначен, носит неформальный характер и определяется целями и задачами исследования; осуществлять его следует так, чтобы при постоянной обобщённой нагрузке получить для элемента конструкции обычную «кривую ползучести» в координатах «обобщённое перемещение — время», при этом эти кривые могут быть получены либо экспериментально в лабораторных условиях или при натурных испытаниях, либо в результате численного эксперимента решением соответствующей краевой задачи.

Наличие адекватной обобщённой реологической модели элемента конструкции открывает новые возможности для оценки надёжности по параметрическим критериям отказа, что продемонстрировано в [11] на примере ползучести толстостенной трубы. Целью данной работы является обобщение полученных в [11] результатов применительно к ползучести балки в условиях чистого изгиба.

2. Построение обобщённой стохастической модели балки в условиях чистого изгиба. Рассмотрим балку прямоугольного сечения размера $b \times h$ (b — ширина, h — высота сечения), находящуюся в условиях чистого изгиба моментом Q_0 . Не нарушая общности подхода, рассмотрим случай отсутствия у материала балки первой стадии ползучести и в качестве базовой одноосной

реологической модели растягиваемого образца используем стохастическую модель энергетического типа [5, 11]

$$\begin{aligned} \dot{p} &= C\sigma^n, \quad \sigma = \sigma_0(1 + \omega), \quad \dot{\omega} = L\sigma\dot{p}, \\ L &= L_1(\sigma_0)^{m_1}, \quad p(0) = 0, \quad \omega(0) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где C , L_1 — случайные, а n , m_1 — детерминированные параметры; σ_0 и σ — соответственно номинальное и истинное напряжения, ω — параметр поврежденности; L — параметр, контролирующий процесс разупрочнения материала, при этом в частных случаях для ряда материалов $m_1 = 0$ и $L = L_1$.

Для определения времени до разрушения $t = t^*$ используется критерий разрушения энергетического типа

$$\int_0^{t^*} \frac{\sigma dp}{A_c^*} = 1, \quad (2)$$

при этом

$$A_c^*(\sigma_0) = L_A(\sigma_0)^{m_A}, \quad (3)$$

где L_A — случайная, а m_A — детерминированная величина (в частных случаях возможно выполнение $m_A = 0$ и $A_c^* = L_A$).

Таким образом, из модели (1)–(3) следует, что индивидуальные деформационные свойства конкретного образца определяются набором случайных величин C , L_1 и L_A , а стохастические свойства совокупности образцов — законами распределения этих случайных величин. Это, в свою очередь, означает, что каждая реализация кривой ползучести растягиваемого образца может быть описана при помощи задания конкретных значений случайных величин C , L_1 , L_A и детерминированных параметров n , m_1 , m_A .

При построении обобщенной модели балки в качестве выходного параметра (обобщенного перемещения) можно использовать кривизну балки χ^p , вызванную ползучестью, а в качестве обобщенной силы — момент Q_0 . Поскольку материал балки не имеет первой стадии ползучести, то и первая стадия ползучести у балки как целого (специфического образца) в координатах «кривизна χ^p — время t » при действии постоянного изгибающего момента, появление которой связано с перераспределением нормальных напряжений по высоте балки, будет незначительной и ей можно пренебречь. С использованием отмеченной выше аналогии кривых ползучести «деформация ползучести — время» при $\sigma_0 = \text{const}$ и «кривизна балки χ^p — время t » при $Q_0 = \text{const}$ для одноосного образца обобщенная стохастическая модель балки в условиях чистого изгиба может быть получена из (1)–(3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}^p &= CQ^n; \quad Q = Q_0(1 + \omega); \quad \dot{\omega} = LQ\dot{\chi}^p; \\ L &= L_1(Q_0)^{m_1}; \quad \dot{\chi}^p(0) = 0; \quad \omega(0) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где Q_0 и Q — номинальное и фиктивное значения крутящего момента, C и L_1 — случайные, а n и m_1 — детерминированные величины.

Критерий разрушения балки будет иметь вид

$$\int_0^{t^*} \frac{Q d\chi^p}{L_A^*} = 1, \quad (5)$$

где

$$L_A^* = L_A(Q_0)^{m_A}, \quad (6)$$

где L_A — случайная, а m_A — детерминированная величина, а t^* — время разрушения. Из (4)–(6) следует, что для материала балки введена такая же гипотеза, что и для одноосного образца: свойства материала в пределах одного конструктивного образца (балки) являются постоянными, но они меняются от одного образца к другому. Данная гипотеза позволяет описывать тренд механических свойств материала, из которого изготовлена балка, не учитывая высокочастотных их флуктуаций в пределах одного образца [2, 5, 11].

Из сравнения моделей (1)–(3) и (4)–(6) следует, что схема построения обобщённой модели балки при изгибе аналогична методике построения стохастической модели для одноосного образца, и если для модели (1)–(3) исходными данными являются экспериментальные кривые одноосной ползучести в координатах «деформация ползучести — время» при $\sigma_0 = \text{const}$, то для балки такой информацией являются обобщённые кривые ползучести в координатах «кривизна χ^p — время t » при $Q_0 = \text{const}$, получить которые можно либо экспериментально, либо из решения соответствующей краевой задачи для чистого изгиба балки по известным стохастическим соотношениям для материала, из которого изготовлена балка.

