УДК 517.968.72:517.589

ДВЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ТИПА ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ МИТТАГ—ЛЕФФЛЕРА В РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ И КОБЕРА

Е. Н. Огородников

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: eugen.ogo@gmail.com

Рассмотрены две специальные функции типа обобщённой функции Миттаг—Леффлера. Первая является модификацией функции, введённой А. А. Килбасом и М. Сайго, вторая — её специальным случаем. Приведены решения интегрального уравнения с оператором Кобера и правой частью в виде обобщённого степенного ряда. Рассмотрен специальный случай значений одного из параметров интегрального уравнения. Доказана теорема существования и единственности решений, которые удаётся найти в явном виде в терминах введённых специальных функций Исследуется корректность постановок начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с производными Римана—Лиувилля и Кобера. Решения задач типа Коши находятся в специальных классах функций с суммируемой дробной производной путём редукции к рассмотренным ранее интегральным уравнениям и также записываются в явном виде в терминах указанных специальных функций. Обоснована возможность замены начальных условий типа Коши видоизменёнными (весовыми) условиями Коши. Рассмотрены частные случаи значений параметров дифференциальных уравнений, при которых задачи с условиями типа Коши могут оказаться некорректно поставленными в смысле потери единственности решения. В этом случае удаётся найти единственное решение задач с весовыми условиями Коши. Отмечено, что весовая задача Коши позволяет расширить область допустимых значений параметров дифференциальных уравнений на случай, когда дробная производная искомой функции имеет несуммируемую особенность в нуле.

Ключевые слова: *специальные функции, функции типа Миттаг—Леффлера, дробное исчисление, интегро-дифференциальные операторы Римана—Лиувилля и Кобера, дробные дифференциальные и интегральные уравнения, задачи типа Коши.*

Введение. В работе [1] рассмотрена специальная функция

$$\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)=\Gamma\binom{\mu}{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\binom{k\rho+\nu}{k\rho+\mu}z^n, \tag{1}$$

где $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция Эйлера, $\Gamma\binom{\mu}{\nu}=\Gamma(\mu)/\Gamma(\nu)$; z, μ, $\nu\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\rho>0$; $k\rho+\nu\notin\mathbb{Z}_0^-$, $k\in\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,\dots,-n,\dots\}$, $n\in\mathbb{N}$. Она является модификацией известной обобщённой функции типа Миттаг—Леффлера, введённой А. А. Килбасом и М. Сайго в [2],

$$E_{\alpha,m,l}(z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\quad c_0=1,\quad c_n=\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\binom{\alpha(km+l)+1}{\alpha(km+l+1)+1},$$

Евгений Николаевич Огородников (к.ф.-м.н.), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

где α, $l \in \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $m > 0$; $\alpha(km+l) \notin \mathbb{Z}^-$, $k \in \mathbb{N}_0$; $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}_0^- \backslash \{0\}$. Свойства этой специальной функции изучались в работах [3–5]. Её определение и некоторые основные факты можно найти в монографии [6].

Другая специальная функция

$$\mathcal{E}_\rho(z;\mu) = \Gamma(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \Gamma\binom{k\rho+1}{k\rho+\mu} \frac{z^n}{n!} \tag{2}$$

возникла в работе [7] при решении начально-краевой задачи для вырождающегося уравнения аномальной (дробной) диффузии, записанного в терминах производной Кобера—Эрдейи.

В работе [8] показано, что

$$\mathcal{E}_\rho(z;\mu) = \lim_{\nu\to 0} \mathcal{E}_\rho(\rho z;\nu,\mu) = \mathcal{E}_\rho(\rho z;0,\mu),$$

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \mathcal{E}_{\alpha m}\big(z;\alpha(l-m)+1, \alpha(l-m+1)+1\big);$$

обоснована абсолютная сходимость рядов (1) и (2) на комплексной плоскости, приведены выражения ряда элементарных и некоторых специальных функций через функции (1) и (2). Там же рассмотрено интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda x^\beta I_{0x}^\alpha x^\eta y(x) = f(x) \tag{3}$$

