

# Математическое моделирование

УДК 517.957:519.21:519.62

## ПЕРЕХОД «БЕСПОРЯДОК – ПОРЯДОК – БЕСПОРЯДОК» В БИОФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЕАКЦИОННО- ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

*В. В. Максимов*

Самарский государственный университет путей сообщения,  
443066, Россия, Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

E-mail: vvmaksimov52@mail.ru

*Аналитически исследована эволюция пространственных диссипативных структур, возникающих в биофизической системе реакционно-диффузионного типа во внешних шумах. Изучены поведение плотности вероятности параметра порядка, его среднего и наиболее вероятного значений, а также восприимчивости и кумулянта второго порядка в зависимости от интенсивности внешнего шума в статистически стационарном состоянии. Определена граница перехода «порядок – беспорядок». Показано, что в рассматриваемой системе возникает последовательность шумоиндуцированных упорядочивающего и разупорядочивающего переходов.*

**Ключевые слова:** система «реакция – диффузия», неравновесные фазовые переходы, внешние шумы, параметры порядка.

**Введение.** В последние годы наблюдается все возрастающий интерес к изучению влияния внешних шумов на открытые нелинейные пространственно распределенные системы, что подтверждается появлением в ведущих научных изданиях и журналах сравнительно большого числа работ, посвященных этим исследованиям, например [1–7]. Актуальность такого рода исследований объясняется широчайшим спектром приложений таких систем к различным областям знаний, а также тем очевидным фактом, что шумы являются неотъемлемой частью окружающего нас мира и часто играют решающую роль в изменении режимов поведения динамических систем.

В работе [8] авторами развита теория, позволяющая с единой точки зрения концепции параметров порядка провести последовательное и детальное изучение процессов образования пространственных диссипативных структур (паттернов), спонтанно возникающих в открытых нелинейных пространственно распределенных системах с внешними шумами как в окрестности, так и вдали от точки перехода.

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых авторами в [8–11], и посвящена изучению шумоиндуцированных упорядочивающего и разупорядочивающего фазовых переходов, возникающих в конкретной биофизической системе в области параметров детерминированной системы, соответствующих бифуркации Тьюринга.

---

*Валерий Владимирович Максимов* (к.т.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

**1. Математическая модель.** Математическая модель изучаемой биофизической системы описывается уравнениями [12–14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= rx_1(1 - x_1) - \frac{ax_1x_2}{1 + bx_1} + D_1\nabla^2x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \frac{ax_1x_2}{1 + bx_1} - mx_2 - \frac{g^2x_2^2}{1 + h^2x_2^2}f + D_2\nabla^2x_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$  — функции состояния; параметры  $r, a, b, m, g, h, f, D_1$  и  $D_2$  описаны подробно в [12, 14]. Исследование локальной динамики и бифуркационный анализ системы (1) представлены в [13, 14].

Введём безразмерные время  $\tau = rt$ , координаты  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\sqrt{r/D_1}$  и представим параметры  $m/r$  и  $a/r$  в виде

$$m/r = (m_0/r_0)(1 + f_1(\mathbf{x}', \tau)), \quad a/r = (a_0/r_0)(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau)).$$

Здесь  $m_0, r_0, a_0$  — пространственно-временные средние соответствующих параметров, случайные однородные изотропные гауссовы поля  $f_i(\mathbf{x}', \tau)$  определяют пространственно-временные флуктуации этих параметров и имеют нулевые средние и корреляционные функции вида

$$K [f_j(\mathbf{r}, t), f_{j'}(\mathbf{r}', t')] = \Phi_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp(-k_{tj}|t - t'|) \delta_{jj'},$$

где  $\Phi_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \theta_j \exp(-k_{fj}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ,  $\theta_j$  — интенсивности флуктуаций,  $k_{fj}$  и  $k_{tj}$  определяют их характерные пространственный и временной масштабы.