Если имеется возможность получения необходимой статистической информации путём эксперимента над «образцами» (балками), то стохастическая информация о свойствах материала вообще не нужна. Однако этот путь — трудоёмкий и в условиях ползучести трудно осуществимый. Поэтому в настоящей работе соответствующая статистическая информация получена в результате численного эксперимента решением соответствующей краевой задачи о ползучести балки на основании известной информации о материале. В связи с вышеизложенным целью дальнейших исследований является разработка адекватного численного метода решения краевой задачи о ползучести балки в условиях чистого изгиба.

3. Решение краевой задачи ползучести балки в условиях чистого изгиба и проверка его адекватности. Изложим методику решения краевой задачи о ползучести балки прямоугольного сечения при чистом изгибе моментом Q_0 . Запишем уравнения равновесия

$$\int_F \sigma_0(y, t) y dF = Q_0, \quad (7)$$

где Q_0 — приложенный к балке изгибающий момент, $dF = b dy$ — элемент площади поперечного сечения; $\sigma_0(y, t)$ — нормальное номинальное напряжение по высоте балки ($-h/2 \leq y \leq h/2$), и условие совместности деформаций

$$\varepsilon(y, t) = y\chi(t), \quad (8)$$

где $\varepsilon(y, t)$ — полная деформация, которая представляется в виде

$$\varepsilon(y, t) = e(y, t) + p(y, t), \quad (9)$$

$e(y, t)$ — упругая деформация, $p(y, t)$ — деформация ползучести; $\chi = \chi(t)$ — кривизна нейтральной оси; y — расстояние до нейтральной оси. Предполагается симметрия свойств материала по диаграмме «растяжение — сжатие».

Здесь и далее многие величины в расчётных формулах зависят от координаты y . Данный факт отмечается простановкой y как аргумента, при этом учитывается, что зависимость соответствующей величины от y получается за счёт различных напряжений $\sigma_0(y, t)$.

Учитывая, что $e(y, t) = \sigma_0(y, t)/E$ (E — модуль Юнга), и подставляя (9) в (8), получим

$$\frac{\sigma_0(y, t)}{E} + p(y, t) = y\chi(t). \quad (10)$$

Умножая обе части (10) на $y dF = by dy$ и интегрируя полученное соотношение по y , имеем

$$\frac{1}{E} \int_{-h/2}^{h/2} b\sigma_0(y, t)y dy + \int_{-h/2}^{h/2} bp(y, t)y dy = \chi(t) \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy,$$

откуда с учётом (7) находим

$$\chi(t) = \frac{Q_0}{EJ} + \frac{b}{J} \int_{-h/2}^{h/2} p(y, t)y dy, \quad (11)$$

где $J = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = bh^3/12$ — осевой момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси.

Зная теперь величину кривизны $\chi = \chi(t)$, из (10) определяем величину нормального напряжения

$$\sigma_0(y, t) = E[y\chi(t) - p(y, t)]. \quad (12)$$

Для реализации данной методики необходимо иметь уравнения состояния материала, которые принимаются в виде (1)–(3), при этом в детерминированном варианте случайные величины C , L_1 и L_A заменяются на их математические ожидания c , α_1 и α_A соответственно.

Методика (7)–(12) реализована численно шагами по времени.

В связи с тем, что алгоритм (7)–(12) в дальнейшем являлся инструментом численного эксперимента для получения обобщённых кривых ползучести в координатах « $\chi^p - t$ » при $Q_0 = \text{const}$, сначала была установлена адекватность данных численного решения детерминированной краевой задачи на основании (7)–(12) экспериментальным данным. Для этого были использованы экспериментальные данные по ползучести балки прямоугольного сечения длиной 200 мм ($b = 10$ мм, $h = 20$ мм) из сплава Д16Т при температуре 250 °С [16]. Для определения параметров c , n , α_1 , m_1 , α_A и m_A детерминированной модели (1)–(3) были использованы результаты одноосных испытаний этого сплава [16], которые приведены на рис. 1 сплошными линиями. По этим экспериментальным данным были определены все параметры детерминированной модели материала Д16Т ($T = 250$ °С): $c = 2,5 \cdot 10^{-15}$ МПа $^{-n}$; $n = 5,41$; $\alpha_1 = 0,94$ МПа $^{-m_1-1}$; $m_1 = -0,43$; $\alpha_A = 19,72$ Н/мм 2 ; $m_A = 0$. На рис. 1 штриховыми линиями показаны результаты расчёта по одноосной модели (1)–(3) ползучести этого сплава.

Далее на основе одноосной модели ползучести материала численно была реализована методика расчёта ползучести балки (7)–(12) при двух значениях момента $Q_0 = \{78480,4; 68670,3\}$ Н·мм. На рис. 2 штриховыми линиями приведены результаты расчёта по предложенной методике кривизны балки во времени, а сплошные линии — результат эксперимента [16]. Как видно, наблюдается хорошая коррелированность расчётных и экспериментальных данных, что свидетельствует о правомерности использования методики (7)–(12) в качестве рабочего инструмента для получения данных численного эксперимента.

