УДК 517.956.4

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева,
Россия, 660014, Красноярск, пр. газеты имени «Красноярский рабочий», 31.

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Рассматриваются вопросы обобщённой разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени. Используется метод разделения переменных.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение, параболический оператор высокой степени, обобщённая разрешимость.*

1. Постановка задачи. В области D рассматривается уравнение

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+(-1)^m\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\Big)^n u(t,x)=f(t,x,u(t,x),u(-t,x)) \tag{1}$$

с начальными

$$u(t,x)\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}u(t,x)\Big|_{t=0}=\varphi_j(x),\quad j=\overline{2,n} \tag{2}$$

и граничными

$$\begin{gathered}u_x(t,x)\Big|_{x=0}=u_{xxx}(t,x)\Big|_{x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(nm-1/2)}}{\partial x^{2(nm-1/2)}}u(t,x)\Big|_{x=0}=\\ =\int_0^l u(t,y)dy=\int_0^l u_{yy}(t,y)dy=\ldots=\int_0^l\frac{\partial^{2(nm-1)}}{\partial y^{2(nm-1)}}u(t,y)dy=0\end{gathered} \tag{3}$$

условиями, где $f(t,x,u,\vartheta)\in(D\times\mathbb{R}^2)$, $\varphi_j(x)\in C(D_l)$;

$$\begin{gathered}\varphi_j'(x)\big|_{x=0}=\varphi_j'''(x)\big|_{x=0}=\ldots=\varphi_j^{(2nm-1)}(x)\big|_{x=0}=\\ =\int_0^l\varphi_j(y)dy=\int_0^l\varphi_j''(y)dy=\ldots=\int_0^l\varphi_j^{(2nm-2)}(y)dy=0,\quad j=\overline{1,n};\end{gathered}$$

$D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[-t,T]$, $D_l\equiv[0,l]$; $0<l<\infty$, $0<T<\infty$; n, m — натуральные числа.

Дифференциальное выражение $-\partial^{2nm}/\partial x^{2nm}$ при граничных условиях (3) порождает положительно определённый самосопряжённый оператор с чисто точечным спектром.

Следует отметить, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящено много работ и при этом применялись разные методы. Смешанные задачи

Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

с интегральными условиями были рассмотрены в работах многих авторов, в частности в [1–3].

В данной работе, в отличие от работ [4,5], используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде предела

$$u(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\cdot b_i(x). \tag{4}$$

2. Вспомогательные понятия. Множество

$$\left\{a(t) = (a_i(t)) : a_i(t) \in C(D_T), i = \overline{1,N}\right\}$$

введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_p^N(T)} = \left[\sum_{i=1}^{N}\Big(\max_{t\in D_T}|a_i(t)|\Big)^p\right]^{1/p}, \quad p>1$$

становится банаховым пространством и обозначается через $B_p^N(T)$. Наряду с этим пространством также рассмотрим банахово пространство $B_p(T)$ с нормой

$$\|a(t)\|_{B_p(T)} = \left[\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(\max_{t\in D_T}|a_i(t)|\Big)^p\right]^{1/p}.$$

Очевидно, что $\lim_{N\to\infty} B_p^N(T) = B_p(T)$. Для каждого элемента $a(t)\in B_p(T)$ определяется оператор

$$Qa(t) = u(t,x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} a_i(t)\cdot b_i(x).$$

Обозначим через $E_p(D)$ множество значений оператора Q. Здесь очевидно, что $Q:\ B_p(T)\to E_p(D)$ и $E_p(D)\subset L_p(D)$.