с правой частью $f(x) = kx^{\sigma-1}$ ($k = \mathrm{const}$) и левосторонним интегралом Римана—Лиувилля $I_{0x}^\alpha f \equiv (I_{0+}^\alpha f)(x)$ порядка $\alpha > 0$ [9] при β, η, $\sigma \in \mathbb{R}$. Его решение при $\alpha+\beta \neq \sigma$, $\eta+\sigma > 0$ найдено в виде

$$y(x) = kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu,\mu),$$

где $\rho = \alpha+\beta+\eta$, $\mu = \sigma-\beta$, $\nu = \sigma-\alpha-\beta$, а в случае $\alpha+\beta = \sigma$ оно записывается так:

$$y(x) = kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_{\eta+\sigma}\Big(\frac{\lambda x^{\eta+\sigma}}{\eta+\sigma};\alpha\Big).$$

В работе [8] рассмотрены некоторые частные и специальные значения параметров α, β, η, ρ в интегральном уравнении (3). Приведены формулы дробного интегро-дифференцирования функции (1) в смысле Римана—Лиувилля и Кобера. В настоящей работе продолжены исследования, начатые в [8].

1. Функции $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ и $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ в решениях интегральных уравнений с операторами Кобера. Интегро-дифференциальный оператор Кобера на конечном отрезке $[a,b]$ определяется как модификация левостороннего оператора типа Эрдейи—Кобера при $\sigma = 1$ [9] с помощью равенства

$$I_{ax;\eta}^\alpha f \equiv D_{ax;\eta}^{-\alpha} f = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{(x-a)^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{(t-a)^\eta f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, & \mathrm{Re}\,\alpha > 0; \\ (x-a)^{-\alpha-\eta}\Big(\dfrac{d}{dx}\Big)^n (x-a)^{n+\alpha+\eta} I_{ax;\eta}^{n+\alpha} f, & \mathrm{Re}\,\alpha \leqslant 0, \end{array}\right.$$

где $n = [-\mathrm{Re}\alpha]+1$, $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Свойства этого оператора легко следуют из свойств дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля в силу равенств

$$I_{ax;\eta}^\alpha f = (x-a)^{-\alpha-\eta} I_{ax}^\alpha (x-a)^\eta f(x), \tag{4}$$

$$D^{\beta}_{ax;\eta}f=(x-a)^{\beta-\eta}D^{\beta}_{ax}(x-a)^{\eta}f(x), \tag{5}$$

где $D^{\beta}_{ax}f=(d/dx)^n I^{n-\beta}_{ax}f$ ($n=[\mathrm{Re}\beta]+1$) — левосторонняя производная Римана—Лиувилля порядка β [9]. Отметим, что интегральный оператор в (4) определён на функциях $(x-a)^{\eta}f(x)\in L(a,b)$, а дифференциальный оператор в (5) — на таких функциях, для которых $I^{n-\beta}_{ax}(x-a)^{\eta}f(x)\in AC^n[a,b]$.

Интегральное уравнение (3) можно записать в терминах оператора Кобера (4) следующим образом:

$$y(x)-kx^{\rho}I^{\alpha}_{0x;\eta}y=f(x). \tag{6}$$

Нетрудно найти явный вид решений уравнения (6) для аналитических правых частей или в более общем случае, когда функция $f(x)$ представима обобщенным степенным рядом.

Теорема 1. *Пусть в интегральном уравнении* (6) $\mathrm{Re}\alpha>0$; $f(x)=x^{\sigma-1}\times\times\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x^{\gamma})^m$; $\mathrm{Re}\sigma,\mathrm{Re}\gamma>0$. *Тогда в случае* $\mathrm{Re}\rho>0$ *его решение может быть записано в виде*

$$y(x)=f(x)+x^{\sigma-1}\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x^{\gamma})^m\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x^{\rho})^n\prod_{k=1}^{n}\Gamma\binom{k\rho+\nu m}{k\rho+\mu m}, \tag{7}$$