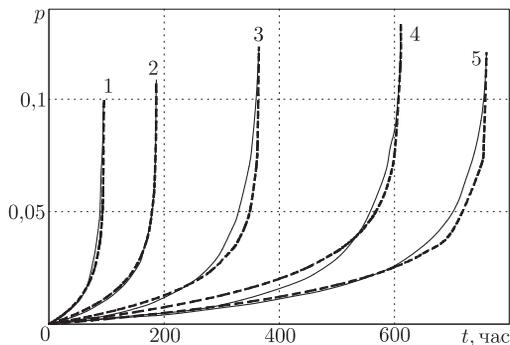


Рис. 1. Экспериментальные (сплошные линии) и расчётные (штриховые линии) диаграммы ползучести сплава Д16Т при растяжении ($T = 250$ °С): 1 — $\sigma_0 = 98,1$ МПа; 2 — $\sigma_0 = 88,3$ МПа; 3 — $\sigma_0 = 78,48$ МПа; 4 — $\sigma_0 = 73,6$ МПа; 5 — $\sigma_0 = 68,7$ МПа

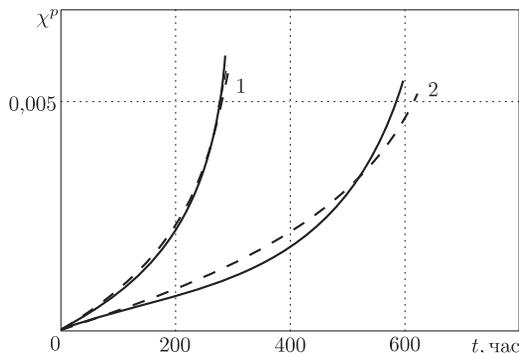


Рис. 2. Экспериментальные (сплошные линии) и расчётные (штриховые линии) значения кривизны балки из сплава Д16Т ($T = 250$ °С) для различных значений момента: 1 — $Q_0 = 78480,4$ Н·мм; 2 — $Q_0 = 68670,3$ Н·мм

4. Построение обобщённой детерминированной модели ползучести балки в условиях чистого изгиба. Рассмотрим теперь схему построения обобщённой стохастической модели балки из стали 12Х18Н10Т при температуре 850 °С при чистом изгибе. Все детерминированные и случайные параметры модели (1)–(3) для стали 12Х18Н10Т ($T = 850$ °С) приведены в работах [4, 11, 14]. В частности, в [4, 11] приведены статистические экспериментальные данные по ползучести 21 образца при чистом растяжении. Номинальные напряжения σ_0 принимали значения 39,24; 49,05; 58,86; 78,48 МПа. Результаты эксперимента приведены в табл. 1. Здесь $\dot{r}_0 = \dot{r}(0+0)$ — начальная скорость

Таблица 1

Результаты эксперимента и результаты расчёта случайных величин C , α

п/п	№ обр.	σ_0 , МПа	p_0 , час ⁻¹	t_1 , час	p_1	$C \cdot 10^9$	α	A_C^*
1	5	39,24	0,00080	35	0,048	6,365	0,198	2,277
2	11		0,00081	40	0,085	6,435	0,223	4,932
3	16		0,00080	47	0,152	6,365	0,208	11,820
4	13		0,00084	66	0,234	6,673	0,142	18,916
5	30		0,00084	67	0,110	6,673	0,111	5,537
6	32		0,00081	68	0,125	6,435	0,124	6,751
7	24	49,05	0,0023	18	0,080	8,947	0,119	4,951
8	22		0,0019	20,5	0,090	7,391	0,141	6,061
9	23		0,0019	21,5	0,110	7,391	0,143	8,134
10	27		0,0019	22,5	0,093	7,391	0,125	6,137
11	26		0,0021	24	0,130	8,169	0,114	9,312
12	29		0,0017	28	0,120	6,613	0,120	8,558
13	28		0,0014	30	0,080	5,446	0,117	4,983
14	15	58,86	0,0037	6,7	0,065	8,031	0,194	5,701
15	31		0,0027	14	0,047	5,861	0,051	2,968
16	17		0,0023	15	0,073	4,992	0,127	5,691
17	7		0,0023	16	0,050	4,992	0,069	3,266
18	14		0,0033	20	0,170	7,163	0,073	14,758
19	21		0,0023	20,5	0,090	4,992	0,087	6,737
20	39	78,48	0,0110	6	0,130	9,510	0,048	13,177
21	37		0,0045	6	0,118	3,890	0,146	18,796

установившейся ползучести, t_1 и p_1 — экспериментальные значения времени и деформации ползучести в момент разрушения.

Осреднённые экспериментальные кривые ползучести для стали 12X18H10T ($T = 850$ °C) приведены сплошными линиями на рис. 3 [14].

На основе этих экспериментальных данных по методике [14] определены параметры детерминированной модели типа (1)–(3), которые имеют значения: $c = 6,65 \cdot 10^{-9}$ МПа $^{-n}$; $n = 3,2$; $\alpha = \alpha_1 = 0,128$ МПа, $m_1 = m_A = 0$; $A_C^* = \alpha_A = 7,442$ Н/мм². Расчётные значения деформации ползучести для стали 12X18H10T ($T = 850$ °C) по детерминированной модели типа (1)–(3) приведены на рис. 3 штриховыми линиями.

Теперь с использованием детерминированной модели ползучести для стали 12X18H10T была решена детерминированная краевая задача для балки по методике (7)–(12) при пяти значениях изгибающего момента $Q_0 = \{65400; 52316,7; 39240; 32700; 26160\}$ Н·мм. Результаты расчёта кривизны балки (численный эксперимент) приведена на рис. 4 сплошными линиями. Эти данные являлись исходной информацией для построения детерминированной обобщённой модели балки (4)–(6) в условиях чистого изгиба, при этом параметры этой модели определялись аналогично случаю одноосной модели (1)–(3) по методике [14] и имели следующие значения: $c = 9,34 \cdot 10^{-20}$ (Н·мм) $^{-n}$; $n = 3,3$; $\alpha_1 = 5,1 \cdot 10^{-3}$ (МПа) $^{-m_1-1}$; $m_1 = -0,155$; $\alpha_A = 712,5$ Н/мм²; $m_2 = 0$.

