УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРОМ М. САЙГО В КРАЕВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. В. Тарасенко

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: tarasenko.a.v@mail.ru

Доказано существование единственного решения неклассической краевой задачи для уравнения теплопроводности, нагруженного значением искомой функции $u(x,y)$ на границе $x=0$ прямоугольной области $\Omega=\{(x,t):0<x<l, 0<t<T\}$. Одно из краевых условий исследуемой задачи содержит обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго. Используя свойства функции Грина смешанной краевой задачи и указанное краевое условие, можно свести задачу к интегральному уравнению вольтерровского типа относительно следа искомой функции $u(0,t)$. Показано, что полученное уравнение является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре, которое однозначно и безусловно разрешимо. Основной результат приведён в виде теоремы. Рассмотрен один частный случай, когда обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования М. Сайго в краевом условии сводится к оператору Кобера—Эрдейи. Обосновано существование единственного решения краевой задачи в этом случае.

Ключевые слова: *нагруженное уравнение теплопроводности, обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования, функция Грина, интегральные уравнения Вольтерра.*

Постановка задачи. Рассмотрим нагруженное дифференциальное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + u(0,t) \tag{1}$$

в односвязной области $\Omega=\{(x,t):0<x<l, 0<t<T\}$, где l, T — заданные положительные действительные числа.

Задача. *Найти в области Ω регулярное решение $u(x,t)$ уравнения* (1) *из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup(0,T))$, удовлетворяющее следующим условиям*:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l; \tag{2}$$

$$u_x(0,t) - I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma}u(0,t) = -\mu(t), \quad 0<t<T; \tag{3}$$

$$u(l,t)=\varphi_1(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)\in C^1[0,l]$, $\varphi_1(t)\in C^1[0,T]$, $\mu(t)\in C^1[0,T]$, $\varphi'(0)=-\mu(0)$, $\varphi_1(0)=$ $=\varphi(l)$, причём, не нарушая общности, считаем $\varphi(0)=0$, $\varphi(l)=0$;

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma}f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\gamma,\alpha;\frac{x-t}{x}\Big)f(t)dt$$

— обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре [1]; $\alpha>0$, $x>0$, β, $\gamma\in\mathbb{R}$. *Необходимые*

Анна Валерьевна Тарасенко, аспирант, каф. высшей математики.

для разрешимости исследуемой задачи условия на параметры α, β и γ будут наложены ниже.

Единственность и существование решения краевой задачи. Воспользуемся функцией Грина смешанной краевой задачи [2]:

$$G(x,t,\xi,\eta) = \frac{(t-\eta)^{-1/2}}{2l\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(t-\eta)}\right) + \right.$$
$$+ \exp\left(-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(t-\eta)}\right) - \exp\left(-\frac{(x-\xi-2l+2n)^2}{4(t-\eta)}\right) -$$
$$\left. - \exp\left(-\frac{(x+\xi-2l+2n)^2}{4(t-\eta)}\right)\right].$$

Следуя работе [2], запишем интегральное представление решения задачи для уравнения (1) в виде

$$u(x,t) = \int_0^t G\big|_{\xi=0} u_\xi(0,\eta)d\eta + \int_0^l G\big|_{\eta=0} u(\xi,0)d\xi -$$
$$- \int_0^t G_\xi\big|_{\xi=l} u(l,\eta)d\eta + \int_0^t u(0,\eta)d\eta \int_0^l G d\xi. \quad (5)$$

Выражение (5) в силу граничного условия (3) при $x \to 0+$ принимает вид

$$u(0,t) = \int_0^t G\big|_{\substack{\xi=0\\x=0}} u_\xi(0,\eta)d\eta + \int_0^l G\big|_{\substack{\eta=0\\x=0}} u(\xi,0)d\xi -$$
$$- \int_0^t G_\xi\big|_{\substack{\xi=l\\x=0}} u(l,\eta)d\eta + \int_0^t u(0,\eta)d\eta \int_0^l G\big|_{x=0} d\xi. \quad (6)$$