Принимая во внимание внешний шум, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= x_1(1 - x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau))\frac{x_1x_2}{1 + bx_1} + D_1\nabla'^2x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau))\frac{x_1x_2}{1 + bx_1} - \frac{m_0}{r_0}(1 + f_1(\mathbf{x}', \tau))x_2 - \\ &\quad - \frac{g^2x_2^2}{1 + h^2x_2^2}f + D_2\nabla'^2x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

**2. Результаты аналитического исследования.** В работе [8] было получено уравнение Фоккера—Планка для критического параметра порядка стохастических систем реакционно-диффузионного типа. В этом разделе представлены результаты аналитического исследования системы (2), полученные на основании этого уравнения при следующих значениях параметров:  $r_0 = 1$ ,  $a_0 = 8$ ,  $g = 1,434$ ,  $f = 0,093$ ,  $h = 0,857$ ,  $b = 11,905$ ,  $m_0 = 0,490$ ,  $r_{f1} = r_{f2} = 1$ ,  $\theta_1 = 2,4 \cdot 10^{-5}$ , критическое значение контрольного параметра  $D = 135$ . Известно, что в докритической области состояние любой системы является однородным статистически стационарным (беспорядок) и этому состоянию соответствует одномодальная плотность распределения вероятности. Возникновение неоднородного статистически стационарного состояния (порядок) проявляется в расщеплении максимума плотности распределения вероятности на два симметричных. На рис. 1 и 2 представлено изменение плотности стационарного распределения вероятности амплитуды критической моды  $\xi_{kc}$  с увеличением интенсивности шума  $\theta_2$  при переходе через точку бифуркации детерминированной системы (1).

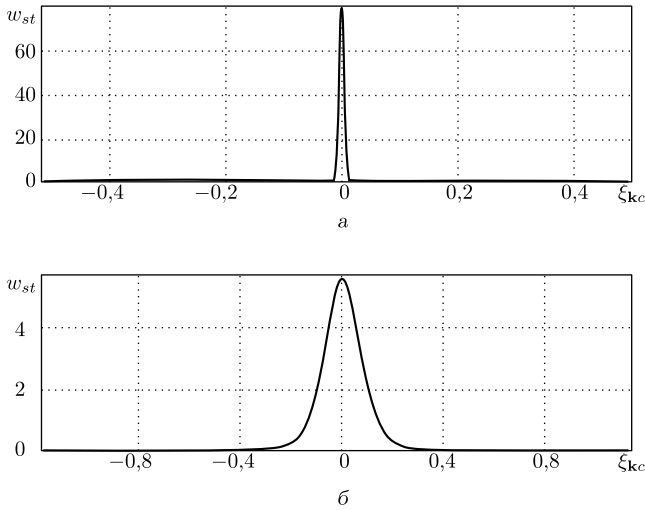


Рис. 1. Стационарная плотность распределения вероятности значений амплитуды критической моды системы (2) в докритической области для двух значений интенсивности шума  $\theta_2$ : а)  $\theta_2 = 6,4 \cdot 10^{-5}$ , б)  $\theta_2 = 3,2 \cdot 10^{-5}$

Рис. 1 иллюстрирует плотность распределения вероятности амплитуды критической моды в докритической области. При малых шумах стационарная плотность вероятности близка к  $\delta$ -функции, и среднее и наиболее вероятное значения модуля амплитуды критической моды (параметра порядка) совпадают и равны нулю, т.е. однородное статистически стационарное состояние системы является наиболее вероятным (см. рис. 1, а). При увеличении интенсивности шума (см. рис. 1, б) происходит деформация кривой стационарной плотности вероятности: максимум, не смещаясь, значительно уменьшается, при этом основание кривой расширяется. Так как полученное распределение вероятности не является Гауссовым, среднее значение модуля амплитуды становится отличным от наиболее вероятного. Таким образом, несмотря на отсутствие расщепления одномодальной плотности вероятности на бимодальную, среднее значение параметра порядка становится отличным от нуля и следует ожидать возникновения неоднородного статистически стационарного состояния (порядка), вероятность которого мала.

Очевидно, что в рассматриваемом случае возникновение нового состояния носит случайный характер. Объяснить это можно так. Формирование структур в докритической области может происходить на сильных неоднородностях среды. Такую неоднородность может создать сильная (крупномасштабная) флуктуация, вероятность которой невелика и зависит от параметров шума. Таким образом, при длительном наблюдении за эволюцией системы и подходящих параметрах внешнего шума можно ожидать формирования таких случайных неоднородностей, которые вызовут возникновение структур в области их нахождения.