Результаты расчёта по обобщённой модели (4)–(6) при найденных параметрах приведены на рис. 4 штриховыми линиями. Наблюдается хорошее соответствие данных численного эксперимента и расчётных данных по обобщённой детерминированной модели (4)–(6).

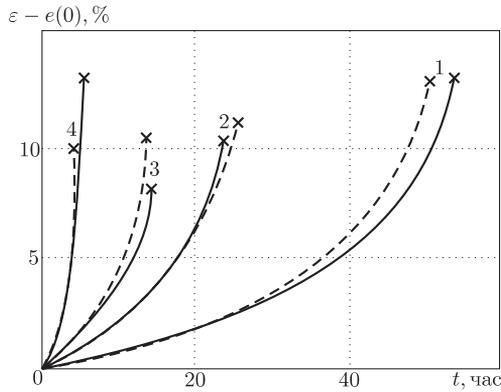


Рис. 3. Экспериментальные (сплошные линии) и расчётные по модели (1)–(3) (штриховые линии) кривые ползучести стали 12X18H10T ($T = 850$ °C): 1 – $\sigma_0 = 38,24$; 2 – $\sigma_0 = 49,05$; 3 – $\sigma_0 = 58,86$; 4 – $\sigma_0 = 78,48$ МПа

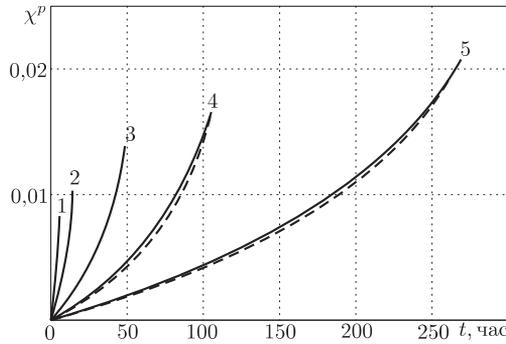


Рис. 4. «Экспериментальные» (сплошные линии) и расчётные (штриховые линии) значения кривизны балки из стали 12X18H10T ($T = 850$ °C) для различных значений момента: 1 – $Q_0 = 65400$ Н·мм; 2 – $Q_0 = 52316,7$ Н·мм; 3 – $Q_0 = 39240$ Н·мм; 4 – $Q_0 = 32700$ Н·мм; 5 – $Q_0 = 26160$ Н·мм

5. Построение обобщённой стохастической модели ползучести балки в условиях чистого изгиба. Для построения стохастического варианта обобщённой модели балки (4)–(6) необходимо иметь набор отдельных реализаций зависимости $\chi^p = \chi^p(t)$ при фиксированных значениях момента $Q_0 = \text{const}$. В силу отсутствия статистической экспериментальной информации такого вида она была получена в результате численного эксперимента.

Предварительно была построена стохастическая модель ползучести (1)–(3) для материала 12X18H10T по данным табл. 1. Поскольку параметры $m_1 = m_A = 0$ и $n = 3,2$ берутся из соответствующей детерминированной модели, необходимо построить выборки случайных величин C , $L = L_1$ и $A_c^* = L_A$. Величина C для каждой реализации (каждого образца) из табл. 1 определялась по формуле

$$C = \dot{p}_0 / \sigma_0^n,$$

где $\dot{p}_0 = \dot{p}(0+0)$. Для определения случайных величин L и L_A проинтегрируем соотношения (1) при $\sigma_0 = \text{const}$:

$$p(t) = -\frac{1}{nL\sigma_0} \ln |1 - n\sigma_0^{n+1}LCt|. \quad (13)$$

После нахождения величины C для каждой реализации величина L для каждой кривой ползучести (13) определяется из условия прохождения графика функции (13) через точку (p_1, t_1) , т.е. из решения уравнения (13) относительно L при известных $p(t_1) = p_1, t = t_1, C, \sigma_0, n$.

Для определения последней величины $A_c^* = L_A$ вычислим величину работы истинного напряжения на деформации ползучести с учётом (1):

$$A(t) = \int_0^t \sigma dp = \frac{1}{L} \left[(1 - nCL\sigma_0^{n+1}t)^{-1/n} - 1 \right]. \quad (14)$$

Тогда значение критической работы $A_c^* = L_A$ для каждого образца находится из (14) при $t = t^*$ и известных L, C, σ_0, n .

Результаты расчётов величин C, L и L_A для стали 12X18H10T при температуре 850 °С приведены в табл. 1 в трёх правых столбцах, тем самым заканчивается построение одноосной стохастической модели для этой стали.

Как отмечено выше, для построения обобщённой стохастической модели балки необходимо иметь совокупность кривых ползучести отдельных реализаций $\chi^p = \chi^p(t)$ при нескольких значениях момента $Q_0 = \text{const}$. Для их получения поступали следующим образом. В стохастической модели для стали 12X18H10T случайным образом генерировались выборки величины C, L_1 и L_A и с учётом детерминированных величин $n = 3,2; m_1 = m_A = 0$ решалась N раз (в расчётах принималось $N = 21$) детерминированная краевая задача по модели (7)–(11) при нескольких фиксированных значениях $Q_0 = \text{const}$ ($Q_0 = \{39240; 32700; 26160\}$ Н·мм). При этом законы распределения для случайных величин C, L_1 и L_A из табл. 1 не строились, а использовалась упрощённая схема. Поскольку эти случайные величины не коррелированы (см. табл. 2), из каждого столбца для C, L_1 и L_A табл. 1 случайным образом выбирали каждый раз по одному значению этих величин и они далее использовались в решении краевой задачи.

