Математический анализ

УДК 517.521.5; 517.521.7

РАЗЛОЖЕНИЕ КРАТНЫХ РЯДОВ ПО БЕСКОНЕЧНЫМ ДИАГОНАЛЯМ

А. А. Корнеев, О. А. Дорошкевич

Московский государственный гуманитарный университет им. Шолохова,
Россия, 109240, Москва, ул. Верхняя Радищевская, 16–18.

E-mails: korneevant@bk.ru, odoroshkevich@bk.ru

Получен метод суммирования двойных абсолютно сходящихся числовых рядов, получивший название разложения двойных числовых рядов по бесконечным диагоналям. Установлен вид данного разложения для симметрического и кососимметрического общего члена двойного ряда. Данное разложение обобщено на случай кратных рядов, и, в свою очередь, получило название разложения кратных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов. Разложение тройных рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов обобщено на случай трёх индексов.

Ключевые слова: *двойной ряд, кратный ряд, метод суммирования кратных рядов, бесконечные диагонали.*

Введение. В своих трудах Г. М. Фихтенгольц [1] указывает, что произведения двух сходящихся рядов (двойные сходящиеся ряды) можно многими способами располагать в виде простой последовательности. И в качестве примеров он приводит произведение рядов по диагоналям (в форме Коши) и по квадратам. В обоих случаях происходит суммирование бесконечного числа конечных сумм и не имеется общей аналитической формулы.

Основным результатом настоящей статьи является новый метод суммирования произведения двух сходящихся рядов (двойных сходящихся рядов). В предложенном методе суммируется бесконечное число бесконечных сумм, а поэтому он имеет наглядное аналитическое представление.

В дальнейшем изложении будем использовать следующие обозначения:

$$\sum_{k=d_0}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=d_0}^{\infty} f(k); \sum_{k,l=d_0}^{\infty} a_{k,l} \equiv \sum_{k,l=d_0}^{\infty} f(k;l); \quad \sum_{k,l,r=d_0}^{\infty} a_{k,l,r} \equiv \sum_{k,l,r=d_0}^{\infty} f(k;l;r)$$

и т.д. Здесь $f(k)$, $f(k,l)$, $f(k,l,r)$, $\ldots$ — действительные числа, зависящие от индексов k, l, r, $\ldots = d_0, d_0+1, d_0+2, \ldots$, где $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

1. Разложение двойных числовых рядов по бесконечным диагоналям. Пусть дан абсолютно сходящийся двойной числовой ряд [1] или произведение двух абсолютно сходящихся числовых рядов, где $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Очевидно, что

$$\sum_{k=d_1}^{\infty} \varphi(k) \times \sum_{l=d_2}^{\infty} \psi(l) = \sum_{k=d_1,l=d_2}^{\infty} f(k;l).$$

Антон Александрович Корнеев, студент, каф. математики и физики. *Ольга Александровна Дорошкевич* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математики и физики.

Здесь индексы k и l стремятся к бесконечности по множеству целых неотрицательных чисел начиная с d_1 и d_2. Предполагается, что индексы k и l образуют множество всевозможных комбинаций, стремясь к бесконечности.

Запишем эти комбинации в форме матрицы, полагая $d_1 = 0$ и $d_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0,0 & 1,0 & 2,0 & 3,0 & \dots & k,0 & \dots \\ 0,1 & 1,1 & 2,1 & 3,1 & \dots & k,1 & \dots \\ 0,2 & 1,2 & 2,2 & 3,2 & \dots & k,2 & \dots \\ 0,3 & 1,3 & 2,3 & 3,3 & \dots & k,3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,l & 1,l & 2,l & 3,l & \dots & k,l & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Её следует понимать в смысле $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

По главной бесконечной диагонали имеем

$$0,0; 1,1; 2,2; 3,3; \dots; m,m; \dots$$

Над главной бесконечной диагональю имеем бесконечные диагонали:

$$\begin{gathered} 1,0; 2,1; 3,2; 4,3; \dots; m+1,m; \dots \\ 2,0; 3,1; 4,2; 5,3; \dots; m+2,m; \dots \\ 3,0; 4,1; 5,2; 6,3; \dots; m+3,m; \dots \end{gathered}$$

и т.д. Подобным же образом определяются бесконечные диагонали, лежащие под главной бесконечной диагональю:

$$\begin{gathered} 0,1; 1,2; 2,3; 3,4; \dots; m,m+1; \dots \\ 0,2; 1,3; 2,4; 3,5; \dots; m,m+2; \dots \\ 0,3; 1,4; 2,5; 3,6; \dots; m,m+3; \dots \end{gathered}$$

