Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.45

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

***Ж. О. Тахиров*[1], *Р. Н. Тураев*[2]**

[1] Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,
700100, Узбекистан, Ташкент, ул. Ю. Х. Хажиба, 103.
[2] Институт математики и информационных технологий АН Республики Узбекистан,
100125, Узбекистан, Ташкент, ул. Ф. Ходжаева, 29.

E-mails: prof.takhirov@yahoo.com, rasul.turaev@mail.ru

Рассматривается задача со свободной границей с нелокальным граничным условием для квазилинейного гиперболического уравнения. Для искомого решения установлены априорные оценки Шаудеровского типа. На основе полученных оценок доказаны теоремы единственности и существования.

Ключевые слова: *нелокальная задача, задача Стефана, квазилинейное параболическое уравнение, свободная граница, априорные оценки, теорема существования и единственности, фиксированная граница, метод потенциалов, принцип максимума.*

Введение. Теория классической разрешимости задачи Стефана и других задач со свободными границами для параболических уравнений построена в работах А. Фридмана [1], А. Мейрманова [2], Л. Рубинштейна [3] и др.

Особенность данной задачи состоит в наличии переменных размеров области, в которой исследуется температурное поле, и наличия подвижной границы раздела фаз, изучение поведения которой и составляет основную цель решения. Физические свойства среды, находящейся в разных фазах, будут различными. Поэтому задача Стефана характеризуется существенной геометрической и физической нелинейностью, что крайне затрудняет её решение.

В работе [4] Джим Дуглас предлагает способ доказательства единственности решения задачи Стефана для квазилинейного параболического уравнения. В. Кайнером [5] были доказаны теоремы существование и единственности однофазной задачи Стефана для нелинейных уравнений.

Отличительной особенностью однофазных задач является монотонность свободной границы и, как следствие этого, ограниченность первой производной решения по пространственной переменной на свободной границе.

Цель настоящей статьи — вывод априорных оценок решений однофазной задачи Стефана с нелокальным граничным условием на фиксированной границе, обеспечивающих её разрешимость для любого конечного промежутка

Жозил Останович Тахиров (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. математического анализа. *Расул Нортожиевич Тураев* (к.ф.-м.н.), старший научный сотрудник, лаб. дифференциальных уравнений.

времени, и доказательство единственности решения.

1. Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(s(t), u(x,t))$ удовлетворяющих условиям

$$a(u)u_t = u_{xx}, \quad \text{в} \quad D = \{(x,t) : 0 < x < s(t),\ 0 < t \leqslant T\}; \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0; \tag{2}$$

$$u(0,t) = mu(x_0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < x_0 \leqslant s_0; \tag{3}$$

$$u(s(t),t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{4}$$

$$\dot{s}(t) = -cu_x(s(t),t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Будем предполагать выполнение следующих условий:

a) функции $a(u)$ и $a'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причём $a(u) \geqslant a_0 > 0$, $a'(u) > 0$;

b) постоянные s_0, m, x_0 и c удовлетворяют следующим неравенствам: $s_0>0$, $0 < m < 1$, $c > 0$, $0 < x_0 \leqslant s_0$;

c) $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant N(s_0 - x)$, $N = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant s_0} |\varphi(x)(s_0 - x)^{-1}|$.

Задача (1)–(5) исследованы в работах [2, 4] в случае, когда вместо (3) задаётся граничное условие второго рода.

2. Некоторые априорные оценки.

Лемма. *Пусть выполнены условия* a), b), c). *Тогда для решения* $u(x,t)$, $s(t)$ *задачи* (1)–(5) *справедливы оценки*

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant M_1 = \max_x |\varphi(x)|, \quad (x,t) \in \bar{D},$$

$$0 < \dot{s}(t) \leqslant M_2 = CN, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{6}$$

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant N(s(t) - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7}$$

Доказательство. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному параболическому уравнению, для которого справедлив принцип максимума, и ограничена на границе $x = s(t)$ и в начальный момент времени. В возможных точках положительного максимума или отрицательного минимума $u(t,0)$ оценивается через известные величины.

Неположительность производной $u_x(s(t),t)$ следует из положительности решения $u(x,t)$ в области D и равенства его нулю на свободной границе.