Таким образом, при каждом значении $Q_0 = \text{const}$ было получено (численным экспериментом) по 21 реализации $\chi^p = \chi^p(t)$. В качестве иллюстрации на рис. 5 приведены результаты численного эксперимента для двух значений момента Q_0 . Далее для каждой выборки из 21 графика $\chi^p = \chi^p(t)$ при $Q_0 = \text{const}$ по методике, аналогичной рассмотренной выше для одноосной модели (1)–(3), при известных детерминированных значениях $n = 3,3; m_1 = -0,155; m_A = 0$ (см. пункт 4) определены выборки случайных параметров C, L_1, L_A уже для обобщённой модели (4)–(6), при этом использовались соотношения

$$\chi^p = -\frac{1}{nLQ_0} \ln |1 - nQ_0^{n+1}LCt|, \quad (15)$$

$$A(t) = \frac{1}{L} \left[(1 - nCLQ_0^{n+1}t)^{-1/n} - 1 \right], \quad (16)$$

где $L = L_1(Q_0)^{m_1}$, которые определены из (4)–(6) аналогично тому, как были получены соотношения (13) и (14) из (1)–(3). В качестве примера в табл. 3

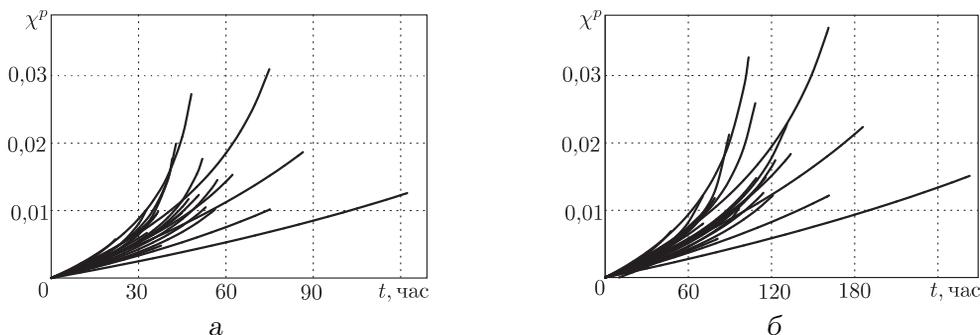


Рис. 5. Обобщённые кривые ползучести балки при чистом изгибе из стали 12Х18Н10Т ($T = 850\text{ }^\circ\text{C}$) в координатах « $\chi^p - t$ » в условиях стационарного нагружения: а) $Q_0 = 39240\text{ Н}\cdot\text{мм}$; б) $Q_0 = 32700\text{ Н}\cdot\text{мм}$

Таблица 3

Результаты численного эксперимента и результаты расчёта случайных величин C , L , L_A^* для обобщённой модели балки при $Q_0 = 32700\text{ Н}\cdot\text{мм}$

№ п/п	χ_0^p , час ⁻¹	t^* , час	χ_*^p	$C \cdot 10^{19}$	$L \cdot 10^3$	L_A^*
1	0,000074	115,8	0,015	0,94	3,83	587
2	0,000075	131,2	0,023	0,95	4,08	1035
3	0,000087	108,3	0,026	1,10	4,49	1208
4	0,000076	89,4	0,021	0,96	6,43	1058
5	0,000078	96,6	0,012	0,99	3,88	454
6	0,000081	70,4	0,012	1,02	6,69	514
7	0,000077	79	0,012	0,97	6,03	498
8	0,000103	161,1	0,037	1,30	2,35	1578
9	0,000086	70,7	0,008	1,09	3,32	285
10	0,000085	185,9	0,022	1,08	1,48	799
11	0,000098	47,5	0,007	1,24	5,82	261
12	0,000077	109	0,015	0,97	4,03	599
13	0,000064	114,1	0,013	0,81	4,54	513
14	0,000095	78	0,011	1,20	3,57	409
15	0,000069	122,7	0,017	0,87	4,39	712
16	0,000058	81,1	0,006	0,73	3,98	212
17	0,000058	121,1	0,012	0,73	4,59	469
18	0,000083	133,9	0,018	1,05	2,71	691
19	0,000057	161,5	0,012	0,72	2,15	427
20	0,000112	103,5	0,033	1,42	3,73	1655
21	0,000045	262,9	0,015	0,57	1,48	526

приведены результаты расчёта величин C , L_1 и L_A для обобщённой модели балки при $Q_0 = 32700\text{ Н}\cdot\text{мм}$. Здесь $\dot{\chi}_0^p = \dot{\chi}^p(0+0)$, t^* — время разрушения, $\chi_*^p = \chi^p(t_*)$ — кривизна в момент разрушения. Используя эти данные (по 21 реализации для трех значений Q_0), можно найти выборочные значения математического ожидания, дисперсии, корреляционных моментов второго и более высокого порядков и прогнозировать случайные процессы для величин $\chi^p(t)$ и $A(t)$ по формулам (15) и (16) соответственно. Однако эти соотношения стохастически нелинейны относительно случайных величин C и L и их нельзя использовать, например, в существующей методике оценки надёжности В.В. Болотина на основе пространства состояния качества, разработанной

для стохастически линейных моделей и адаптированной в [4, 11] для процесса ползучести.