и т.д. Если каждую бесконечную диагональ матрицы записать построчно, то матрица примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0{+}n,0 & 1{+}n,1 & 2{+}n,2 & 3{+}n,3 & \dots & m{+}n,n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3,0 & 4,1 & 5,2 & 6,3 & \dots & m{+}3,m & \dots \\ 2,0 & 3,1 & 4,2 & 5,3 & \dots & m{+}2,m & \dots \\ 1,0 & 2,1 & 3,2 & 4,3 & \dots & m{+}1,m & \dots \\ 0,0 & 1,1 & 2,2 & 3,3 & \dots & m,m & \dots \\ 0,1 & 1,2 & 2,3 & 3,4 & \dots & m,m{+}1 & \dots \\ 0,2 & 1,3 & 2,4 & 3,5 & \dots & m,m{+}2 & \dots \\ 0,3 & 1,4 & 2,5 & 3,6 & \dots & m,m{+}3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,0{+}n & 1,1{+}n & 2,2{+}n & 3,3{+}n & \dots & m,m{+}n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Теперь для каждой бесконечной диагонали составим бесконечные ряды, полагая $d_1 = d_2 = d_0$.

По главной бесконечной диагонали имеем ряд $\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m)$. Остальные бесконечные диагонали приводятся к главной бесконечной диагонали.

Под главной бесконечной диагональю имеем сумму рядов

$$\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+1;m) + \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+2;m) + \ldots + \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m) + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m).$$

Над главной бесконечной диагональю имеем сумму рядов

$$\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+1) + \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+2) + \ldots + \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n) + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n).$$

Суммируя полученные ряды, приходим к разложению двойных числовых рядов по бесконечным диагоналям:

$$\sum_{k,l=d_0}^{\infty} f(k;l) = \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n),$$

$$\sum_{k,l=d_0}^{\infty} f(k;l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n),$$

$$\sum_{k,l=d_0}^{\infty} f(k;l) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n).$$

Если общий член ряда $f(k;l)$ симметрический $(f(k;l) = f(l;k))$, то разложение принимает вид

$$\sum_{k,l=d_0}^{\infty} f(k;l) = \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m).$$

Если общий член ряда $f(k;l)$ кососимметрический $(f(k;l) = -f(l;k))$, то получаем

$$\sum_{k,l=d_0}^{\infty} f(k;l) = 0.$$

Для $d_1 \neq d_2$ имеем разложение

$$\sum_{k,l=d_0}^{\infty} f(k;l) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m+d_1;m+d_2) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m+d_1;m+n+d_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(m+n+d_1;m+d_2).$$

Рассмотрим пример, когда $p \in \mathbb{N}$ и $q > 0$:

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(k-l)^{2p-1}}{(k+l)^q}.$$

Используя результаты, полученные в [2], легко убедиться в том, что ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится при $q > 2p+1$ и расходится при $0 < q \leqslant 2p+1$. На основании разложения двойных числовых рядов по бесконечным диагоналям получаем

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(k-l)^{2p-1}}{(k+l)^q} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m-m)^{2p-1}}{(2m)^q} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n)^{2p-1}}{(2m+n)^q} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^{2p-1}}{(2m+n)^q} = 0.$$

Заметим, что при $0 < q \leqslant 2p+1$ повторные ряды расходятся, но двойной ряд сходится. То есть из расходимости повторных рядов не всегда следует расходимость двойного ряда.

2. Разложение тройных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов. Рассмотрим абсолютно сходящийся тройной числовой ряд или произведение трёх абсолютно сходящихся числовых рядов, где $d_0, h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Очевидно, что

$$\sum_{k=d_0}^{\infty} \varphi(k) \times \sum_{l=d_0}^{\infty} \psi(l) \times \sum_{r=h}^{\infty} \chi(r) = \sum_{k,l=d_0,r=h}^{\infty} f(k;l;r).$$

Здесь индексы k, l, r стремятся к бесконечности по множеству целых неотрицательных чисел начиная с d_0, d_0, h соответственно. Предполагается, что индексы k, l, r образуют множество всевозможных комбинаций, стремясь к бесконечности.