Для оценки производной $u_x(s(t),t)$ снизу рассмотрим функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + N(x - s(t)), \quad N = \text{const} > 0. \tag{8}$$

Тогда из задачи (1)–(5) получим задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{gathered} v_{xx} - av_t = aN\dot{s}(t) \geqslant 0, \quad (x,t) \in D, \\ v(0,t) = mv(x_0,t) - mNx_0 - (1-m)Ns(t), \\ v(x,0) = \varphi(x) + N(x - s_0) \leqslant 0, \\ v(t,s(t)) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Из (8) следует, что $v(x,t)$ не может достигать положительного максимума внутри области D. Условие (9) не позволяет допустить существования на левой границе положительного максимума. Таким образом, функция $v(x,t)$ неположительна всюду в D и равна нулю на границе $x = s(t)$. Но тогда $v_x(s(t),t) \geqslant 0$. Следовательно,

$$v_x(s(t),t) = u_x(s(t),t) + N \geqslant 0$$

или

$$u_x(s(t),t) \geqslant -N.$$

Из неположительности $v(x,t)$ с учётом (8) можно получить неравенство (7).□

Теперь, используя результаты [6], получим оценки для $|u_x|$ и $|u|^D_{1+\gamma}$. Здесь и далее в отношении функциональных пространств и обозначения норм в них будем следовать обозначениям работы [6].

Пусть $Q = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant s_0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $Q^\delta = \{(x,t) : 0 < \delta \leqslant x \leqslant \leqslant s_0 - \delta, 0 < \delta \leqslant t \leqslant T\}$, $Q^\delta_0 = \{(x,t) : 0 < \delta \leqslant x \leqslant s_0 - \delta, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Теорема 1. *Пусть функция $u(x,t)$ ($M = \max\limits_Q |u|$ непрерывна в Q вместе с производной u_x и удовлетворяет уравнению (1) всюду в Q за исключением, может быть, точек прямой $x = 0$. Тогда*

$$|u_x(x,t)| \leqslant P_0(M, a_0, \delta), (x,t) \in Q^\delta_0. \tag{10}$$

Если ещё известно, что функция $u(x,t)$ обладает в Q суммируемыми с квадратом обобщёнными производными u_{xx} и u_{tx}, то существует такое $\gamma = \gamma(M, a_0, \delta)$, что

$$|u|^{Q^{2\delta}_0}_{1+\gamma} \leqslant C(M, a_0, a_1, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \tag{11}$$

где $a_1 = \max a(u)$ при $|u| \leqslant M$.

Пусть в области $\{(x,t) \in Q, |u| \leqslant M\}$ функция $a(u)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем β по u и с константой N, а функция $u(x,t)$ непрерывна вместе с производными u_t, u_x, u_{xx}, причём $u(x,0) = 0$. Положим $\alpha = \beta\gamma$ и предположим, что $|u|^{Q^\delta_0}_{2+\gamma} < \infty$. Тогда

$$|u|^{Q^{4\delta}_0}_{2+\gamma} \leqslant C(M, a_0, a_1, N, \beta, \delta). \tag{12}$$

Доказательство. Для $(x,t) \in Q^\delta_0$ оценки (10), (11), (12) непосредственно следуют из результатов работы [6]. Теперь, выбирая δ таким, что $4\delta \leqslant x_0$, и пользуясь нелокальным условием (3) с учётом (12), получаем, что ограниченная функция $u_t(x,t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α. Оценим $|u_x|$ в области $Q_1 = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 4\delta, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. В Q_1 введём новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - g_1(x,t),$$

где

$$g_1(x,t) = \frac{4\delta - x}{4\delta} u(0,t) + \frac{x}{4\delta} u(4\delta, t).$$

Для функции $v(t,x)$ в области Q_1 имеем задачу

$$a(v)v_t = v_{xx} + f(x,t); \quad v(x,0)=0, \quad v(0,t)=0, \quad v(4\delta,t)=0.$$

Так как $v(x,t)=0$ на Γ ($\Gamma = \partial Q_1$), оценки (10), (11), (12) выполняются всюду в Q_1:

$$|u_x| \leqslant C, \quad |u|_{1+\gamma}^{Q_1} \leqslant C, \quad |u|_{2+\gamma}^{Q_1} \leqslant C, \quad (x,t)\in Q_1.$$