В связи с вышеизложенным выполним линеаризацию (15) и (16) аналогично случаю одноосной модели [4, 11].

Формальное разложение в ряд Тейлора нерационально, так как логарифмический и степенной ряды сходятся крайне медленно и в соответствующем ряде для достижения заданной точности необходимо удерживать большое количество членов с последующей стохастической оценкой каждого члена при степенях t . Поэтому в настоящей работе, аналогично [4, 11], применяется метод аппроксимации функций $\ln(1-x)$ и $(1-x)^{-1/n} - 1$ степенными полиномами до степеней x^4 и x^3 соответственно с использованием интегрального метода наименьших квадратов.

Тогда с учётом разложений выражения кривизны (15) и работы (16) принимают вид:

$$\chi^p(t) = CQ_0^n t + 0,911C^2 LnQ_0^{2n+1}t^2 - 1,906C^3L^2n^2Q_0^{3n+2}t^3 + 3,061C^4L^3n^3Q_0^{4n+3}t^4, \quad (17)$$

$$A(t) = 0,348nQ_0^{n+1}Ct - 0,239n^2Q_0^{2n+2}C^2Lt^2 + 1,068n^3Q_0^{3n+3}C^3L^2t^3. \quad (18)$$

Выражения (17) и (18) являются стохастически линейными относительно C , а также новых случайных величин C^2L , C^3L^2 , C^4L^3 , выборки которых можно найти непосредственно, если известны выборки случайных величин C и L , а затем найти математическое ожидание, дисперсии и корреляционные моменты случайных величин C , C^2L , C^3L^2 и C^4L^3 и далее определить все статистические оценки функций $\chi^p = \chi^p(t)$ и $A = A(t)$ в аналитическом виде.

Так для математического ожидания и дисперсии функции $\chi^p(t)$ имеем

$$M(\chi^p) = A_1M[C] + A_2M[C^2L] + A_3M[C^3L^2] + A_4M[C^4L^3], \quad (19)$$

дисперсия кривизны $\chi^p(t)$ определяется по классической формуле

$$S^2(\chi^p) = A_1^2S_C^2 + A_2^2S_{C^2L} + A_3^2S_{C^3L^2} + A_4^2S_{C^4L^3} + 2[A_1A_2K_{C,C^2L} + A_1A_3K_{C,C^3L^2} + A_1A_4K_{C,C^4L^3} + A_2A_3K_{C^2L,C^3L^2} + A_1A_4K_{C^2L,C^4L^3} + A_3A_4K_{C^3L^2,C^4L^3}]. \quad (20)$$

Здесь $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания; S_χ^2 , S_C^2 , $S_{C^2L}^2$, $S_{C^3L^2}^2$, $S_{C^4L^3}^2$ — дисперсии соответствующих параметров; K_{C,C^2L} , K_{C,C^3L^2} , K_{C,C^4L^3} , K_{C^2L,C^3L^2} , K_{C^2L,C^4L^3} , $K_{C^3L^2,C^4L^3}$ — корреляционные моменты; $A_1 = Q_0^n t$, $A_2 = 0,911nQ_0^{2n+1}t^2$, $A_3 = -1,906n^2Q_0^{3n+2}t^3$, $A_4 = 3,061n^3Q_0^{4n+3}t^4$.

С использованием данных табл. 3 и ещё двух аналогичных таблиц вычислялись математическое ожидание, корреляционные моменты и дисперсия для функции $\chi^p = \chi^p(t)$ в рассматриваемой модельной задаче, которые приведены в табл. 4 и 5.

6. Оценка надёжности балки в условиях ползучести по деформационно-му критерию отказа. Основной количественной характеристикой надёжности является вероятность безотказной работы. Она в данном случае определяет

Таблица 4

Математические ожидания и дисперсии случайных величин C , L , C^2L , C^3L^2 , C^4L^3 и L_A^* для обобщённой модели балки

Сл. вел.	C	L	C^2L	C^3L^2	C^4L^3	L_A^*
Мат. ож.	$9,85 \cdot 10^{-20}$	$4,02 \cdot 10^{-3}$	$4,11 \cdot 10^{-41}$	$1,98 \cdot 10^{-62}$	$1,06 \cdot 10^{-83}$	689
Дисп.	$4,02 \cdot 10^{-40}$	$2,19 \cdot 10^{-6}$	$4,52 \cdot 10^{-82}$	$2,91 \cdot 10^{-124}$	$1,64 \cdot 10^{-166}$	$1,54 \cdot 10^5$

вероятность того, что для элемента конструкции (балки) выполняется условие прочности

$$\chi^p(t) < \chi_*^p,$$

где χ_*^p — назначенный ресурс по предельно допустимой накопленной кривизне балки.

Функция надёжности $P(t)$, описывающая вероятность безотказной работы на отрезке $[0, t]$, равна вероятности пребывания случайной функции $\chi^p(t)$ в допустимой области $(0; \chi_*^p)$ на этом отрезке времени [4, 11]:

$$P(t) = P\{\chi^p(\tau) \in (0, \chi_*^p), \tau \in [0, t]\}. \quad (21)$$

В связи с тем, что согласно модели (4)–(6) кривизна балки от ползучести является неубывающей функцией, функция $\chi(t)$, покинув в некоторый момент времени область $(0, \chi_*^0)$, затем в эту область возвратиться не может. Поэтому для вероятности безотказной работы $P(t)$ на отрезке времени $[0, t]$ имеет место более простая формула

$$P(t) = P\{\chi^p(t) \in (0, \chi_*^p)\}.$$

В отличие от общего случая (21), когда вычисление случайной функции требует рассмотрения выбросов случайного процесса, здесь достаточно вычислить вероятность нахождения случайной функции $\chi^p(t)$ в заданной области в рассматриваемый момент времени.