Аналогично тому, как это было сделано в п. 1 для двух индексов, представим всевозможные комбинации индеков k, l, r в виде последовательности матриц путём добавления третьего индекса r, полагая $d_0, h = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0,0,0 & 1,0,0 & 2,0,0 & 3,0,0 & \dots & k,0,0 & \dots \\ 0,1,0 & 1,1,0 & 2,1,0 & 3,1,0 & \dots & k,1,0 & \dots \\ 0,2,0 & 1,2,0 & 2,2,0 & 3,2,0 & \dots & k,2,0 & \dots \\ 0,3,0 & 1,3,0 & 2,3,0 & 3,3,0 & \dots & k,3,0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,l,0 & 1,l,0 & 2,l,0 & 3,l,0 & \dots & k,l,0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0,0,1 & 1,0,1 & 2,0,1 & 3,0,1 & \dots & k,0,1 & \dots \\ 0,1,1 & 1,1,1 & 2,1,1 & 3,1,1 & \dots & k,1,1 & \dots \\ 0,2,1 & 1,2,1 & 2,2,1 & 3,2,1 & \dots & k,2,1 & \dots \\ 0,3,1 & 1,3,1 & 2,3,1 & 3,3,1 & \dots & k,3,1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,l,1 & 1,l,1 & 2,l,1 & 3,l,1 & \dots & k,l,1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\begin{pmatrix} 0,0,r & 1,0,r & 2,0,r & 3,0,r & \dots & k,0,r & \dots \\ 0,1,r & 1,1,r & 2,1,r & 3,1,r & \dots & k,1,r & \dots \\ 0,2,r & 1,2,r & 2,2,r & 3,2,r & \dots & k,2,r & \dots \\ 0,3,r & 1,3,r & 2,3,r & 3,3,r & \dots & k,3,r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,l,r & 1,l,r & 2,l,r & 3,l,r & \dots & k,l,r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \dots .$$

Проводя суммирование по матрицам разложения двойных числовых рядов по бесконечным диагоналям, получаем

$$\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m;h) + \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m;h+1) + \ldots + \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m;h+r) + \ldots = \\ = \sum_{r=h}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m;r),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m;h) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m;h+1) + \ldots + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m;h+r) + \ldots = \sum_{r=h}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m;r),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n;h) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n;h+1) + \ldots + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n;h+r) + \ldots = \sum_{r=h}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n;r).$$

Суммируя ряды, приходим к разложению тройных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов:

$$\sum_{k,l=d_0,r=h}^{\infty} f(k;l;r) = \\ = \sum_{r=h}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m;r) + \sum_{r=h}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n;r) + \sum_{r=h}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m;r).$$

3. Разложение кратных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов. По аналогии с разложением тройных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов для абсолютно сходящихся s-кратных числовых рядов [1] легко получить разложение по бесконечным диагоналям для двух индексов, где d_0, d_1, d_2, h_3, …, $h_s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$:

$$\sum_{k,l=d_0,\ldots,r_3=h_3,r_s=h_s}^{\infty} f(k;l;r_3;\ldots;r_s) = \sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m;r_3;\ldots;r_s)+$$
$$+\sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m;r_3;\ldots;r_s)+$$
$$+\sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m+n;r_3;\ldots;r_s).$$

Если общий член s-кратного ряда $f(k;l;r_3;\ldots;r_s)$ симметрический относительно k и l, то имеем

$$\sum_{k,l=d_0,\ldots,r_3=h_3,r_s=h_s}^{\infty} f(k;l;r_3;\ldots;r_s) = \sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m;m;r_3;\ldots+;r_s)+$$
$$+2\sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n;m;r_3;\ldots;r_s).$$

Если общий член s-кратного ряда $f(k;l;r_3;\ldots;r_s)$ кососимметрический относительно любых двух индексов, то ряд сходится к нулю:

$$\sum_{k,l,r_3,\ldots,r_s=d_0}^{\infty} f(k;l;r_3;\ldots;r_s) = 0.$$

Для $d_1 \neq d_2$ имеем следующее разложение:

$$\sum_{k=d_1,l=d_2,\ldots,r_3=h_3,r_s=h_s}^{\infty} f(k;l;r_3;\ldots;r_s) =$$
$$=\sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m+d_1;m+d_2;r_3;\ldots;r_s)+$$
$$+\sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m+n+d_1;m+d_2;r_3;\ldots;r_s)+$$
$$+\sum_{r_s=h_s}^{\infty}\ldots\sum_{r_3=h_3}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m+d_1;m+n+d_2;r_3;\ldots;r_s).$$

4. Разложение тройных числовых рядов по бесконечным диагоналям для трёх индексов. В контексте получения разложения тройных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов возникает следующий вопрос: возможно ли разложение тройных числовых рядов по бесконечным диагоналям для трёх индексов? Рассмотрим абсолютно сходящийся тройной числовой ряд или произведение трёх сходящихся числовых рядов, где $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$:

$$\sum_{k=d_1}^{\infty}\varphi(k)\times\sum_{k_1=d_2}^{\infty}\psi(l)\times\sum_{r=d_3}^{\infty}\chi(r) = \sum_{k=d_1,l=d_2,r=d_3}^{\infty} f(k;l;r).$$