Чтобы получить оценки вблизи правой (свободной) границы, выполним замену независимых переменных $\tau = t$, $y = x/s(t)$. Тогда области D соответствует область $\Omega = \{(y,\tau) : 0 < y < 1, 0 < \tau \leqslant T\}$, а ограниченная функция $v(y,\tau) = u(ys(\tau),\tau)$ является решением задачи

$$\bar{a}v_\tau = \frac{1}{s^2(\tau)}v_{yy} + f(y,\tau), \quad (y,\tau)\in\Omega; \tag{13}$$
$$v(0,\tau) = mv(h(\tau),\tau), \quad v(y,0) = \varphi y(s_0), \quad v(1,\tau)=0, \quad 0\leqslant\tau\leqslant T,$$

где

$$f(y,\tau) = -\bar{a}\frac{y}{s^2(\tau)}v_y(y,\tau)v_y(1,\tau), \quad h(\tau) = s_0/s(\tau) > 0.$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (13) удовлетворяют условиям Гёльдера и теоремы 1. Применяя метод четного продолжения через правую границу [6], получим оценки для $|v_y|$, $|v|_{1+\gamma}$ вплоть до $y=1$. $\square$

Априорные оценки старших производных устанавливаются при помощи результатов по линейным уравнениям.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$a(x,t)v_{xx} + b(x,t)v_x + c(x,t)v - v_t = f(x,t), (x,t)\in\Omega \tag{14}$$

удовлетворяют условиям Гёльдера

$$|a|_\gamma^{\bar{\Omega}} + |b|_\gamma^{\bar{\Omega}} + |c|_\gamma^{\Omega} + |f|_\gamma^{\bar{\Omega}} < \infty, \quad a(x,t)\geqslant a_0 > 0.$$

Пусть $v(x,t)$ *— решение уравнения* (14), *которое удовлетворяет условиям*

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v(0,t) = mv(h(t),t), \quad v(1,t) = 0, \tag{15}$$

причём $|v|_{2+\gamma}^{\Omega} < +\infty$, $M = \max\limits_{\Omega}|v(x,t)|$. *Тогда*

$$|v|_{2+\gamma}^{\bar{\Omega}} \leqslant C(|f|_\gamma^{\Omega} + M).$$

Доказательство проводится по следующей схеме. При получении априорных оценок на левой половине области применяется способ, который был использован при доказательстве теоремы 1. На правой половине используем результаты работы [1]. Разрешимость задачи (14), (15) доказывается методом потенциалов.

3. Единственность решения. Получим интегральное представление для $s(t)$, эквивалентное (5), для этого умножим уравнение (1) на $(-x)$ и проинтегрируем полученное выражение по области D:

$$\iint_D [(u-\xi u_x)_x + (\xi b(u))_t] d\xi d\eta = \int_\Gamma (\xi - \xi u_x) d\eta - \xi b(u) d\xi = 0,$$
$$b(u) = \int_0^u a(\xi) d\xi.$$

Имеем

$$s^2(t) = s_0^2 + 2\int_0^{s_0} \xi b(\eta) d\xi - 2\int_0^{s(t)} \xi b(u(\xi,t)) d\xi + 2\int_0^t u(0,\eta) d\eta. \tag{16}$$

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 решение задачи* (1)–(5) *единственно.*

Доказательство. Докажем теорему для некоторого малого t, а затем покажем, что она справедлива для любого $0 < t < \infty$.

Пусть функции $s_1(t)$, $u_1(x,t)$ и $s_2(t)$, $u_2(x,t)$ являются решениями задачи (1)–(5). Пусть

$$y(t) = \min(s_1(t), s_2(t)), \quad z(t) = \max(s_1(t), s_2(t)).$$

Для каждой пары справедливо представление (16). Имеем

$$s_1^2(t) - s_2^2(t) = 2\int_0^{s_1(t)} \xi b(u_1) d\xi + 2\int_0^{s_2(t)} \xi b(u_2) d\xi + 2\int_0^t (u_1(0,\eta) - u_2(0,\eta)) d\eta.$$

Отсюда

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leqslant \frac{1}{s_0}\int_0^{y(t)} \xi |b(u_1) - b(u_2)| d\xi + \frac{1}{s_0}\int_{y(t)}^{z(t)} \xi b(u_i) d\xi + \\ + \frac{1}{s_0}\int_0^t |u_1(0,\eta) - u_2(0,\eta)| d\eta, \tag{17}$$

где u_i — решение между $y(t)$ и $z(t)$.