где $\nu_m=\gamma m+\sigma+\eta-\rho$, $\mu_m=\gamma m+\sigma+\eta+\alpha-\rho$, *а в случае* $\rho=0$ *и* $|\lambda|<\lambda_0$, *где* $\lambda_0=\min_{m\in\mathbb{N}}|\Gamma\binom{\gamma m+\sigma+\eta+\alpha}{\gamma m+\sigma+\eta}|$, *в виде*

$$y(x)=x^{\sigma-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m\Gamma(\gamma m+\sigma+\eta+\alpha)(x^{\gamma})^m}{\Gamma(\gamma m+\sigma+\eta+\alpha)-\lambda\Gamma(\gamma m+\sigma+\eta)}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть в интегральном уравнении (6) $\mathrm{Re}\rho>0$. Запишем $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{\sigma_m-1}$, где $\sigma_m=\gamma m+\sigma$, и используем тот же метод, что и в теореме 1 работы [8]. Тогда решение уравнения (6) находится сразу в терминах функции (1):

$$y(x)=(I-\lambda x^{\rho}I^{\alpha}_{0x;\eta})^{-1}f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{\sigma_m-1}\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho};\nu_m,\mu_m). \tag{9}$$

Записывая функцию $\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho};\nu_m,\mu_m)$ в (9), по определению (1) получим представление решения в виде (7). Обоснование существования решения сводится к его подстановке в левую часть уравнения (6), где следует воспользоваться тождеством (42) из работы [8] в следующей редакции:

$$I^{\alpha}_{0x,\eta}x^{\sigma_m-1}\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho};\sigma_m+\nu-\rho,\sigma_m+\nu+\alpha-\rho)=$$
$$=\Gamma\binom{\sigma_m+\nu}{\sigma_m+\nu+\alpha}x^{\sigma_m-1}\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho};\sigma_m+\nu,\sigma_m+\nu+\alpha)$$

и леммой 2 (см.формулу (19) в [8]) в такой редакции:

$$\Gamma\binom{\nu_1}{\mu_1}\lambda x^{\rho}\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho};\nu_1,\mu_1)=\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho};\nu_1-\rho,\mu_1-\rho)-1.$$

Тогда

$$y(x) - \lambda x^{\rho} I^{\alpha}_{0x;\eta} y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\sigma_m - 1} \mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho}; \sigma_m + \nu - \rho, \sigma_m + \eta + \alpha - \rho) - \lambda x^{\rho},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} I^{\alpha}_{0x;\eta} x^{\sigma_m - 1} \mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho}; \sigma_m + \nu - \rho, \sigma_m + \eta + \alpha - \rho) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\sigma_m - 1} \mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho}; \sigma_m + \nu - \rho, \sigma_m + \eta + \alpha - \rho) -$$

$$- \lambda x^{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \Gamma\binom{\sigma_m + \eta}{\sigma_m + \eta + \alpha} x^{\sigma_m - 1} \mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho}; \sigma_m + \nu, \sigma_m + \eta + \alpha) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\sigma_m - 1} \mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho}; \sigma_m + \nu - \rho, \sigma_m + \eta + \alpha - \rho) -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\sigma_m - 1} \big[\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho}; \sigma_m + \nu - \rho, \sigma_m + \eta + \alpha - \rho) - 1\big] = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\sigma_m - 1} =$$

$$= x^{\sigma_m - 1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x^{\gamma})^m = f(x),$$

что доказывает справедливость найденного решения. Единственность этого решения обосновывается такими же рассуждениями, что и в теореме 1 работы [8].

В случае $\rho = 0$ решение интегрального уравнения (6) может быть получено из формулы (9) с использованием тождества (12) из работы [8] с аргументом $z = \lambda x^{\rho}$ при $\rho = 0$:

$$\mathcal{E}_0(\lambda; \nu_m, \mu_m) = \frac{\Gamma(\mu_m)}{\Gamma(\mu_m) - \lambda \Gamma(\nu_m)}, \quad \text{если} \quad |\lambda| < \left|\Gamma\binom{\mu_m}{\nu_m}\right| \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Тогда

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\sigma - 1} \mathcal{E}_0(\lambda; \nu_m, \mu_m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m \Gamma(\sigma_m + \nu + \alpha) x^{\sigma_m - 1}}{\Gamma(\sigma_m + \nu + \alpha) - \lambda \Gamma(\sigma_m + \nu)},$$

откуда следует (8) при $\sigma_m = \gamma m + \sigma$ и $|\lambda| < \min\limits_{m \in \mathbb{N}_0} |\Gamma\binom{\gamma m + \sigma + \eta + \alpha}{\gamma m + \sigma + \eta}|$. Последнее неравенство — необходимое условие сходимости рядов $\mathcal{E}_0(\lambda; \nu_m, \mu_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$.