Для произвольной функции $g(x)$, $x\in D_l$, в пространстве $L_p(D_l)$ вводится норма следующим образом:

$$\|g(x)\|_{l_p(D_l)} = \left\{\int_0^1 |g(y)|^p dy\right\}^{1/p} < \infty.$$

Через $W_p^{(k)}(D)$ обозначается множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$, $(\partial^2/\partial x^2)\Phi(t,x), \ldots, (\partial^{2nm-2}/\partial x^{2nm-2})\Phi(t,x)$ при фиксированном $t\in D_T$ принадлежат области определения оператора $-\partial^{2nm}/\partial x^{2nm}$, имеют производные порядка k по t, принадлежащие $L_p(D_l)$, и обращаются в нуль при $t\leqslant -T+\delta$ и $t\geqslant T-\delta$ $(0<\delta$ — зависит от $\Phi(t,x))$, где

$$L_{p,q}(D) = \left\{u(t,x) : \left[\int_0^T\left(\int_0^l |u(t,x)|^p dx\right)^{q/p} dt\right]^{1/q} < \infty\right\}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Ясно, что пространство $W_p^{(k)}(D)$ всюду плотно в пространстве $L_p(D)$.

Пусть $b_i(x)$ — собственные функции дифференциального оператора $-\partial^{2nm}/\partial x^{2nm}$, удовлетворяющие граничным условиям

$$b_i'(0) = b_i'''(0) = \ldots = b_i^{(2nm-1)}(0) = \int_0^l b_i(y)dy = \\ = \int_0^l b_i''(y)dy = \ldots = \int_0^l b_i^{(2nm-2)}(y)dy = 0$$

и обладающие свойством

$$b_i^{(2nm)}(x) = (-1)^{2(nm+1/2)}\lambda_i^{2nm} b_i(x),$$

где λ_i^{2nm} — соответствующие собственные значения данного оператора. Тогда функция, определённая с помощью предела (4), формально удовлетворяет граничным условиям (3).

Пусть для функций из $W_p^{(k)}(D)$ справедливы соотношения

$$\lim_{t\to\pm T}\int_0^l \Phi(t,y)dy = \lim_{t\to\pm T}\int_0^l \frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t}dy = \ldots = \lim_{t\to\pm T}\int_0^l \frac{\partial^{n-1}\Phi(t,y)}{\partial t^{n-1}}dy = 0$$

при $k = n$.

3. Сведение решения задачи к системе нелинейных интегральных уравнений.

Определение. Если функция $u(t,x) \in E_p(D)$ удовлетворяет интегральному условию

$$\int_0^t \int_0^l \Big\{u(s,\, y)\Big[\frac{\partial^n}{\partial s^n}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial s^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m}}{\partial s^{n-2}\partial y^{2m+2}}\Phi + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+2m+1}}{\partial s^{n-3}\partial y^{2m+4}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-3}}{\partial s^3\partial y^{2nm-6}}\Phi + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-2}}{\partial s^2\partial y^{2nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{2nm-1}}{\partial s\partial y^{2nm-2}}\Phi(s,y) + \frac{\partial^{2nm}}{\partial y^{2nm}}\Big] - \\ - f(s,y,u(s,y),u(-s,y))\Phi(s,y)\Big\}dyds = \\ = \int_0^l \varphi_1(y)\Big[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m+2}}\Phi + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+2m}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m+4}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-4}}{\partial t^2\partial y^{2nm-6}}\Phi + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-3}}{\partial t\partial y^{2nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{2nm-2}}{\partial y^{2nm-2}}\Phi\Big]_{t=0}dy - \\ - \int_0^l \varphi_2(y)\Big[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m+2}}\Phi + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-5}}{\partial t\partial y^{2nm-6}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-4}}{\partial y^{2nm-4}}\Phi\Big]_{t=0}dy +$$

$$+\int_0^l \varphi_3(y)\Big[\frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-4}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-5}\partial y^{2m+2}}\Phi +$$
$$+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-6}}{\partial y^{2nm-6}}\Phi\Big]_{t=0}dy -$$
$$-\ldots-\int_0^l \varphi_{n-2}(y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + n\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2m+2}}{\partial y^{2m+2}}\Phi\right]_{t=0}dy +$$
$$+\int_0^l \varphi_{n-1}(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + n\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi\right]_{t=0}dy - \int_0^l \varphi_n(y)\big[\Phi\big]_{t=0}dy$$

для любого $\Phi(t,x)\in W_p^{(k)}(D)$, то она называется обобщённым решением смешанной задачи (1)–(3).