По лемме

$$|u_i(x,t)| \leqslant N(y(t) - x), \quad |u_1(y(t),t) - u_2(y(t),t)| \leqslant N|s_1(t) - s_2(t)|.$$

Рассмотрим функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Тогда для $v(x,t)$ получим уравнение с ограниченными коэффициентами и следующую задачу

$$v_{xx} = b_1(x,t) v_t + b_2(x,t) v;$$
$$v(0,t) = m v(x_0,t), \quad v(x,0) = 0,$$
$$|v(s(t),t)| \leqslant N|s_1(t) - s_2(t)|,$$

где $b_1(x,t) = a(u_1(x,t))$, $b_2(x,t) = [b(u_1) - b(u_2)]$. Отсюда по принципу максимума

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant N \max_{0 \leqslant \eta \leqslant t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|.$$

В силу ограниченности функций $u(x,t)$, $a(u)$, $a'(u)$ оценим члены из (17):

$$I_1 = \frac{1}{s_0}\int_0^{y(t)} \xi|b(u_1)-b(u_2)|d\xi \leqslant \frac{b^*(\overline{\xi})}{s_0}y^2(t)|u_1-u_2| \leqslant$$
$$\leqslant M_{11}\max_{\eta}|s_1(\eta)-s_2(\eta)|y^2(t),$$

$$I_2 = \frac{1}{s_0}\int_{y(t)}^{z(t)} \xi b(u_i)d\xi = \frac{1}{s_0}\int_{y(t)}^{z(t)} \xi d\xi\int_0^{u_i} a(\chi)d\chi \leqslant \frac{a_1}{s_0}\int_{y(t)}^{z(t)} \xi u_i(\xi,t)d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_1}{s_0}\int_{y(t)}^{z(t)} \xi N(z(t)-\xi)d\xi = \frac{a_1 N}{s_0}\int_{y(t)}^{z(t)} \xi(z(t)-\xi)d\xi =$$
$$= \frac{-M_{12}}{2}\int_{y(t)}^{z(t)} \xi d(z(t)-\xi)^2 = \frac{M_{12}}{2}y(t)(z(t)-y(t))^2 +$$
$$+ M_{12}\int_{y(t)}^{z(t)} (z(t)-\xi)^2 d\xi = M_{12}y(t)(z(t)-y(t))^2 + M_{12}(z(t)-y(t))^3 \leqslant$$
$$\leqslant M_{12}y(t)\max_{0\leqslant\eta\leqslant t}|s_1(\eta)-s_2(\eta)|^2 + M_{12}\max_{0\leqslant\eta\leqslant t}|s_1(\eta)-s_2(\eta)|^3,$$

$$I_3 = \frac{1}{s_0}\int_0^t |u_1(0,\eta)-u_2(0,\eta)|d\eta \leqslant M_{13}T\max_{0\leqslant\eta\leqslant t}|s_1(\eta)-s_2(\eta)|.$$

Пусть $A(T) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|s_1(t)-s_2(t)|$. Если $A(T) > 0$, то с учётом полученных неравенств из (17) имеем

$$A(T) \leqslant M_{11}y^2(T)A(T) + M_{12}y(t)A^2(T) + M_{12}A^3(T) + M_{13}T\cdot A(T), \qquad (18)$$

Если (18) разделить на $A(T)$, то получим

$$1 \leqslant M_{11}y^2(T) + M_{12}y(T)A(T) + M_{12}A^2(T) + M_3 T.$$

Получим сформулированное выше утверждение для малых t. Пусть для определённости $T < 1$. Тогда вместо T^2 берём T:

$$1 \leqslant M_{11}T_0 + M_{12}T_0 + M_{13}T_0, \quad 1 \leqslant T_0(M_{11}+M_{12}+M_{13}) = T_0 M_{14}.$$

Если $M_{14}T_0 < 1$, то получим противоречие. Если $1 \leqslant T$, то $1 \leqslant T^2 M_{15}$ и $T^2 M_{15} < 1$. Тогда для $0 < t \leqslant T_0$ имеет место теорема единственности.

