Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 2 (31). С. 113–119

Уравнения математической физики

УДК 519.635

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

М. Х. Бештоков

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mail: beshtokov_maurat@rambler.ru

Рассматривается нелокальная краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка в многомерной области. С помощью итерационного метода решение нелокальной краевой задачи сводится к решению последовательности локальных задач. Получена априорная оценка сходимости итерационного метода в норме $W_2^1(G)$.

Ключевые слова: *краевые задачи, нелокальное условие, априорная оценка, итерационный процесс, уравнение третьего порядка, псевдопараболическое уравнение.*

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед

$$\overline{G} = \{x = (x_1, \dots, x_p) : \ 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \ \alpha = 1,2, \dots, p\}$$

с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается нелокальная краевая задача

$$u_t = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\Pi_\alpha(x,t) = \beta_{-\alpha}(x,t)u(x_1, ..., x_{\alpha-1}, l_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_p, \tau) + \\ + \int_0^t \rho_{-\alpha}(t,\tau)u(x_1, ..., x_{\alpha-1}, l_\alpha, x_{\alpha+1}, ..., x_p, \tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(x,t), \text{ при } x_\alpha = 0, \tag{2}$$

$$-\Pi_\alpha(x,t) = \beta_{+\alpha}(x,t)u(x_1, ..., x_{\alpha-1}, 0, x_{\alpha+1}, ..., x_p, \tau) + \\ + \int_0^t \rho_{+\alpha}(t,\tau)u(x_1, ..., x_{\alpha-1}, 0, x_{\alpha+1}, ..., x_p, \tau)d\tau - \mu_{+\alpha}(x,t), \text{ при } x_\alpha = l_\alpha, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{4}$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u$, $L_\alpha u = \big(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha} + \big(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha} -$ $- q_\alpha(x,t)u$; $0 < c_0 \leqslant \eta_\alpha(x,t)$; $k_\alpha(x,t) \leqslant c_1$; $|\eta_{\alpha t}|$, $|r_\alpha|$, $|q_\alpha|$, $|\beta_{-\alpha}|$, $|\beta_{+\alpha}|$,

Мурат Хамидбиевич Бештоков (к.ф.-м.н., доц.), докторант, каф. вычислительной математики.

$|\rho_{-\alpha}(t,\tau)|$, $|\rho_{+\alpha}(t,\tau)| \leqslant c_2$; $\Pi_\alpha(x,t) = k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha} + \eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}$ — полный поток; c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные; $\rho_{-\alpha}(t,\tau)$, $\rho_{+\alpha}(t,\tau)$— функции, непрерывные на $[0,T]$; $0 \leqslant \tau \leqslant t$; $\alpha = \overline{1,p}$; $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$.

Относительно коэффициентов задачи (1)–(4) предположим, что они обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T. Для обеспечения нужной гладкости $u(x,t)$ вблизи границы потребуем для (1)–(4) выполнения условий сопряжения нужного порядка. В качестве одного из способов решения задачи (1)–(4) рассмотрим итерационный метод [1–4], который сводит решение нелокальной краевой задачи к решению последовательности локальных задач.

Итерационный процесс для задачи (1)–(4) будем строить следующим образом:

$$\overset{s+1}{u}_t = L \overset{s+1}{u} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\overset{s+1}{\Pi}_\alpha(x,t) = \beta_{-\alpha}(x,t)\,\overset{s}{u}(x_1,...,x_{\alpha-1},l_\alpha,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau) + \\ + \int_0^t \rho_{-\alpha}(t,\tau)\,\overset{s}{u}(x_1,...,x_{\alpha-1},l_\alpha,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(x,t), \text{ при } x_\alpha = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}-\overset{s+1}{\Pi}_\alpha(x,t) = \beta_{+\alpha}(x,t)\,\overset{s}{u}(x_1,...,x_{\alpha-1},0,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau) + \\ + \int_0^t \rho_{+\alpha}(t,\tau)\,\overset{s}{u}(x_1,...,x_{\alpha-1},0,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau)d\tau - \mu_{+\alpha}(x,t), \text{ при } x_\alpha = l_\alpha,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\overset{s+1}{u}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{8}$$

где $s = 0,1,2,\ldots$ — итерационный индекс. В качестве нулевого приближения $\overset{0}{u}$ можно взять, например, значение решения в начальный момент времени $u_0(x)$.