Приближённое решение смешанной задачи (1)–(3) ищется в виде

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^N a_i(t)\cdot b_i(x).$$

Покажем, что коэффициенты разложения $a_i(t)$ решения смешанной задачи (1)–(3) удовлетворяют следующей системе нелинейных интегральных уравнений (СНИУ):

$$a_i(t) = w_i(t) + \int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q^N a(s), Q^N a(-s)\right)\times$$
$$\times b_i(y)P_i(t,s)dyds, \quad t\in D_T, \quad (5)$$

где

$$w_i(t)=\Big[\Big(1+\lambda_i^{2m}t+\frac{\lambda_i^{4m}}{2!}t^2+\frac{\lambda_i^{6m}}{3!}t^3+\ldots+\frac{\lambda_i^{2m(n-1)}}{(n-1)!}t^{n-1}\Big)\varphi_{1i}+$$
$$+t\Big(1+\lambda_i^{2m}t+\frac{\lambda_i^{4m}}{2!}t^2+\frac{\lambda_i^{6m}}{3!}t^3+\ldots+\frac{\lambda_i^{2m(n-2)}}{(n-2)!}t^{n-2}\Big)\varphi_{2i}+$$
$$+\frac{t^2}{2!}\Big(1+\lambda_i^{2m}t+\frac{\lambda_i^{4m}}{2!}t^2+\frac{\lambda_i^{6m}}{3!}t^3+\ldots+\frac{\lambda_i^{2m(n-3)}}{(n-3)!}t^{n-3}\Big)\varphi_{3i}+$$
$$+\ldots+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\left(1+\lambda_i^{2m}t\right)\varphi_{(n-1)i}+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{ni}\Big]\cdot e^{-\lambda_i^{2m}t},$$

$$P_i(t,s)=(n-1)!(t-s)^{n-1}\cdot e^{-\lambda_i^{2m}(t-s)}, \quad Q^N a(s)=\sum_{i=1}^N a_i(s)\cdot b_i(y).$$

Согласно определению обобщённого решения смешанной задачи (1)–(3) имеем

$$\int_0^t \int_0^l \Big\{ \sum_{i=1}^N a_i(s)\cdot b_i(y) \Big[\frac{\partial^n}{\partial s^n}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial s^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m}}{\partial s^{n-2}\partial y^{2m+2}}\Phi +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+2m+1}}{\partial s^{n-3}\partial y^{2m+4}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-3}}{\partial s^3\partial y^{2nm-6}}\Phi +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-2}}{\partial s^2\partial y^{2nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{2nm-1}}{\partial s\partial y^{2nm-2}}\Phi + \frac{\partial^{2nm}}{\partial y^{2nm}}\Phi\Big] -$$
$$- f\Big(s, y, \sum_{j=1}^N a_j(s)\cdot b_j(y), \sum_{j=1}^N a_j(-s)\cdot b_j(y)\Big)\Phi(s,y)\Big\} dyds =$$
$$= \int_0^l \varphi_1(y)\Big[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m+2}}\Phi +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{n+2m}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m+4}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-4}}{\partial t^2\partial y^{2nm-6}}\Phi +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-3}}{\partial t\partial y^{2nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{2nm-2}}{\partial y^{2nm-2}}\Phi\Big]_{t=0} dy -$$
$$- \int_0^l \varphi_2(y)\Big[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m+2}}\Phi +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-5}}{\partial t\partial y^{2nm-6}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-4}}{\partial y^{2nm-4}}\Phi\Big]_{t=0} dy +$$
$$+ \int_0^l \varphi_3(y)\Big[\frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-4}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-5}\partial y^{2m+2}}\Phi +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-6}}{\partial y^{2nm-6}}\Phi\Big]_{t=0} dy - \ldots -$$
$$- \int_0^l \varphi_{n-2}(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + n\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2m+2}}{\partial y^{2m+2}}\Phi\Big]_{t=0} dy +$$
$$+ \int_0^l \varphi_{n-1}(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + n\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi\Big]_{t=0} dy - \int_0^l \varphi_n(y)[\Phi]_{t=0} dy. \quad (6)$$