Теперь докажем, что единственность имеет место для любого $0 < t < +\infty$. Пусть $T_1 = \sup\{t : s_1(\eta) = s_2(\eta), 0 \leqslant \eta \leqslant t\}$. Если $T_1 = \infty$, то доказательство очевидно. Предположим, что величина T_1 ограничена, и попробуем получить противоречие. Пусть

$$A(\Delta(t)) = \max_{T_1\leqslant t\leqslant T_1+\Delta t}|s_1(t)-s_2(t)|.$$

В силу (6) имеем неравенство $A(\Delta t) \leqslant M_2 \Delta t$. По предположению, выполняются неравенства $A(\Delta t) > 0$, $\Delta t > 0$. Оценим члены неравенства (17):

$$|I_2| = \left| \frac{1}{s_0} \int_{y(t)}^{z(t)} \xi b(u_i) d\xi \right| \leqslant M_{17} A^2(\Delta t), \quad T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t.$$

$$I_3 = \frac{1}{s_0} \int_{T_1}^{t} |u_1(0,\eta) - u_2(0,\eta)| \, d\eta = \frac{m}{s_0} \int_{T_1}^{t} |u_1(x_0,\eta) - u_2(x_0,\eta) d\eta| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{s_0} \Delta t \max_t |s_1(t) - s_2(t)| \leqslant \frac{M}{s_0} \Delta t A(\Delta t) \leqslant M_{18} A(\Delta t) \Delta t, \quad T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t.$$

Для члена I_1, как и в первом случае, имеем

$$A(\Delta t) \leqslant \max_{T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t} M_{14} \int_0^{y(t)} x |bu_1(x,t) - b_2(u(x,t)| dx + M_{17} A^2(\Delta t) + M_{18} A(\Delta t) \Delta t.$$

Отсюда

$$1 \leqslant M_{15} \max_{T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t} \int_0^{y(t)} \frac{x|bu_1(x,t) - bu_2(x,t)|}{A(\Delta t)} dx + M_{17} A(\Delta t) + M_{18} \Delta t. \quad (19)$$

Перепишем (19) в виде

$$1 \leqslant M_{20} \max_t \int_0^{y(T_1)} \frac{x|u_1(x,t) - u_2(u(x,t)|}{A(\Delta t)} dx +$$
$$+ M_{20} \max_{T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t} \int_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{x|u_1(x,t) - u_2(u(x,t)|}{A(\Delta t)} dx + M_{17} A(\Delta t) + M_{18} \Delta t \quad (20)$$

и рассмотрим функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Тогда имеем задачу

$$v_{xx} = b_1(x,t) v_t + b_2(x,t) v, \quad 0 \leqslant x \leqslant y(t), \quad T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t;$$
$$v(x, T_1) \equiv 0, \quad v(y(t), t) \leqslant N A(\Delta t), \quad v(0,t) = m v(x_0, t).$$

Отсюда по принципу максимума

$$|v(x,t)| \leqslant N A(\Delta t). \quad (21)$$

Оценим интегральные члены в формуле (20):

$$\int_{y(T_1)}^{y(t)} x \frac{|v(x,t)|}{A(\Delta t)} dx \leqslant \int_{y(T_1)}^{y(t)} x N dx = \frac{N}{2} \left(y^2(t) - y^2(T_1) \right) =$$
$$= \frac{N}{2} \left(y(t) + y(T_1) \right) \left(y(t) - y(T_1) \right) \leqslant M_{21} (t - T_1) \leqslant M_{21} \Delta t.$$

Теперь рассмотрим вспомогательную задачу:

$$w_{xx} = b_1(x,t) w_t + b_2(x,t) w, \quad 0 \leqslant x \leqslant y(T_1), \quad T_1 < t;$$

$$w(x, T_1) = 0, \quad 0 < x < y(T_1);$$
$$w(0, t) = mw(x_0, t), \quad w(y(T_1), t) = 1, \quad t > T_1.$$

Введём функцию

$$V(x, t) = \frac{v(x, t)}{NA(\Delta t)} - w(x, t), \quad 0 < x < y(T_1), \quad T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t,$$

для которой поставим такую задачу:

$$V_{xx} = b_1 V_t + b_2 V, \quad 0 < x < y(T_1), \quad T_1 < t;$$
$$V(x, T_1) = 0, \quad V(0, t) = mV(x_0, t), \quad T_1 < t;$$
$$V(y(T_1), t) = \frac{v(y(T_1), t)}{NA(\Delta t)} - w(y(T_1), t) \leqslant 0.$$