Пусть $\overset{s+1}{z} = \overset{s+1}{u} - u$ — погрешность метода (5)–(8), где u — решение задачи (1)–(4). Тогда, подставляя $\overset{s+1}{u} = \overset{s+1}{z} + u$ в (5)–(8), получим задачу для погрешности $\overset{s+1}{z}$:

$$\overset{s+1}{z}_t = L \overset{s+1}{z}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\overset{s+1}{\Pi}_\alpha(x,t) = \beta_{-\alpha}(x,t)\,\overset{s}{z}(x_1,...,x_{\alpha-1},l_\alpha,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau) + \\ + \int_0^t \rho_{-\alpha}(t,\tau)\,\overset{s}{z}(x_1,...,x_{\alpha-1},l_\alpha,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau)d\tau, \quad \text{при } x_\alpha = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}-\overset{s+1}{\Pi}_\alpha(x,t) = \beta_{+\alpha}(x,t)\,\overset{s}{z}(x_1,...,x_{\alpha-1},0,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau) + \\ + \int_0^t \rho_{+\alpha}(t,\tau)\,\overset{s}{z}(x_1,...,x_{\alpha-1},0,x_{\alpha+1},...,x_p,\tau)d\tau, \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\overset{s+1}{z}(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{12}$$

где

$$L\overset{s+1}{z} = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha \overset{s+1}{z}, \quad L_\alpha \overset{s+1}{z} = \big(k_\alpha \overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha} + \big(\eta_\alpha \overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha \overset{s+1}{z}_{x_\alpha} - q_\alpha \overset{s+1}{z}.$$

Введём скалярное произведение и норму:

$$\big(u, v\big) = \int_G uv dx,\ (z, z) = \|z\|_0^2,\ (z, z) = \int_G z^2 dx,$$

$$z_x^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} z_{x_\alpha}^2, \quad \|z\|^2_{L_2(0,l_\alpha)} = \int_0^{l_\alpha} z^2(x,t)dx_\alpha.$$

Для оценки решения задачи (9)–(12) умножим уравнение (9) скалярно на $\overset{s+1}{z}$:

$$\big(\overset{s+1}{z}_t, \overset{s+1}{z}\big) = \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha \overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \overset{s+1}{z}\right) + \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha \overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}, \overset{s+1}{z}\right) +$$
$$+ \left(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}, \overset{s+1}{z}\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}, \overset{s+1}{z}\right). \tag{13}$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (13):

$$\left(\overset{s+1}{z}_t, \overset{s+1}{z}\right) = \int_G \overset{s+1}{z}_t \overset{s+1}{z} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overset{s+1}{z}\|_0^2, \tag{14}$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}, \overset{s+1}{z}\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}\overset{s+1}{z} dx =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \left(k_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}\overset{s+1}{z} dx =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} \overset{s+1}{z} k_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' - \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\left(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)^2 dx, \tag{15}$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}, \overset{s+1}{z}\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}\overset{s+1}{z} dx =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \left(\eta_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}\overset{s+1}{z} dx = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} \overset{s+1}{z}\eta_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\Big|_0^{l_\alpha} dx' -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \eta_\alpha(x,t)\left(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \eta_{\alpha t}(x,t)\left(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)^2 dx. \tag{16}$$

Остальные слагаемые в правой части (13) оценим с помощью неравенства Коши:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}_{x_\alpha},\overset{s+1}{z}\right)=\int_G\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\overset{s+1}{z}\,dx=\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G r_\alpha\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\overset{s+1}{z}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\left(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)^2dx+\frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\left(\overset{s+1}{z}\right)^2dx,\quad(17)$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z},\overset{s+1}{z}\right)=-\int_G\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)\Big(\overset{s+1}{z}\Big)^2dx=$$
$$=-\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G q_\alpha(x,t)\Big(\overset{s+1}{z}\Big)^2dx\leqslant c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\left(\overset{s+1}{z}\right)^2dx,\quad(18)$$