Пусть в (6) $\Phi = \Phi_\nu(t,x) = h(t)b_\nu(x) \in W_p^{(k)}(D)$, где $0 \neq h(t) \in C^n(D_T)$. Тогда

$$\int_0^t \int_0^l \Big\{ \sum_{i=1}^N a_i(s)\cdot b_i(y) \Big[(-1)^n h^{(n)}(s)b_\nu(y) + (-1)^{n-1} n\lambda_\nu^{2m} h^{(n-1)}(s)b_\nu(y) +$$
$$+ (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\lambda_\nu^{2m+2}h^{(n-2)}(s)b_\nu(y) + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\lambda_\nu^{2nm-4}h''(s)b_\nu(y) - n\lambda_\nu^{2nm-2}h'(s)b_\nu(y) + \lambda_\nu^{2nm}h(s)b_\nu(y)\Big] -$$
$$- f\Big(s, y, \sum_{j=1}^N a_j(s)\cdot b_j(y), \sum_{j=1}^N a_j(-s)\cdot b_j(y)\Big)h(s)\Big\} dyds = 0.$$

Учитывая, что функции $b_i(x)$ полны и ортонормированны в $L_p(D_l)$, из последнего равенства имеем

$$\int_0^t \Big[a_i(s)\cdot\Big((-1)^n h^{(n)}(s) + (-1)^{n-1} n\lambda_i^{2m} h^{(n-1)}(s) + \\ + (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{2m+2} h^{(n-2)}(s) + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{2nm-4} h''(s) - n\lambda_i^{2nm-2} h'(s) + \lambda_i^{2nm} h(s)\Big) - \\ - \int_0^l f\left(s, y, Q^N a(s), Q^N a(-s)\right) h(s)\cdot b_i(y)dy\Big] ds = 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^t h(s)\Big[a_i^{(n)}(s) + n\lambda_i^{2m} a_i^{(n-1)}(s) + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{2m+2} a_i^{(n-2)}(s) + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{2nm-4} a_i''(s) + m\lambda_i^{2nm-2} a_i'(s) + \lambda_i^{2nm} a_i(s) - \\ - \int_0^l f\left(s, y, Q^N a(s), Q^N a(-s)\right)\cdot b_i(y)dy\Big] ds = 0. \quad (7)$$

Так как $h(t)$ — любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, $a_i(t)$ имеет обобщённые производные порядка n по t в смысле Соболева на отрезке D_T. Поскольку $h(t) \neq 0$ для всех $t \in D_T$, из (7) получаем

$$a_i^{(n)}(t) + n\lambda_i^{2m} a_i^{(n-1)}(t) + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{2m+2} a_i^{(n-2)}(t) + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{2nm-4} a_i''(t) + n\lambda_i^{2nm-2} a_i'(t) + \lambda_i^{2nm} a_i(t) = \\ = \int_0^l f\left(t, y, Q^N a(t),\, Q^N a(-t)\right)\cdot b_i(y)dy. \quad (8)$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$a_i(t) = \left(C_{1i} + C_{2i}t + C_{3i}t^2 + C_{4i}t^3 + \ldots + C_{ni}t^{n-1}\right)\cdot e^{-\lambda_i^{2m}t} + \\ + \int_0^t\int_0^l f\left(s, y, Q^N a(s), Q^N a(-s)\right) b_i(y) P_i(t,s)dyds, \quad t \in D_T, \quad (9)$$