Решению (8) с учётом обозначения $\lambda = \lambda_1 \Gamma(\alpha)$ можно придать вид

$$y(x) = x^{\sigma_m - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m (x^{\gamma})^m}{1 - \lambda_1 B(\alpha, \gamma m + \sigma + \eta)},$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция [17], причём произвол выбора значений параметра λ_1 ограничен условием $|\lambda_1 B(\alpha, \gamma m + \sigma + \eta)| < 1$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. □

Замечание. Решения интегрального уравнения (6) для $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ легко получить из (7) и (8), положив в этих равенствах $\sigma = \gamma = 1$.

2. Функции $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ и $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ в решениях дифференциальных уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля и Кобера.

В монографии [6] приведён пример линейного однородного дифференциального уравнения с производной Римана—Лиувилля D^{α}_{ax} порядка $\alpha > 0$:

$$D^{\alpha}_{ax} y(x) - \lambda (x-a)^{\eta} y(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (a < x \leqslant b), \tag{10}$$

для которого найдено решение задачи типа Коши

$$D^{\alpha-k}_{a+} y(a+) = \lim_{x \to a+} D^{\alpha-k}_{ax} y(x) = b_k \quad (b_k \in \mathbb{R}; \;\; k = 1, \ldots, n = [\alpha] + 1) \tag{11}$$

при условии $\eta > n - \alpha$ в терминах функции (11). Отмечено (см. [6, Remark 4.5, page 227]), что это решение единственно в пространствах $C^{\alpha}_{n-\alpha,\gamma}[a,b]$ и $L^{\alpha}(a,b)$, когда $\eta \geqslant 0$, а вопрос единственности решения в случае $-\{\alpha\} < \eta < 0$, где $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть числа α, остается открытым.

В действительности существование единственного решения задачи типа Коши (10), (11) для $\eta \in (-\{\alpha\}, +\infty)$ обеспечено возможностью применения обобщённого принципа сжимающих отображений и единственностью неподвижной точки этого отображения [11–13].

Без ограничения общности положим $a = 0$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда решение задачи типа Коши

$$D^{\alpha}_{0x} y - \lambda x^{\eta} y = 0 \quad (\eta > -\alpha), \tag{12}$$

$$D^{\alpha-1}_{0x} y(0+) = \lim_{x \to 0+} I^{1-\alpha}_{0x} y = b \quad (b \in \mathbb{R}) \tag{13}$$

имеет вид

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathcal{E}_{\alpha+\eta}(\lambda x^{\alpha+\eta}; 0, \alpha) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathcal{E}_{\alpha+\eta}\left(\frac{\lambda x^{\alpha+\eta}}{\alpha+\eta}; \alpha\right). \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\eta > -\alpha$. Тогда задача типа Коши* (12)–(13) *имеет единственное решение $y(x) \in C_{1-\alpha}[0,b]$ в виде* (14).

Доказательство. Решением начальной задачи на отрезке $[a,b]$ для изучаемого дифференциального уравнения считается любая суммируемая функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям и обращающая уравнение в тождество почти всюду на указанном отрезке. Будем искать решение в классе функций $L^{\alpha}(a,b)$, имеющих суммируемую производную порядка α, который определяется как множество [14]

$$L^{\alpha}(a,b) = \{f(x) : f(x) \in L(a,b), \quad I^{n-\alpha}_{ax} f \in AC^{n}[a,b], \quad n = [\mathrm{Re}\alpha] + 1\}.$$

Применяя к левой и правой частям равенства (12) аналог формулы Ньютона—Лейбница [6, 9]

$$I^{\alpha}_{0x} D^{\alpha}_{0x} y = y(x) - \frac{y_{1-\alpha}(0+)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1},$$

где $y_{1-\alpha}(0+) = \lim_{x\to 0+} I_{0x}^{1-\alpha} y = b$ в силу условия (13), получим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha} x^{\eta} y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}, \tag{15}$$

решением которого (по теореме 1 [8]) является функция (14).