По принципу максимума $V(x, t) \leqslant 0$, следовательно,

$$\frac{|v(x, t)|}{NA(\Delta t)} \leqslant w(x, t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant y(T_1), \quad T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t.$$

В промежутке $0 \leqslant x \leqslant y(T_1)$ имеет место

$$\lim_{t \to T_1} w(x, t) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{t \to T_1} \int_0^{y(T_1)} w(x, t) dx = 0,$$

следовательно,

$$\max_{T_1 \leqslant t \leqslant T_1 + \Delta t} \int_0^{y(T_1)} x \frac{|v(x, t)|}{NA(\Delta t)} dx \to 0, \quad \text{при } \Delta t \to 0.$$

Если в формуле (21) перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, то получим противоречие. Таким образом $s_1(t) \equiv s_2(t)$ для любого $t > 0$. □

4. Существование решения. При определении максимального интервала существования решения задач Стефана учитываются три фактора:

1) невырожденность области;
2) наличие априорных оценок норм в соответствующем пространстве;
3) ограниченность снизу и сверху модуля градиента решения на свободной границе.

Если наложить некоторые ограничения (обеспечивающие выполнение вышеуказанных факторов на произвольном интервале времени) на данные задачи, то классическое решение задачи Стефана существует при всех положительных значениях времени.

Теорема 4. *При условиях теорем 1 и 2, а также соответствующих условиях согласования в точках* $(0, 0)$, $(s_0, 0)$ *существует единственное решение* $u(x, t) \in C^{2+\gamma}(\overline{D})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}[0, T]$ *задачи* (1)–(5).

Доказательство. При доказательстве леммы и теорем 1, 2 уже установлены необходимые априорные оценки. Свободная граница $x = s(t)$ монотонно возрастает с ростом времени. Если гёльдеровость $\dot{s}(t)$ доказана и априорные оценки норм в пространстве $C^{2+\gamma}$ для $u(x,t)$ получены, то можно доказать глобальную разрешимость задачи. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Friedman A.* Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hal, 1964. xiv+347 pp.; русск. пер. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 428 с.
2. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, Сибирск. отдел., 1986. 240 с. [*Meyrmanov A. M.* The Stefan problem. Novosibirsk: Nauka, Sibirsk. Otdel., 1986. 240 pp.]
3. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967. 468 с. [*Rubinshteyn L. I.* The Stefan problem. Riga: Zvaygzne, 1967. 468 pp.]
4. *Douglas J., Jr.* A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952. Vol. 8. Pp. 402–408.
5. *Kyner W. T.* An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem // *J. Math. and Mech.*, 1959. Vol. 8, no. 4. Pp. 483–498.
6. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // *Тр. Москов. матем. об-ва*, 1967. Т. 16. С. 329–346. [*Kruzhkov S. N.* Nonlinear parabolic equations in two independent variables // *Trudy Moskov. Matem. Obshch.*, 1967. Vol. 16. Pp. 329–346].

Поступила в редакцию 10/VII/2011;
в окончательном варианте — 19/XII/2011.

MSC: 35R35; 35K05, 35R05

THE NONLOCAL STEFAN PROBLEM FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION

***J. O. Takhirov*[1], *R. N. Turaev*[2]**

[1] Nizami Tashkent State Pedagogical University,
103, Yusuf Khos Khojib st., Tashkent, 700100, Uzbekistan.
[2] Institute of Mathematics and Information Technologies
of the Academy of Sciences of Uzbekistan,
29, Do'rmon yo'li srt., Tashkent, 100125, Uzbekistan.

E-mails: prof.takhirov@yahoo.com, rasul.turaev@mail.ru

In this paper, we deal with free boundary problem with nonlocal boundary condition for quasilinear parabolic equation. For the solutions of the problem apriory estimates of Shauder's type are established. On the base of apriory estimations the existence and uniqueness theorems are proved.

Key words: *nonlocal problem, Stefan problem, quasilinear parabolic equation, free boundary, priori estimates, existence and uniqueness theorem, fixed boundary, method of potentials, maximum principle.*

Original article submitted 10/VII/2011;
revision submitted 19/XII/2011.

Jozil O. Takhirov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematical Analysis.
Rasul N. Turaev (Ph. D. (Phys. & Math.)), Senior Research Scientist, Lab. of Differential Equations.