где

$$P_i(t,s) = (n-1)!(t-s)^{n-1}\cdot e^{-\lambda_i^{2m}(t-s)}.$$

Для определения коэффициентов C_{ji} $(j = \overline{1,\, n})$ используем условия

$$a_i(0) = \varphi_{1i}, \quad a_i'(0) = \varphi_{2i}, \quad a_i''(0) = \varphi_{3i}, \quad \ldots, \quad a_i^{(n-1)}(0) = \varphi_{ni}.$$

При этом начальные данные φ_{ji} подбираются из условия (2) так, что суммы

$$\varphi_j^N(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ji} b_i(x), \quad j = \overline{1, n}$$

аппроксимируют при $N \to \infty$ функции $\varphi_j(x) \in L_p(D_l)$.

Тогда имеем

$$C_{1i} = \varphi_{1i}, \quad C_{2i} = \lambda_i^{2m}\varphi_{1i} + \varphi_{2i}, \quad C_{3i} = \frac{1}{2!}\left[\lambda_i^{4m}\varphi_{1i} + 2\lambda_i^{2m}\varphi_{2i} + \varphi_{3i}\right],$$

$$C_{4i} = \frac{1}{3!}\left[\lambda_i^{6m}\varphi_{1i} + 3\lambda_i^{4m}\varphi_{2i} + 3\lambda_i^{2m}\varphi_{3i} + \varphi_{4i}\right], \quad \cdots,$$

$$C_{ni} = \frac{1}{(n-1)!}\Big[\lambda_i^{2m(n-1)}\varphi_{1i} + (n-1)\lambda_i^{2m(n-2)}\varphi_{2i} + \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda_i^{2m(n-3)}\varphi_{3i} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda_i^{4m}\varphi_{(n-2)i} + \\ + (n-1)\lambda_i^{2m}\varphi_{(n-1)i} + \varphi_{ni}\Big].$$

Подставляя найденные значения C_{ji} в (9), получаем СНИУ (5).

4. Однозначная разрешимость СНИУ.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $\left|\int_0^t \left\|f\left(s, x, Q^N w(s), Q^N w(-s)\right)\right\|_{L_p(D_l)} ds\right| \leqslant \Delta < \infty$;

2) $f(t, x, u, \vartheta) \in \mathrm{Lip}\left\{h(t,x)\big|_{u,\vartheta}\right\}$, *где* $\int_0^t \|h(s,x)\|_{L_p(D_l)} ds < \infty$;

3) $\|w(t)\|_{B_p^N(T)} < \infty$.

Тогда СНИУ (5) *имеет единственное решение в пространстве* $B_p^N(T)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{aligned} &a_i^0(t) = w_i(t), \quad t \in D_T, \\ &a_i^{k+1}(t) = w_i(t) + \int_0^t \int_0^l f\big(s, y, Qa^k(s), Qa^k(-s)\big) b_i(y) \cdot P_i(t,s) dy ds, \\ &\qquad\qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad t \in D_T. \end{aligned} \tag{10}$$

В силу условий теоремы для разности $a_i^1(t) - a_i^0(t)$ из (10) получим

$$\|a^1(t) - a^0(t)\|_{B_p^N(T)} \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{N} \max_t \left|\int_0^t \int_0^l \left|f\left(s, x, Qa^0(s), Qa^0(-s)\right)\right| \cdot |b_i(y)| \cdot \left|\bar{P}_i(t,s)\right| dy ds\right| \leqslant \\ \leqslant M_1 M_2 \max_t \left|\int_0^t \int_0^l \left|f\left(s, x, Qa^0(s), Qa^0(-s)\right)\right| dx ds\right| \leqslant M_1 M_2 l^{1/q} \Delta, \tag{11}$$

где

$$M_1 = \|G(t,s)\|_{B_p^N\left(D_T^2\right)}, \quad M_2 = \|b(x)\|_{B_q^N(l)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Аналогично находим

$$\left\|a^1(-t) - a^0(-t)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant M_1 M_2 l^{1/q} \Delta. \tag{12}$$