Таким образом, если задача (12), (13) имеет решение в классе функций $L^{\alpha}(0,b)$, то это решение удовлетворяет интегральному уравнению (15), имеет вид (14) и по теореме 1 единственно.

Непосредственной подстановкой решения (14) убеждаемся, что оно удовлетворяет дифференциальному уравнению (12) и начальному условию (13), что и доказывает теорему 2. □

Замечание 1. Нужно отметить, что наличие явного решения интегрального уравнения, соответствующего рассматриваемой начальной задаче, избавляет от необходимости обосновывать их эквивалентность. Как показано в работе [14] на простом примере, формальная редукция задачи типа Коши для линейного дифференциального уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля в классе функций $L^{\alpha}(a,b)$ может привести к интегральному уравнению, суммируемое решение которого удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению, но, обладая несуммируемой производной, не подчиняется заданному начальному условию и, следовательно, редукция не являлась эквивалентной.

Замечание 2. Явный вид решения (14) задачи (12), (13)

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathcal{E}_{\alpha+\eta}\left(\frac{\lambda x^{\alpha+\eta}}{\alpha+\eta}; \alpha\right) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\left[1 + \frac{\Gamma(\alpha+\eta)}{\Gamma(2\alpha+\eta)} \lambda x^{\alpha+\eta} + \ldots\right]$$

подсказывает, что начальное условие (13) можно заменить весовым условием (видоизмененным условием Коши [13])

$$\lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha} y(x) = c, \quad c = \mathrm{const}.$$

Рассмотрим теперь предельное значение параметра η, положив в дифференциальном уравнении (12) $\eta = -\alpha$.

Можно показать, что интегральное уравнение (15) в этом случае неразрешимо в пространстве $C_{\gamma}[0,1]$, $\gamma \in (0,1)$, если $b \neq 0$. Таким образом, требование однородности начального условия (13) становится необходимым условием разрешимости (15), а значит, и начальной задачи для дифференциального уравнения (12) [12].

Однако интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha} x^{-\alpha} y(x) = 0,$$

получающееся из (15) при $\eta = -\alpha$ и $b = 0$, помимо тривиального решения будет иметь бесчисленное множество решений, зависящих от λ, и, следовательно, однородная задача типа Коши (12), (13) при $\eta = -\alpha$ поставлена некорректно.

Здесь уместно отметить, что интегральные уравнения Вольтерра третьего рода с однородным ядром степени (-1) были объектом исследования многих авторов [12, 13, 15], поэтому приведём сразу окончательный результат.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} y = \lambda x^{-\alpha} y \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{16}$$

вместе с видоизмененным условием Коши

$$\lim_{x\to 0+} x^{-\beta} y = b. \tag{17}$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\beta > -1$, *где* β *— корень трансцендентного уравнения*

$$\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{18}$$

Тогда существует единственное решение задачи (16), (17)

$$y = bx^{\beta}. \tag{19}$$

Существование решения устанавливается непосредственной подстановкой (19) в (16) и (17). Единственность следует из результатов, полученных А. М. Нахушевым в работе [12]. Пример вырождающегося дифференциального уравнения дробного порядка, аналогичного (16), рассмотрен в монографии [13].

Замечание 1. Утверждение теоремы сохраняет свою силу при $\beta = \alpha - 1$, если условие (18) доопределить по непрерывности равенством

$$\lambda = \lim_{\beta\to\alpha-1} \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} = 0.$$

Очевидно, $y = bx^{\alpha-1}$ будет единственным решением уравнения $D_{0x}^{\alpha} y = 0$, удовлетворяющим условию $\lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha} y = b \neq 0$.

Замечание 2. Отметим, что равенство $\beta = \alpha - 1$ разбивает область допустимых значений параметров $\{0 < \alpha < 1,\ -1 < \beta < +\infty\}$ на две подобласти: $\{0 < \alpha < 1,\ \alpha - 1 \leqslant \beta < +\infty\}$, где $D_{0x}^{\alpha} y$, $x^{\alpha} y \in L(0,b)$, и $\{0 < \alpha < 1,\ -1 < \beta < \alpha - 1\}$, в которой $D_{0x}^{\alpha} y$, $x^{\alpha} y \notin L(0,b)$.