Учитывая

$$G\big|_{\substack{\xi=0\\x=0}} = \frac{(t-\eta)^{-1/2}}{l\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{n^2}{t-\eta}\right) - \exp\left(-\frac{(n-l)^2}{t-\eta}\right)\right] =$$
$$= \frac{(t-\eta)^{-1/2}}{l\sqrt{\pi}} \left(1 - \exp\left(-\frac{l^2}{t-\eta}\right) + \sum{}' \left[\exp\left(-\frac{n^2}{t-\eta}\right) - \exp\left(-\frac{(n-l)^2}{t-\eta}\right)\right]\right),$$

где $\sum'$ означает суммирование по всем $n \neq 0$, из равенства (6) при условии (3) получаем

$$u(0,t) - \int_0^t \frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}} I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma} u(0,\eta)d\eta - \int_0^t \frac{m(k,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}} I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma} u(0,\eta)d\eta -$$
$$- \int_0^t u(0,\eta)d\eta \int_0^l G\big|_{x=0} d\xi = \Phi(t), \quad (7)$$

где

$$k(t,\eta) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \left(1 - \exp\left(-\frac{l^2}{t-\eta}\right)\right),$$

$$m(k,\eta)=\frac{1}{l\sqrt{\pi}}\sum{}'\left[\exp\Bigl(-\frac{n^2}{t-\eta}\Bigr)-\exp\Bigl(-\frac{(n-l)^2}{t-\eta}\Bigr)\right],$$

$$\Phi(t)=\int_0^l G\big|_{\substack{\eta=0\\x=0}}u(\xi,0)d\xi-\int_0^t G\big|_{\substack{\xi=0\\x=0}}\mu(\eta)d\eta-\int_0^t G_\xi\big|_{\substack{\xi=l\\x=0}}u(l,\eta)d\eta.$$

В монографии [3, с. 116] отмечено, что функция Грина $G(x,t,\xi,\eta)$ бесконечно дифференцируема по своим аргументам. А поэтому, учитывая гладкость известных функций, можно утверждать, что $\Phi(t)\in C[0,T]$.

Рассмотрим интеграл

$$T_1=\int_0^t\frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma}u(0,\eta)d\eta$$

из (7). Покажем, что

$$T_1=\int_0^t u(0,s)K_1(t,s)ds, \tag{8}$$

где

$$K_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^s\frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}\eta^{-\alpha-\beta}(\eta-s)^{\alpha-1}F\Bigl(\alpha+\beta,-\gamma,\alpha;\frac{\eta-s}{\eta}\Bigr)d\eta,$$

и справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $0<\alpha<1/2$, *то справедливы оценки*

$$|K_1(t,s)|\leqslant\frac{\text{const}}{t^{\alpha+\beta}(t-s)^{1/2-\alpha}}\quad \textit{при } \beta<0,\ \alpha+\beta>0; \tag{9}$$

$$|K_1(t,s)|\leqslant\frac{\text{const}}{t^{\alpha}s^{\beta}(t-s)^{1/2-\alpha}}\quad \textit{при } \beta>0. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть

$$M_1=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}k(t,\eta)\quad \text{и}\quad M_2=\sup F\Bigl(\alpha+\beta,-\gamma,\alpha;\frac{\eta-s}{\eta}\Bigr),$$

тогда для функции $K_1(t,s)$ получаем оценку

$$|K_1(t,s)|\leqslant\frac{M_1M_2}{\Gamma(\alpha)}\int_s^t\eta^{-\alpha-\beta}(t-\eta)^{-1/2}(\eta-s)^{\alpha-1}d\eta.$$

Выполним в интеграле замену $\eta=t-(t-s)z$, изменим порядок интегрирования и воспользуемся формулой интегрального представления гипергеометрической функции [4]. Тогда получим, что T_1 действительно представимо в виде (8), а для функции $K_1(t,s)$ справедливо неравенство

$$|K_1(t,s)|\leqslant\frac{M_1M_2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1/2)}t^{-\alpha-\beta}(t-s)^{\alpha-1/2}F\Bigl(\alpha+\beta,1/2,\alpha+1/2;\frac{t-s}{t}\Bigr). \tag{11}$$

Предположим, что $\beta<0$, $0<\alpha<1/2$, $\alpha+\beta>0$. Тогда из (11) для $K_1(t,s)$ получим оценку (9).