В силу второго условия теоремы для разности $a_i^2(t) - a_i^1(t)$ из (10) имеем

$$\left\|a^2(t) - a^1(t)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant M_1 M_2 \max_t \int_0^t \int_0^l |f_1 - f_0| \, dyds.$$

Так как

$$\left|f\left(s,x,Qa^1(s),Qa^1(\delta(s,Qa^1(-s)))\right) - f\left(s,x,Qa^0(s),Qa^0(\delta(s,Qa^0(-s)))\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant h(s,x) \sum_{\nu=1}^N \left(\left|a_\nu^1(-s) - a_\nu^0(-s)\right| + \left|a_\nu^1(-s) - a_\nu^0(-s)\right|\right) |b_\nu(x)|,$$

из последнего неравенства с учётом (11) и (12) получим следующую оценку:

$$\left\|a^2(t) - a^1(t)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(M_1 M_2^3 l^{1/q}\right)^2 \Delta \max_t \left| \int_0^t \|h(s,x)\|_{L_p(D_l)} \, ds \right|, \quad (t,x) \in D. \tag{13}$$

Меняя в (13) t на $-t$, s на $-s$, получим

$$\left\|a^2(-t) - a^1(-t)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant$$
$$\leqslant M_1 M_2^2 \max_t \left| \int_0^t \int_0^l h(-s,y) \left(\left\|a^1(-s) - a^0(-s)\right\|_{B_p^N(T)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left\|a^1(s) - a^0(s)\right\|_{B_p^N(T)}\right) dyds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(M_1 l^{1/q}\right)^2 M_2^3 \Delta \max_t \left| \int_0^t \|h(-s,x)\|_{L_p(D_l)} \, ds \right|, \quad (t,x) \in D. \tag{14}$$

Пусть

$$\bar{h}(s,x) \equiv \frac{1}{2}\left[h(s,x) + h(-s,x)\right].$$

Тогда из (13) и (14) получим

$$\left\|U^2(t) - U^1(t)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(M_1 l^{1/q}\right)^2 M_2^3 \Delta \max_t \left| \int_0^t \left\|\bar{h}(s,x)\right\|_{L_p(D_l)} \, ds \right|, \quad (t,x) \in D,$$

где

$$\left\|U^k(t) - U^{k-1}(t)\right\|_{B_p^N(T)} \equiv$$
$$\equiv \max\left\{\left\|a^k(t) - a^{k-1}(t)\right\|_{B_p^N(T)}; \left\|a^k(-t) - a^{k-1}(-t)\right\|_{B_p^N(T)}\right\}.$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа k, аналогичным образом находим

$$\left\|U^{k+1}(t) - U^k(t)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(M_1 l^{1/q}\right)^{k+1} M_2^{2k+1} \frac{\Delta}{k!} \left[\max_t \left| \int_0^t \left\|\bar{h}(s,x)\right\|_{L_p(D_l)} ds \right|\right]^k. \quad (15)$$

Так как
$$\left\|a^{k+1}(t) - a^k(t)\right\|_{B_p^N(T)} \leqslant \left\|U^{k+1}(t) - U^k(t)\right\|_{B_p^N(T)},$$

из оценки (15) следует, что при $k \to \infty$ последовательность функций $\{a^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a(t) \in B_p^N(T)$. Отсюда следует существование решения СНИУ (5).

Покажем единственность решения в пространстве $B_p^N(T)$. Пусть СНИУ (5) имеет два решения: $a(t) \in B_p^N(T)$ и $\vartheta(t) \in B_p^N(T)$. Тогда для их разности получим

$$\|U(t) - V(t)\|_{B_p^N(T)} \leqslant$$
$$\leqslant M_1 M_2^2 l^{1/q} \max_t \left| \int_0^t \left\|\bar{h}(s,x)\right\|_{L_p(D_l)} \|U(s) - V(s)\|_{B_p^N(T)} ds \right|, \quad (16)$$

где
$$\|U(t) - V(t)\| \equiv \max\big\{\|a(t) - \vartheta(t)\|; \|a(-t) - \vartheta(-t)\|\big\}.$$