Замечание 3. Утверждение теоремы остаётся в силе при $\alpha = 1$. Действительно, из уравнения (18) следует, что $\beta = \lambda$. Нетрудно убедится, что $y = bx^{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, является единственным решением обыкновенного дифференциального уравнения $y' = \lambda \frac{y}{x}$ с начальным условием $\lim_{x\to 0+} x^{-\lambda} y = b \neq 0$ при любом λ.

Приведём пример постановки и решения начальной задачи типа Коши для дифференциального уравнения с производной Кобера. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$D_{0x;\eta}^{\alpha} y - \lambda x^{\beta} y = 0 \quad (x > 0) \tag{20}$$

вместе с начальным условием

$$\lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha+\eta} D_{0x;\eta}^{\alpha-1} y = b \quad (b \in \mathbb{R}) \tag{21}$$

при $\alpha \in (0,1)$. На параметры $\eta, \beta \in \mathbb{R}$ пока никаких ограничений не накладывается. Решение будем искать в классе функций

$$L_\eta^\alpha(a,b) = \{f(x) : (x-a)^\eta f(x) \in L(a,b),\ I_{ax}^{n-\alpha}(x-a)^\eta f(x) \in AC^n[a,b]\}$$

при $a = 0$, $\alpha \in (0,1)$, $n = 1$, обеспечивающем суммируемость производной $D_{0x}^\alpha x^\eta y(x)$ на отрезке $[0,b]$.

Пусть существует функция $y(x) \in L_\eta^\alpha(0,b)$, обращающая равенство (20) в тождество почти всюду на $[0,b]$. Применим к левой и правой частям тождества (20) оператор $I_{0x;\eta-\alpha}^\alpha$ и воспользуемся свойством (см. формулу (39) из [8] при $\mu = \eta$, $\alpha = \mu - \nu$, $\nu = \eta - \alpha$ и $a = 0$) операторов Кобера

$$I_{0x;\eta-\alpha}^\alpha D_{0x}^\alpha y = y(x) - \frac{x^{\alpha-\eta-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha+\eta} D_{0x;\eta}^{\alpha-1} y.$$

С учётом начального условия (21) получим интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda I_{0x;\eta-\alpha}^\alpha x^\beta y = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-\eta-1}. \tag{22}$$

По определению интегрального оператора Кобера (15) относительно новой функции $\varphi(x) = x^\eta y(x)$ приходим к интегральному уравнению с оператором Римана—Лиувилля

$$\varphi(x) - \lambda I_{0x}^\alpha x^{\beta-\alpha} \varphi(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}.$$

Его решение

$$\varphi(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathcal{E}_\beta(\lambda x^\beta; 0, \alpha) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathcal{E}_\beta\Big(\frac{\lambda x^\beta}{\beta}; \alpha\Big).$$

Тогда решение интегрального уравнения (22), а значит, и решение задачи (20), (21), если оно существует, записывается так:

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-\eta-1} \mathcal{E}_\beta\Big(\frac{\lambda x^\beta}{\beta}; \alpha\Big). \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда задача типа Коши* (20), (21) *имеет единственное решение* $y(x) \in C_{1+\eta-\alpha}[0,b]$ *в виде* (23).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2. Отметим только, что решение (23) может оказаться несуммируемым на $[0,b]$, если $\alpha - \eta \leqslant 0$. Однако $x^\eta y(x) \in L(0,b)$ при $\alpha > 0$, что хорошо видно из представления решения (23) в форме ряда и равенства

$$x^\eta y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathcal{E}_\beta\Big(\frac{\lambda x^\beta}{\beta}; \alpha\Big) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \left[1 + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} \lambda x^\beta + \ldots\right].$$

Из (23) также ясно, что $y(x) \in C_{1+\eta-\alpha}[a,b]$.