где $G'=\{x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\ldots,x_p):0<x_k<l_k,\ k=1,\,2,\,\ldots,\,\alpha-1,\,\alpha+1,\,\ldots,\,p\}$, $dx'=dx_1dx_2\cdots dx_{\alpha-1}dx_{\alpha+1}\cdots dx_p$. Подставляя (14)–(18) в тождество (13), получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\eta_\alpha(x,t)\Big(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\Big)^2dx+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\Big(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\Big)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\overset{s+1}{z}\left(k_\alpha\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}+\eta_\alpha\overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\right)\Bigg|_0^{l_\alpha}dx'+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\eta_{\alpha t}(x,t)\Big(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\Big)^2dx+$$
$$+\frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\left(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\right)^2dx+\frac{3c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\left(\overset{s+1}{z}\right)^2dx.\quad(19)$$

Учитывая краевые условия (10), (11), второе слагаемое в правой части (19) оценим так [5]:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\overset{s+1}{z}\left(k_\alpha\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}+\eta_\alpha\overset{s+1}{z}_{x_\alpha t}\right)\Bigg|_0^{l_\alpha}dx'=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\left(\overset{s+1}{\Pi}_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}|_{x_\alpha=l_\alpha}-\overset{s+1}{\Pi}_\alpha(x,t)\overset{s+1}{z}|_{x_\alpha=0}\right)dx'=$$
$$=-\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\left(\beta_{+\alpha}(x,t)\overset{s}{z}(x,\tau)+\int_0^t\rho_{+\alpha}(t,\tau)\overset{s}{z}(x,\tau)d\tau\right)|_{x_\alpha=0}\overset{s+1}{z}|_{x_\alpha=l_\alpha}dx'-$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\left(\beta_{-\alpha}(x,t)\overset{s}{z}(x,\tau)+\int_0^t\rho_{-\alpha}(t,\tau)\overset{s}{z}(x,\tau)d\tau\right)|_{x_\alpha=l_\alpha}\overset{s+1}{z}|_{x_\alpha=0}dx'\leqslant$$
$$\leqslant M_1\Big(\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2\Big)+M_2\left[\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2+\int_0^t\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau\right].\quad(20)$$

Тогда из (19) с учётом (20) находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G\eta_\alpha(x,t)\Big(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\Big)^2dx+\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha(x,t)\Big(\overset{s+1}{z}_{x_\alpha}\Big)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant M_3\Big(\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2\Big)+M_2\bigg[\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2+\int_0^t\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau\bigg]. \quad (21)$$

Проинтегрируем (21) по τ от 0 до t:

$$\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_{2,Q_t}^2\leqslant M_4\int_0^t\Big(\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau+$$
$$+M_5\bigg[\int_0^t\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau+\int_0^t\int_0^\tau\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau_1d\tau\bigg]. \quad (22)$$

Второе слагаемое в правой части (22) оценим следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^\tau\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau_1d\tau\leqslant T\int_0^t\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau.$$

Учитывая последнее неравенство, из (22) получим

$$\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2\leqslant$$
$$\leqslant M_4\int_0^t\Big(\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau+M_6\int_0^t\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau. \quad (23)$$

Обозначая

$$F(t)=M_6\int_0^t\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau$$

и применяя к неравенству (23) лемму Гронуолла, получим оценку

$$\int_0^t\Big(\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau\leqslant Te^{M_4t}F(t)$$

и, следовательно,

$$\|\overset{s+1}{z}\|_0^2+\|\overset{s+1}{z}_x\|_0^2\leqslant TM(t)\int_0^t\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant TM(T)\int_0^T\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau. \quad (24)$$

Из (24) имеем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{s+1}{z}\|_{W_2^1(G)}^2\leqslant TM(T)\int_0^T\Big(\|\overset{s}{z}\|_0^2+\|\overset{s}{z}_x\|_0^2\Big)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant T^2M(T)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{s}{z}\|_{W_2^1(G)}^2. \quad (25)$$