Применяя к (16) неравенство типа Гронуолла—Беллмана, получим

$$\|a(t) - \vartheta(t)\|_{B_p^N(T)} = 0$$

для всех $t \in D_T$. Отсюда следует единственность решения СНИУ (5) в пространстве $B_p^N(T)$. $\square$

5. Однозначная разрешимость смешанной задачи. Подставляя СНИУ (5) в предел (4), получим формальное решение смешанной задачи (1)–(3):

$$u(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Bigg[w_i(t) +$$
$$+ \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Q^N a(s), Q^N a(-s)\right) \cdot b_i(y) P_i(t,s) dy ds \Bigg] b_i(x). \quad (17)$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Если $a(t) \in B_p^N(T)$ является решением СНИУ (5), то предел (17) будет обобщённым решением смешанной задачи (1)–(3).*

Доказательство. Так как $a(t) \in B_p^N(T)$, из равенства

$$\lim_{N\to\infty} u^N(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\cdot b_i(x) = u(t,x)$$

в силу условий теоремы следует

$$\lim_{N\to\infty} f\left(t,x,u^N(t,x),u^N(-t,x)\right) = f(t,x,u(t,x),u(-t,x)) \tag{18}$$

в смысле метрики $L_p(D)$. Построим последовательность операторов:

$$\begin{aligned}
V_N(t) = \int_0^t\int_0^l \Big\{u^N(s,y)\Big[\frac{\partial^n}{\partial s^n}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial s^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m}}{\partial s^{n-2}\partial y^{2m+2}}\Phi + \\
+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-2}}{\partial s^2\partial y^{2nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{2nm-1}}{\partial s\partial y^{2nm-2}}\Phi + \frac{\partial^{2nm}}{\partial y^{2nm}}\Phi\Big] - \\
- f\left(s,y,u^N(s,y),u^N(-s,y)\right)\Phi(s,y)\Big\}dyds - \\
-\int_0^l \varphi_1^N(y)\Big[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m+2}}\Phi + \\
+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-3}}{\partial t\partial y^{2nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{2nm-2}}{\partial y^{2nm-2}}\Phi\Big]_{t=0}dy + \\
+\int_0^l \varphi_2^N(y)\Big[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m+2}}\Phi + \\
+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-5}}{\partial t\partial y^{2nm-6}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-4}}{\partial y^{2nm-4}}\Phi\Big]_{t=0}dy - \\
-\int_0^l \varphi_3^N(y)\Big[\frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-4}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-5}\partial y^{2m+2}}\Phi + \\
+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-6}}{\partial y^{2nm-6}}\Phi\Big]_{t=0}dy + \ldots + \\
+\int_0^l \varphi_{n-2}^N(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + n\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2m+2}}{\partial y^{2m+2}}\Phi\Big]_{t=0}dy - \\
-\int_0^l \varphi_{n-1}^N(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + n\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi\right]_{t=0}dy + \int_0^l \varphi_n^N[\Phi]_{t=0}dy.
\end{aligned} \tag{19}$$

Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (19) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_i(0)=\varphi_{1i},\quad a_i'(0)=\varphi_{2i},\quad a_i''(0)=\varphi_{3i},\quad \ldots,\quad a_i^{(n-1)}(0)=\varphi_{ni},$$

получаем

$$V_N(t) = \int_0^l\left(\varphi_1(y) - \sum_{i=1}^{N}\varphi_{1i}b_i(y)\right)\Big[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi + n\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{2m}}\Phi +$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m+2}}\Phi+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-3}}{\partial t\partial y^{2nm-4}}\Phi+n\frac{\partial^{2nm-2}}{\partial y^{2nm-2}}\Phi\Big]_{t=0}dy-$$