Замечание 1. Отметим один частный случай значения параметров в дифференциальном уравнении (20). Если $\beta = \alpha$, то относительно функции $\varphi(x) = x^\eta y(x)$ начальная задача (20), (21) становится задачей типа Коши для однородного уравнения Барретта. Её решение хорошо известно [13, 16]. Это же решение немедленно получается из (23) по формуле (9) из работы [8]:

$$y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-\eta-1}\mathcal{E}_\alpha\Big(\frac{\lambda x^\alpha}{\alpha};\alpha\Big) = bx^{\alpha-\eta-1}E_\alpha(\lambda x^\alpha;\alpha) = bx^{-\eta}\mathrm{Exp}(\alpha,\alpha;\lambda;x),$$

где $E_\alpha(z;\mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера [17, 18], $\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;x) = x^{\mu-1}E_\alpha(\lambda x^\alpha;\mu)$ — обобщенная дробная экспоненциальная функция [19, 20].

Замечание 2. Нелокальное начальное условие типа Коши можно заменить локальным, видоизменённым условием Коши

$$\lim_{x\to 0+} x^{1+\eta-\alpha}y(x) = c \quad (c = \mathrm{const}).$$

Решение начальной задачи с таким условием будет определяться формулой (23), где следует положить $b = c\Gamma(\alpha)$.

Замечание 3. Случай $\beta = 0$ является особым. Дифференциальное уравнение (20) относительно функции $\varphi(x) = x^\eta y(x)$ приводится к уравнению (16), для которого справедлива теорема 3. Перефразируя её применительно к случаю $\beta = 0$, получим такой результат.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\gamma - \eta > 0$ $(\gamma,\eta \in \mathbb{R})$; γ — *корень трансцендентного уравнения* $\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. *Тогда существует единственное решение* $y(x) = bx^{\gamma-\eta}$ *дифференциального уравнения* (20) *при* $\beta = 0$ *с локальным начальным условием* $\lim_{x\to 0+} x^{\eta-\gamma}y = b$.

Заключение. Все параметры дифференциальных уравнений в последнем пункте полагались действительными числами. Не представляет особых трудностей расширить множество их значений на поле комплексных чисел.

С небольшими дополнениями и уточнениями все результаты переносятся и на случай $\mathrm{Re}\alpha \in (n-1,n)$, $n \in \mathbb{N}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Огородников Е. Н.* О двух специальных функциях, обобщающих функцию типа Миттаг—Леффлера, их свойства и применение / В сб.: *Вторая международная конференция «Математическая физика и её приложения»*: Материалы международной конф. (Самара, 29 августа – 4 сентября, 2010 г.). Самара: Книга, 2010. С. 248–249. [*Ogorodnikov E. N.* On two special functions that generalize the Mittag–Leffler type function, their properties and applications / In: *The Second International Conference "Mathematical Physics and Its Applications"*: Proc. of International Conf. (Samara, August 27 – September 2, 2012.). Samara: Kniga, 2010. Pp. 248–249].
2. *Kilbas A. A., Saigo M.* On solution of integral equation of Abel–Volterra type // *Diff. Integr. Equat.*, 1995. Vol. 8, no. 5. Pp. 547–576.
3. *Kilbas A. A., Saigo M.* On Mittag–Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations // *Integral Transform. Spec. Funct.*, 1996. Vol. 4, no. 4. Pp. 335–370.
4. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Rogozin S. V.* On the generalized Mittag–Leffler type function // *Integral Transform. Spec. Funct.*, 1998. Vol. 7, no. 3–4. Pp. 215–224.