Применим данную методику к оценке надёжности балки из модельного материала 12Х18Н10Т ($T = 850^\circ\text{C}$) при $Q_0 = \text{const}$, кривизна которой описывается соотношением (17), а математическое ожидание и дисперсии случайной функции $\chi^p = \chi^p(t)$ — соответственно соотношениями (19) и (20).

При известном математическом ожидании и дисперсии вероятность безотказной работы $P(t)$ вычисляется по формуле

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{\chi^p}(t)} \int_0^{\chi_*^p} \exp\left(-\frac{(x - M[\chi^p(t)])^2}{2S_{\chi^p}^2(t)}\right) dx, \quad (22)$$

где $M[\chi^p]$ — математическое ожидание, а $S_{\chi^p}^2$ — дисперсия кривизны балки от ползучести $\chi^p = \chi^p(t)$.

Вероятность $P(t)$ можно использовать для назначения ресурса балки. Назначенный ресурс T_* определяют так, чтобы вероятность обеспечения T_* была

Таблица 5
Коэффициенты корреляции случайных величин C , L , C^2L , C^3L^2 , C^4L^3 для обобщённой модели балки

	C	C^2L	C^3L^2	C^4L^3
C	1	0,709	0,548	0,454
C^2L		1	0,964	0,907
C^3L^2			1	0,985
C^4L^3				1

равна заданному (конкретному) значению P^* вероятности безотказной работы. Для расчёта времени отказа при заданном значении вероятности P^* по формуле (22) необходимо иметь функции математического ожидания и дисперсии для деформации ползучести, которые легко находятся из линеаризованной модели по формулам (19) и (20).

В качестве модельного примера в табл. 6 приведены результаты расчёта времени отказа балки при предельно допустимой величине $\chi_*^P = 0,005$ и значениях вероятности 0,9; 0,95 и 0,99.

Математические ожидания, дисперсии и корреляционные моменты случайных величин, необходимые для расчётов, представлены в табл. 4 и 5.

Анализ данных табл. 6 позволяет сделать вывод, что рекомендуемая величина вероятности безотказной работы должна составлять 0,99, поскольку все «экспериментальные» (результат численного эксперимента) значения времени отказа отдельных реализаций лежат правее расчётного значения времени отказа, а при вероятностях 0,95 и 0,9 имеются по 1–2 выброса за пределы назначенного ресурса.

Таблица 6

Расчетные по обобщённой модели ($t_{расч}$) и экспериментальные (численный эксперимент) ($t_{эксп}$) значения времени отказа балки при чистом изгибе

$Q_0, \text{Н}\cdot\text{мм}$	$P(t)$	$t_{расч}, \text{час}$	$t_{эксп}, \text{час}$
39240	0,99	18,9	28,7; 28; 23,6; 25,4; 28,7; 23,5; 25,8;
	0,95	20,5	23,7; 26,5; 30,2; 20,3; 28,8; 33,6; 23,6;
	0,9	21,5	31,4; 38; 36,5; 28,6; 42,7; 20,3; 57
32700	0,99	35,5	56,4; 55; 46,6; 48,8; 63,8; 45,3; 49,2;
	0,95	38,8	43,6; 49,4; 55,3; 38,7; 53,8; 63,4; 44,2;
	0,9	40,8	59; 72,6; 68,7; 53,1; 78,6; 37,9; 104,3
26160	0,99	76,4	120,3; 107,5; 100,2; 106,5; 124,6; 99,5; 107,2;
	0,95	83,7	91,6; 104,9; 114,9; 84,5; 114,9; 136; 94,5;
	0,9	88,2	126,6; 154,3; 147,5; 111,9; 164,8; 80,8; 217

Выводы. Выполненные исследования обосновывают целесообразность разработки обобщённых стохастических моделей элементов конструкций, демонстрируют эффективность их применения для оценки надёжности конструкций по параметрическим (деформационным) критериям отказа в условиях ползучести. На конкретном примере ползучести балки показано, что рекомендуемая назначаемая вероятность безотказной работы должна составлять величину порядка 0,99.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-0064-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарин Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974. № 1. С. 88–94. [*Samarin Yu. P. Use of stochastic equations in the theory of creep of materials // Izv. AN. SSSR. MTT*, 1974. no. 1. Pp. 88–94].
2. Самарин Ю. П. Стохастические механические характеристики и надёжность конструкций с реологическими свойствами / В сб.: *Ползучесть и длительная прочность конструкций*. Куйбышев: КПТИ, 1986. С. 8–17. [*Samarin Yu. P. Stochastic Mechanical Properties and Reliability of Structures with Rheological Properties / In: Creep and Long-Term Strength of Structures*. Kuibyshev: KPtI, 1986. Pp. 8–17].