Пусть теперь $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1/2$. На основании формулы автотрансформации для гипергеометрической функции Гаусса:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z), \quad |\arg(1-z)| < \pi$$

для функции $K_1(t, s)$ имеем неравенство

$$|K_1(t,s)| \leqslant \frac{M_1 M_2 \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} s^{-\beta} t^{-\alpha} (t-s)^{\alpha - 1/2} F\Big(\alpha + \beta, 1/2, \alpha + 1/2; \frac{t-s}{t}\Big),$$

из которого получаем оценку (10). □

Рассмотрим теперь интеграл

$$T_2 = \int_0^t \frac{m(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}} I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma} u(0,\eta) d\eta.$$

Аналогично покажем, что

$$T_2 = \int_0^t u(0,s) K_2(t,s) ds, \tag{12}$$

где

$$K_2(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^s \frac{m(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}} \eta^{-\alpha-\beta} (\eta - s)^{\alpha-1} F\Big(\alpha+\beta, -\gamma, \alpha; \frac{\eta - s}{\eta}\Big) d\eta,$$

и имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Если* $0 < \alpha < 1/2$, *то справедливы оценки*

$$|K_2(t,s)| \leqslant \frac{\text{const}}{t^{\alpha+\beta}(t-s)^{1/2-\alpha}} \quad \textit{при } \beta < 0,\ \alpha + \beta > 0; \tag{13}$$

$$|K_2(t,s)| \leqslant \frac{\text{const}}{t^{\alpha} s^{\beta}(t-s)^{1/2-\alpha}} \quad \textit{при } \beta > 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $M_3 = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} k(t, \eta)$, тогда для функции $K_2(t, s)$ получаем оценку

$$|K_2(t,s)| \leqslant \frac{M_2 M_3}{\Gamma(\alpha)} \int_s^t \eta^{-\alpha-\beta} (t-\eta)^{-1/2} (\eta - s)^{\alpha-1} d\eta.$$

Далее, поступая как в лемме 1, нетрудно убедиться в справедливости оценок (13), (14) для $K_2(t, s)$. □

Используя формулы (8) и (12) в уравнении (7) и учитывая оценки (9), (10) и (13), (14) для функций $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s)$ соответственно, заключаем, что при $0 < \alpha < 1/2$ это уравнение является интегральным уравнением Вольт'ерра второго рода со слабой особенностью, которое однозначно и безусловно разрешимо [5].

Основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть выполняются условия*

$$0<\alpha<1/2,\quad \beta<0,\quad \alpha+\beta>0,\quad \textit{либо}\quad 0<\alpha<1/2,\quad \beta>0.$$

Тогда задача (1)–(4), *где* $\varphi(x)\in C^1[0,l]$, $\varphi_1(t)\in C^1[0,T]$, $\mu(t)\in C^1[0,T]$, *разрешима в указанном классе функций и притом единственным образом.*

Замечания. Обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma}f)(x)$ при $\beta=0$ сводится к оператору Кобера—Эрдейи [6]:

$$(E_{0+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x)=\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^{\beta}\varphi(t)\,dt,\quad \alpha>0.$$

В данном случае выражение (7) принимает вид

$$u(0,t)=\int_0^t\frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}E_{0+}^{\alpha,\beta}u(0,\eta)d\eta+\int_0^t\frac{m(k,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}E_{0+}^{\alpha,\beta}u(0,\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^t u(0,\eta)d\eta\int_0^l G\big|_{x=0}d\xi+\Phi(t).$$