5. *Горенфло Р., Килбас А. А., Рогозин С. В.* О свойствах обобщённой функции Миттаг—Леффлера // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*, 1998. Т. 42, № 5. С. 34–39. [*Gorenflo R., Kilbas A. A., Rogozin S. V.* On the properties of a generalized Mittag–Leffler type function // *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 1998. Vol. 42, no. 5. Pp. 34–39].
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies, 204; ed. J. van Mill. Amsterdam: Elsevier, 2006. Pp. 523.
7. *Огородников Е. Н.* Нелокальные краевые задачи для одного модельного параболо-гиперболического уравнения с дробной производной / В сб.: *Труды четвёртой Всероссийской научной конференции с международным участием* (29–31 мая 2007 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2007. С. 147–152. [*Ogorodnikov E. N.* A nonlocal boundary value problems for one model parabolic-hyperbolic equation with fractional derivative / In: *Proceedings of the Fourth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2007). Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2007. Pp. 147–152].
8. *Огородников Е. Н.* О двух специальных функциях, обобщающих функцию типа Миттаг—Лиффлера, их свойства и применении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 52–65. [*Ogorodnikov E. N.* On two special functions, generalizing the Mittag–Laffler type function, their properties and applications // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 1(26). Pp. 52–65].
9. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
10. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин А. Н.* Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с. [*Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1976. 543 pp.]
12. *Нахушев А. М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // *Дифференц. уравнения*, 1974. Т. 1, № 10. С. 100–111. [*Nakhushev A. M.* Inverse problems for degenerating equations and Volterra integral equations of the third kind // *Differents. Uravneniya*. Vol. 10, no. 1. Pp. 100–111].
13. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с. [*Nakhushev A. M.* Fractional Calculus and its Applications. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 pp.]
14. *Огородников Е. Н.* Некоторые аспекты теории начальных задач для дифференциальных уравнений с производными Римана-Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(21). С. 10–23. [*Ogorodnikov E. N.* Some Aspects of Initial Value Problems Theory for Differential Equations with Riemann–Liouville Derivatives // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(21). Pp. 10–23].
15. *Михайлов Л. Г.* Интегральное уравнение с ядром, однородным степени −1. Душанбе: Дониш, 1966. 50 с.; *Mikhailov L. G.* Integral Equations with Kernels Homogeneous of Degree −1. Dushanbe: Donish, 1966. 50 pp.
16. *Barrett I. N.* Differential equations of non-integer oder // *Canad. J. Math*, 1954. Vol. 6, no. 4. Pp. 529–541.
17. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. III / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1955. 292 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1973. 299 с.

18. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [*Dzhrbashyan M. M.* Integral transforms and representations of functions in complex domain. Moscow: Nauka, 1966. 672 pp.]
19. *Огородников Е. Н.* О задаче Коши для модельных дифференциальных уравнений дробных осцилляторов / В сб.: *Современные проблемы вычисл. мат. и мат. физики.* М.: ВМК МГУ; Макс Пресс, 2009. С. 229–231. [*Ogorodnikov E. N.* On the Cauchy problem for the model differential equations of fractional oscillator / In: *Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics.* Moscow: VMK MGU; Maks Press, 2009. Pp. 229–231].
20. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 276–279. [*Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S.* Some special functions in the solution to Cauchy problem for a fractional oscillating equation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 1(18). Pp. 276–279].

Поступила в редакцию 02/V/2012;
в окончательном варианте — 13/VI/2012.

MSC: 33E12; 26A33, 34K37

TWO SPECIAL FUNCTIONS, GENERALIZING THE MITTAG–LEFFLER TYPE FUNCTION, IN SOLUTIONS OF INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RIEMANN-LIOUVILLE AND KOBER OPERATORS

E. N. Ogorodnikov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
E-mail: eugen.ogo@gmail.com

Two special functions, concerning Mittag–Leffler type functions, are considered. The first is the modification of generalized Mittag–Leffler type function, introduced by A. A. Kilbas and M. Saigo; the second is the special case of the first one. The solutions of the integral equation with the Kober operator and the generalized power series as the free term are presented. The existence and uniqueness of these solutions are proved. The explicit solutions of the integral equations above are found out in terms of introduced special functions. The correctness of initial value problems for linear homogeneous differential equations with Riemann–Liouville and Kober fractional derivatives is investigated. The solutions of the Cauchy type problems are found out in the special classes of functions with summable fractional derivative via the reduction to the considered above integral equation and also are written in the explicit form in terms of the introduced special functions. The replacement of the Cauchy type initial values to the modified (weight) Cauchy conditions is substantiated. The particular cases of parameters in the differential equations when the Cauchy type problems are not well-posed in sense of the uniqueness of solutions are considered. In these cases the unique solutions of the Cauchy weight problems are existed. It is noted in this paper that the weight Cauchy problems allow to expand the acceptable region of the parameters values in the differential equations to the case when the fractional derivative has the nonsummable singularity in zero.

Key words: *special functions, Mittag–Leffler type function, fractional calculus, Riemann–Liouville integral and differential operators, fractional differential and integral equations, Cauchy type problems.*

Original article submitted 02/V/2012;
revision submitted 13/VI/2012.

Eugeniy N. Ogorodnikov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.