Рис. 2 демонстрирует стационарную плотность вероятности амплитуды критической моды системы (2) в закритической области при различных интенсивностях шума. Бимодальные распределения соответствуют существованию диссипативных структур. При этом наиболее вероятное значение и математическое ожидание параметра порядка становится отличным от нуля. Рис. 2 ясно показывает, что при увеличении интенсивности шума происходит

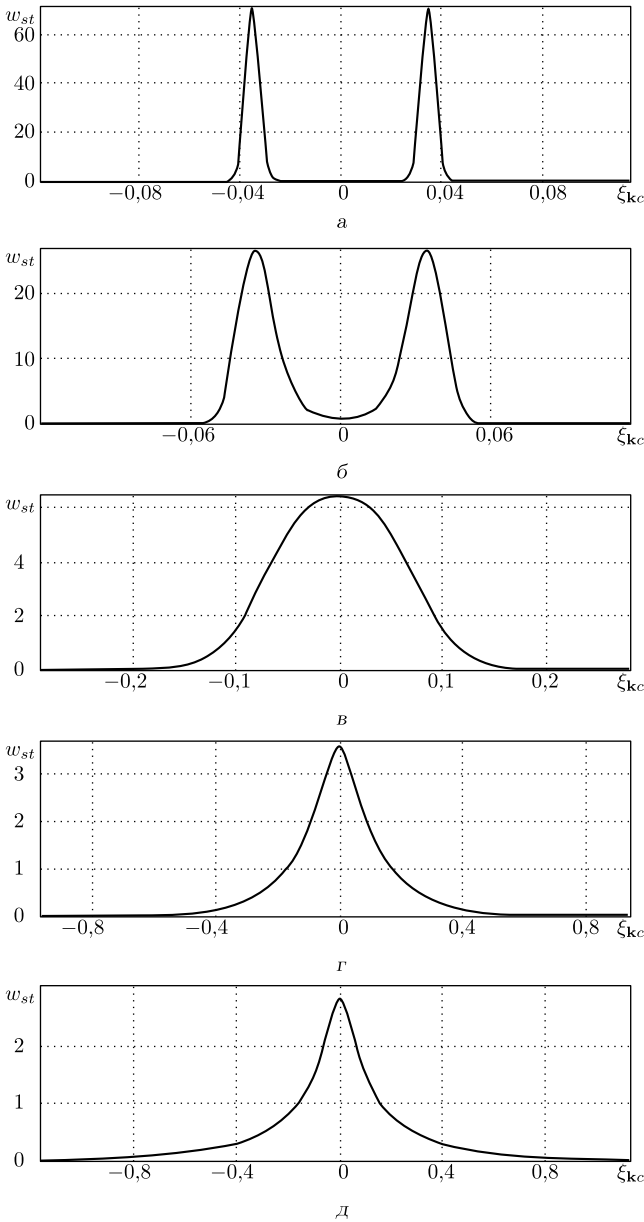


Рис. 2. Стационарная плотность распределения вероятности значений амплитуды критической моды системы (2) в закритической области для пяти значений интенсивности шума  $\theta_2$ : а)  $\theta_2 = 0$ , б)  $\theta_2 = 6,4 \cdot 10^{-5}$ , в)  $\theta_2 = 6,4 \cdot 10^{-3}$ , г)  $\theta_2 = 1,6 \cdot 10^{-1}$ , д)  $\theta_2 = 6,4 \cdot 10^{-1}$

постепенное слияние максимумов, и при некотором критическом значении интенсивности шума вновь возникает одномодальная плотность. При этом  $|\xi_{kcmp}| = 0$ , а  $\langle |\xi_{kc}| \rangle \neq 0$ . Система (2) переходит в состояние сильно нерегулярного поведения (беспорядок). Таким образом, полученное изменение плотности стационарного распределения вероятности амплитуды критической моды свидетельствует о существовании в системе (2) фазового перехода «беспорядок – порядок – беспорядок». Обсуждавшееся выше изменение статистически стационарных среднего и наиболее вероятного значений модуля амплитуды

критической моды, соответствующих изменению плотностей, изображенных на рис. 2, демонстрирует рис. 3.

На рис. 4 представлена граница шумоиндуцированного фазового перехода «порядок – беспорядок» для системы (2), предсказанная с применением подхода, развитого в [8]. Следует отметить, что при приближении к детерминированной точке перехода даже очень малые флуктуации будут способствовать потере устойчивости неоднородного состояния и вызывать неупорядоченное состояние.