3. Радченко В. П. Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке // *Пробл. прочности*, 1992. №2. С. 34–40; англ. пер.: Radchenko V. P. Prediction of creep and creep-rupture strength of materials on the basis of an energy approach in a stochastic formulation // *Strength of Materials*, 1992. Vol. 24, no. 2. Pp. 153–161.
4. Шершнева М. В. Метод расчёта ресурса стержневых конструкций на основе энергетического варианта ползучести и длительной прочности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №1(26). С. 141–149. [Shershneva M. V. Calculation method for frame construction life prediction on the basis of creep and endurance of energy type // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 1(26). Pp. 141–149].
5. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001. №12. С. 73–84. [Radchenko V. P., Simonov A. V., Dudkin S. A. Stochastic version of the one-dimensional theory of creep and long-term strength // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2001. no. 12. Pp. 73–84].
6. Радченко В. П., Попов Н. Н. Стохастические характеристики полей напряжений и деформаций при установившейся ползучести стохастически неоднородной плоскости // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2006. №2. С. 3–11. [Radchenko V. P., Popov N. N. Stochastic characteristics of stress and strain fields in steady-state creep of stochastically inhomogeneous plane // *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 2006. no. 2. Pp. 3–11].
7. Коваленко Л. В., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести // *ПММ*, 2009. Т. 73, №6. С. 1009–1016; англ. пер.: Kovalenko L. V., Popov N. N., Radchenko V. P. Solution of the plane stochastic creep boundary value problem // *J. Appl. Math. Mech.*, 2009. Vol. 73, no. 6. Pp. 727–733.
8. Исуткина В. Н. Разработка аналитических методов решения стохастических краевых задач установившейся ползучести для плоского деформированного состояния: Автореф. дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. Самара, 2007. 18 с. [Isutkina V. N. Development of analytical methods for solving stochastic boundary value problems of steady-state creep for a flat strain state: Abstract of Ph.D. Thesis (Phys. & Math.). Samara, 2007. 18 pp.]
9. Попов Н. Н., Радченко В. П. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // *ПММ*, 2012. Т. 76, №6. С. 1036–1044. [Popov N. N., Radchenko V. P. Analytical solution of the stochastic boundary-value problem of steady-state creep for a thick-walled tube // *Prikl. Mat. Mekh.*, 2012. Vol. 76, no. 6. Pp. 1036–1044].
10. Попов Н. Н., Радченко В. П. Нелинейная стохастическая задача ползучести неоднородной плоскости с учётом повреждённости материала // *ПМТФ*, 2007. Т. 48, №2. С. 140–146; англ. пер.: Popov N. N., Radchenko V. P. Nonlinear stochastic creep problem for an inhomogeneous plane with the damage to the material taken into account // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007. Vol. 48, no. 2. Pp. 265–270.
11. Радченко В. П., Шершнева М. В., Кубышкина С. Н. Оценка надёжности элементов конструкций в условиях ползучести на основе обобщённых стохастических моделей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №3(28). С. 55–71. [Radchenko V. P., Shershneva M. V., Kubyshkina S. N. Evaluation of the reliability of structures under creep for stochastic generalized models // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 3(28). Pp. 55–71].
12. Самарин Ю. П. Метод исследования ползучести в конструкциях, основанный на концепции черного ящика / В сб.: *Теоретико-экспериментальный метод исследования в конструкциях*. Куйбышев: КуАИ, 1984. С. 3–27. [Samarin Yu. P. The method of investigation for creep in structures a based on black-box concept / In: *Theoretical and experimental method of research in construction*. Kuibyshev: KuAI, 1984. Pp. 3–27].
13. Ерёмин Ю. А., Кайдалова Л. В., Радченко В. П. Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнения состояния материала и элементов конструкций // *Машиноведение*, 1983. №2. С. 67–74. [Eremin Yu. A., Kaidalova L. V., Radchenko V. P.

Investigation of creep in beams a based on analogy of structure equation of material and structural elements state // *Mashinovedenie*, 1983. no. 2. Pp. 67–74].

14. Радченко В. П., Ерёмин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с. [Radchenko V. P., Eremin Yu. A. Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements. Moscow: Mashinostroenie-1, 2004. 264 pp.]
15. Радченко В. П., Кубышкина С. Н. Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998. № 6. С. 23–34. [Radchenko V. P., Kubyschkina S. N. A mathematical model of rheological deformation and fracture for thick-walled pipe // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1998. no. 6. Pp. 23–34].
16. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. 95 с. [Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. Energy variant of creep theory. Novosibirsk: Inst. of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., 1986. 95 pp.]

Поступила в редакцию 04/IX/2012;
в окончательном варианте — 27/XI/2012.

MSC: 74S60; 74K10, 60H30

GENERALIZED STOCHASTIC MODEL OF CREEP AND CREEP RUPTURE BEAMS IN PURE BENDING AND ITS APPLICATION TO THE ESTIMATION OF RELIABILITY

V. P. Radchenko, M. V. Shershneva, V. V. Tsvetkov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: radch@samgtu.ru, mary-sofya@mail.ru, vi.v.tsvetkoff@mail.ru

Generalized stochastic model of creep and creep rupture beams under pure bending in terms “generalized load”, “generalized displacement”, “time” is offered. Beam is considered as a single entity (the specific model). The complete analogy between the curves of uniaxial creep sample under constant stress and generalized creep curves beams in the curvature of the beam coordinates “curvature beams – time” under the constant bending moment is determined. On the basis of this analogy the stochastic equation of state beam is formed. Method of reliability estimating of the beams bending under creep on parametric criteria of failure in a significant scatter of the data is developed. Calculation results and recommendations for lifelength assigning are presented.

Key words: creep, rupture strength, stochastic generalized model beams, pure bending, reliability, parametric failure criterion, the probability of failure-free operation.

Original article submitted 04/IX/2012;
revision submitted 27/XI/2012.

Vladimir P. Radchenko (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

Mariya V. Shershneva, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

Vitaliy V. Tsvetkov, Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.