$$-\int_0^l\Big(\varphi_2(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{2i}b_i(y)\Big)\Big[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\Phi+n\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{2m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m+2}}\Phi+$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-5}}{\partial t\partial y^{2nm-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2nm-4}}{\partial y^{2nm-4}}\Phi\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\Big(\varphi_3(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{3i}b_i(y)\Big)\Big[\frac{\partial^{n-3}}{\partial t^{n-3}}\Phi+n\frac{\partial^{n+2m-4}}{\partial t^{n-4}\partial y^{2m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+2m-3}}{\partial t^{n-5}\partial y^{2m+2}}\Phi+$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{2nm-6}}{\partial y^{2nm-6}}\Phi\Big]_{t=0}dy-\ldots-$$

$$-\int_0^l\Big(\varphi_{n-2}(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{(n-2)i}b_i(y)\Big)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+n\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{2m+2}}{\partial y^{2m+2}}\Phi\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\Big(\varphi_{n-1}(y)-\sum_{i=1}^k\varphi_{(n-1)i}b_i(y)\Big)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi\Big]_{t=0}dy-$$

$$-\int_0^l\Big(\varphi_n(y)-\sum_{i=1}^N\varphi_{ni}b_i(y)\Big)\big[\Phi(t,y)\big]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\Phi(s,y)\Big[f\left(s,y,u(s,y),u(-s,y)\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^N\int_0^l f\left(s,z,u^N(s,z),u^N(-s,z)\right)\cdot b_i(z)dz\Big]b_i(y)dydt. \quad (20)$$

Очевидно, что первые n интегралов в (20) стремятся к нулю при $N\to\infty$, так как $\varphi_j(x)\in L_p(D_l)$, $j=\overline{1,n}$. Сходимость последней разности в (20) при $N\to\infty$ следует из (18). Отсюда заключаем, что $\lim_{N\to\infty}V_N(t)=0$. Это и доказывает теорему. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили*, “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды” // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103. [*D. G. Gordeziani, G. A. Avalishvili*, “On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations” // *Matem. Mod.*, 2000. Vol. 12, no. 1. Pp. 94–103].
2. *В. Б. Дмитриев*, “Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2006. № 2(42). С. 15–27. [*V. B. Dmitriev*, “A nonlocal problem with integral conditions for the wave equation” // *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. Ser.*, 2006. no. 2(42). Pp. 15–27].
3. *Л. С. Пулькина*, “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения” // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 3. С. 435–445; англ. пер.: *L. S. Pul'kina*, “A mixed problem with integral condition for the hyperbolic equation” // *Math. Notes*, 2003. Vol. 74, no. 3. Pp. 411–421.
4. *Т. К. Юлдашев*, “Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе” // *Ж. вычисл.*

матем. и матем. физ., 2011. Т. 51, № 9. С. 1703–1711; англ. пер.: *T. K. Yuldashev*, “Mixed value problem for nonlinear differential equation of fourth order with small parameter on the parabolic operator” // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011. Vol. 51, no. 9. Pp. 1596–1604.

5. *Т. К. Юлдашев*, “Смешанная задача для нелинейного интегродифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012. Т. 52, № 1. С. 112–123; англ. пер.: *T. K. Yuldashev*, “Mixed value problem for nonlinear integro-differential equation with parabolic operator of higher power” // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012. Vol. 52, no. 1. Pp. 105–116.

Поступила в редакцию 20/I/2012;
в окончательном варианте — 21/III/2012.

MSC: 35K25

ON SOLVABILITY OF A MIXED VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF HIGHER ORDER

T. K. Yuldashev

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
31, pr. “Krasnoyarski Rabochiy”, Krasnoyarsk, 660014, Russia.

E-mail: `tursunbay@rambler.ru`

The questions of one valued generalized solvability of mixed value problem for nonlinear partial differential equation with the parabolic operator of arbitrary natural power are studied. The separation of variables is used.

Keywords: *nonlinear equation, parabolic operator of the higher power, generalized solvability.*

Original article submitted 20/I/2012;
revision submitted 21/III/2012.

Tursun K. Yuldashev (Ph. D. Phys. & Math.), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.