Продолжая неравенство (25) вправо, получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{s+1}{z}\|^2_{W_2^1(G)} \leqslant T^2M(T)\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{s}{z}\|^2_{W_2^1(G)} \leqslant$$
$$\leqslant \Big(T^2M(T)\Big)^2 \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{s-1}{z}\|^2_{W_2^1(G)} \leqslant \dots \leqslant \Big(T^2M(T)\Big)^{s+1} \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{0}{z}\|^2_{W_2^1(G)}.$$

В итоге получаем оценку погрешности итерационного метода (9)–(12):

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{s+1}{u}-u\|^2_{W_2^1(G)} \leqslant \big(T^2M(T)\big)^{s+1}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\overset{0}{u}-u\|^2_{W_2^1(G)}. \tag{26}$$

Из оценки (26) следует, что при $T^2M(T) < 1$ итерационный метод (9)–(12) сходится в норме $W_2^1(G)$. Сходимость итерационного процесса может быть обеспечена за счёт малости времени T, то есть сходимость будет только в малом.

Следует отметить, что полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда в уравнении (1) $L_\alpha u$ имеет другой вид:

$$L_\alpha u = \big(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha} + \big(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha t} + r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *М. Н. Бештоков*, “О сходимости итерационного процесса для одной нелокальной краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка” / В сб.: *Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики*: Материалы X Школы молодых учёных. Нальчик: КБНЦ РАН, 2012. С. 24–26. [*M. Kh. Beshtokov*, “On the convergence of the iterative process for one nonlocal boundary value problem for a hyperbolic equation of the third order” / In: *Non-local Boundary Value Problems and Problems of Modern Analysis and Informatics*. Nal’chik: KBNTs RAN, 2012. Pp. 24–26].
2. *Д. Г. Гордезиани*, О методах решения одного класса нелокальных краевых задач: Препринт, Тбилисский Ордена Трудового Красного знамени Государственный университет, Институт прикладной математики им. И. Векуа. Тбилиси, 1981. 32 с. [*D. G. Gordeziani*, On methods of resolution of a class of nonlocal boundary value problems: Preprint Tbilis. Gos. Univ., Inst. Prikl. Mat. Tbilisi, 1981. 32 pp.]
3. *D. G. Gordeziani*, “Finite-difference schemes for solving nonlocal boundary value problems (in Russian)” // *Tr. Inst. Prikl. Mat. Im. I. N. Vekua*, 1987. Vol. 19. Pp. 20–25.
4. *N. Gordeziani, P. Natalini, P. E. Ricci*, “Finite-difference methods for solution of nonlocal boundary value problems” // *Comp. Math. Appl.*, 2005. Vol. 50, no. 8–9. Pp. 1333–1344.
5. *О. А. Ладыженская*, Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.; англ. пер.: *O. A. Ladyzhenskaya*, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics / Applied Mathematical Sciences. Vol. 49. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985. 322 pp.

Поступила в редакцию 29/III/2013;
в окончательном варианте — 01/IV/2013.

MSC: 35S15; 47G30

ON CONVERGENCE OF THE ITERATIVE PROCESS FOR THE THIRD ORDER PSEUDO-PARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY VALUE CONDITIONS IN A MULTIDIMENSIONAL DOMAIN

M. H. Beshtokov

Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russia.

E-mail: beshtokov_maurat@rambler.ru

In this paper the nonlocal boundary value problem for the pseudo-parabolic equation of the third-order in a multidimensional domain is considered. Using an iterative method, the solving process of the nonlocal boundary value problem is reduced to solving the series of some local problems. An a priori estimate for the convergence of the iterative method in the norm $W_2^1(G)$ *is obtained.*

Key words: *boundary value problems, nonlocal condition, a priori estimate, iteration process, third order equation, pseudo-parabolic equation.*

Original article submitted 29/III/2013;
revision submitted 01/IV/2013.

Murat H. Beshtokov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Doctoral Candidate, Dept. of Computational Mathematics.