Для $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$ составим матрицу, где каждая строчка есть главная бесконечная диагональ матриц, посредством которых было получено разложение тройных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов:

$$\begin{pmatrix} 0,0,0 & 1,1,0 & 2,2,0 & 3,3,0 & \dots & k,l,0 & \dots \\ 0,0,1 & 1,1,1 & 2,2,1 & 3,3,1 & \dots & k,l,1 & \dots \\ 0,0,2 & 1,1,2 & 2,2,2 & 3,3,2 & \dots & k,l,2 & \dots \\ 0,0,3 & 1,1,3 & 2,2,3 & 3,3,3 & \dots & k,l,3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,0,r & 1,1,r & 2,2,r & 3,3,r & \dots & k,l,r & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Если каждую бесконечную диагональ матрицы записать построчно, то матрица примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p,p,0 & 1{+}p,1{+}p,1 & 2{+}p,2{+}p,2 & 3{+}p,3{+}p,3 & \dots & m{+}p,m{+}p,m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3,3,0 & 4,4,1 & 5,5,2 & 6,6,3 & \dots & m{+}3,m{+}3,m & \dots \\ 2,2,0 & 3,3,1 & 4,4,2 & 5,5,3 & \dots & m{+}2,m{+}2,m & \dots \\ 1,1,0 & 2,2,1 & 3,3,2 & 4,4,3 & \dots & m{+}1,m{+}1,m & \dots \\ 0,0,0 & 1,1,1 & 2,2,2 & 3,3,3 & \dots & m,m,m & \dots \\ 0,0,1 & 1,1,2 & 2,2,3 & 3,3,4 & \dots & m,m,m{+}1 & \dots \\ 0,0,2 & 1,1,3 & 2,2,4 & 3,3,5 & \dots & m,m,m{+}2 & \dots \\ 0,0,3 & 1,1,4 & 2,2,5 & 3,3,6 & \dots & m,m,m{+}3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0,0,p & 1,1,1{+}p & 2,2,2{+}p & 3,3,3{+}p & \dots & m,m,m{+}p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Полагая $d_1 = d_2 = d_0$, получаем сумму повторных рядов для главных бесконечных диагоналей матрицы:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+p; m+p; m) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m; m; m+p).$$

Таким образом, тройной ряд приводится к сумме двух повторных рядов. Просуммировав их как двойные ряды по бесконечным диагоналям, приходим к разложению

$$\sum_{k,l,r=d_0}^{\infty} f(k;l;r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+p+n; m+p; m) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+p; m+p+n; m) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m+n; m; m+p) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=d_0}^{\infty} f(m; m+n; m+p).$$

Для $d_1 \neq d_2 \neq d_3$ имеем

$$\sum_{k=d_1,l=d_2,r=d_3}^{\infty} f(k;l;r) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m+p+n+d_1;m+p+d_2;m+d_3)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m+p+d_1;m+p+n+d_2;m+d_3)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m+n+d_1;m+d_2;m+p+d_3)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(m+d_1;m+n+d_2;m+p+d_3).$$

По аналогии с разложением s-кратных числовых рядов по бесконечным диагоналям для двух индексов легко получить разложение s-кратных числовых рядов по бесконечным диагоналям для трёх индексов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Г. М. Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб.: Лань, 2009. 800 с. [*G. M. Fikhtengol'ts*, Course of differential and integral calculus. Vol. 2. St. Petersburg: Lan', 2009. 800 pp.]
2. *Я. С. Бугров, С. М. Никольский*, Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М.: Дрофа, 2004. 512 с. [*Ya. S. Bugrov, S. M. Nikol'sky*, Differential and integral calculus. Vol. 2. Moscow: Drofa, 2004. 512 pp.]

Поступила в редакцию 21/VII/2013;
в окончательном варианте — 19/VIII/2013.

MSC: 40B05, 40C05

EXPANSION OF MULTIPLE SERIES IN INFINITE DIAGONALS

A. A. Korneev, O. A. Doroshkevich

Sholokhov Moscow State University for the Humanities,
16–18, Verkhnyaya Radishchevskaya st., Moscow, 109240, Russia.

E-mails: `korneevant@bk.ru, odoroshkevich@bk.ru`

In this paper a method of summation of double absolutely convergent numerical series was obtained. This method was named the expansion of double numerical series in infinite diagonals. The form of the expansion for symmetric and skew-symmetric general term of double series was established. This expansion was generalized to the case of multiple series. It was called the expansion of multiple numerical series in infinite diagonals for two indices. The expansion of triple series in infinite diagonals for two indices was generalized to the case of three indices.

Keywords: *multiple series, double series, method of summation of multiple series, infinite diagonals.*

Original article submitted 21/VII/2013;
revision submitted 19/VIII/2013.

Anton A. Korneev, Student, Dept. of Mathematics & Physics. *Olga A. Doroshkevich* (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Physics.