При рассмотрении интегралов

$$T_3=\int_0^t\frac{k(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}E_{0+}^{\alpha,\beta}u(0,\eta)d\eta,\quad T_4=\int_0^t\frac{m(t,\eta)}{(t-\eta)^{1/2}}E_{0+}^{\alpha,\beta}u(0,\eta)d\eta,$$

поступая, как в лемме 1, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. *Если* $0<\alpha<1/2$, *то для функций*

$$K_3(t,s)=\int_s^t k(t,\eta)s^{\beta}(t-\eta)^{-1/2}\eta^{-\alpha-\beta}(\eta-s)^{\alpha-1}d\eta,$$
$$K_4(t,s)=\int_s^t m(t,\eta)s^{\beta}(t-\eta)^{-1/2}\eta^{-\alpha-\beta}(\eta-s)^{\alpha-1}d\eta$$

справедливы следующие оценки $(i=3,4)$:

$$|K_i(t,s)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{t^{\alpha+\beta}s^{-\beta}(t-s)^{1/2-\alpha}}\quad \textit{при } \beta<0,\ \alpha+\beta>0;$$
$$|K_i(t,s)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{t^{\alpha}(t-s)^{1/2-\alpha}}\quad \textit{при } \beta>0.$$

Обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma}f)(x)$ при $-1/2<\alpha<0$ и $\beta=-\alpha$ сводится к оператору дробного дифференцирования Римана—Лиувилля. Данный случай рассмотрен в работе А. А. Керефова, Р. М. Кумышева [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Saigo M. A.* A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation // *Math. Jap.*, 1979. Vol. 24, no. 4. Pp. 377–385.
2. *Керефов А. А., Кумышев Р. М.* О краевых задачах для нагруженного уравнения теплопроводности // *Докл. АМАН*, 1996. Т. 2, № 1. С. 13–15. [*Kerefov A. A., Kumyshev R. M.* On boundary value problems for a loaded heat conduction equation // *Dokl. AMAN*, 1996. Vol. 2, no. 1. Pp. 13–15].
3. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с. [*Bers L., John F., Shehter M.* Partial differential equations. Moscow: Mir, 1966. 351 pp.]
4. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
5. *Манжиров А. В., Полянин А. Д.* Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. М.: Факториал Пресс, 2000. 384 с. [*Manzhirov A. V., Polyanin A. D.* Handbook of Integral Equations: Solution Methods. Moscow: Factorial Press, 2000. 384 pp.]
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление его применение. М.: Физматлит, 2003. 271 с. [*Nakhushev A. M.* Fractional calculus and its applications. Moscow: Fizmatlit, 2003. 271 pp.]

Поступила в редакцию 16/IV/2012;
в окончательном варианте — 20/VII/2012.

MSC: 35M12; 35R11, 26A33, 47G20

A PROBLEM WITH THE OPERATOR M. SAIGO IN THE BOUNDARY CONDITION FOR A LOADED HEAT CONDUCTION EQUATION

A. V. Tarasenko

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: tarasenko.a.v@mail.ru

The existence of a unique solution of the non-classical boundary value problem for the heat equation, the loaded value of the desired function $u(x, y)$ on the boundary $x = 0$ of the rectangular area $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ was proved. One of the boundary conditions of the problem has a generalized operator of fractional integro-differentiation in the sense of Saigo. Using the properties of the Green function of the mixed boundary value problem and the specified boundary condition, the problem reduces to an integral equation of Volterra type with respect to the trace of the desired function $u(0, t)$. It is shown that the equation is Volterra integral equation of the second kind with weak singularity in the kernel, which is unambiguously and unconditionally solvable. The main result is given in the form of the theorem. The special case is considered, where the generalized operator of fractional integro-differentiation of M. Saigo in the boundary condition reduces to the operator of Kober–Erdeyi. In this case, the existence of an unique solution of the boundary value problem is justified.

Key words: *loaded heat equation, generalized operator of fractional integro-differentiation, Green function, Volterra integral equations.*

Original article submitted 16/IV/2012;
revision submitted 20/VII/2012.

Anna V. Tarasenko, Postgraduate Student, Dept. of Higher Mathematics.