Определим относительные флуктуации параметра порядка (восприимчивость) в соответствии с работой [15] как  $\chi = [\langle \xi_{kc}^2 \rangle - \langle \xi_{kc} \rangle^2] / \theta_2$  и его кумулянт второго порядка  $\kappa_2 = \langle \xi_{kc}^2 \rangle / \langle \xi_{kc} \rangle^2$ . На рис. 5 изображены графики  $\chi$  и  $\kappa_2$  как функции интенсивности шума  $\theta_2$ . Наличие максимумов восприимчивости ясно показывает увеличение флуктуаций в окрестности двух критических точек. Качественно вид кривых  $\kappa_2$  и  $\chi$ , полученных для системы (2), совпадает в соответствующей области с аналогичными кривыми, полученными численно в работе [15] для системы, в которой наблюдается чисто индуцированный шумом переход. Это свидетельствует о том, что в системе (2) шумоиндуцированный переход «порядок – беспорядок» имеет ту же природу.

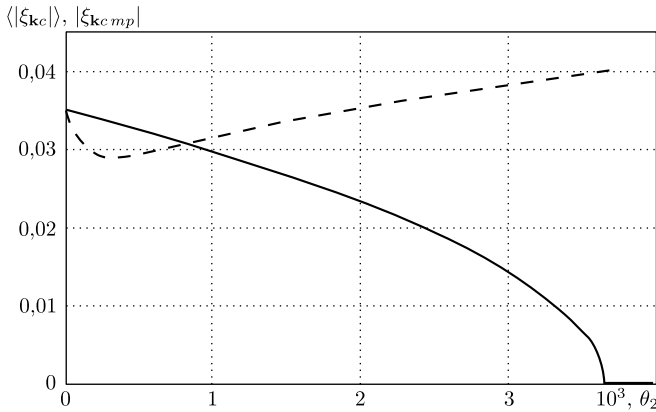


Рис. 3. Статистически стационарные среднее  $\langle |\xi_{kc}| \rangle$  (сплошная линия) и наиболее вероятное  $|\xi_{kc mp}|$  (штриховая линия) значения модуля амплитуды критической моды в зависимости от интенсивности шума  $\theta_2$  (закритическая область)

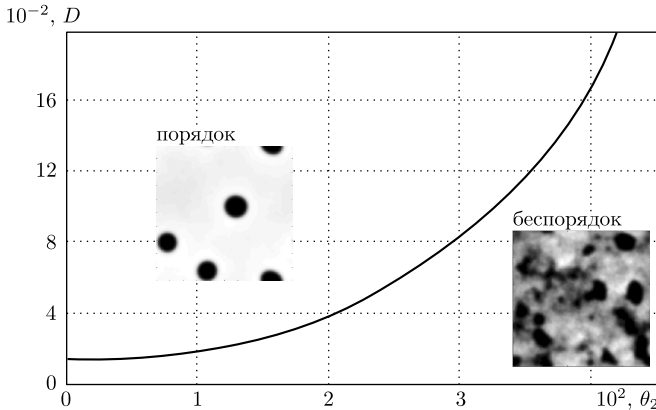


Рис. 4. Граница перехода «порядок – беспорядок» на плоскости параметров  $D$  и  $\theta_2$

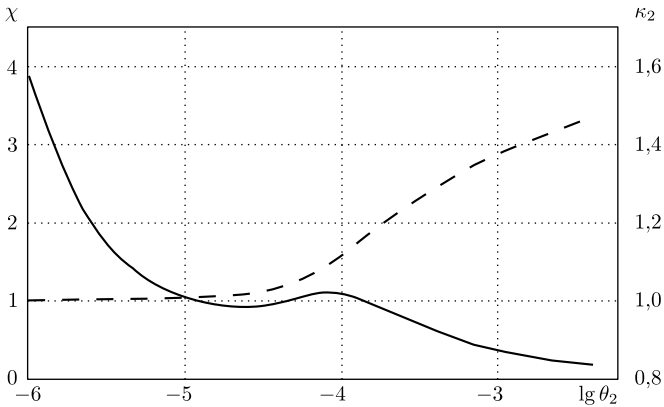


Рис. 5. Восприимчивость  $\chi$  (сплошная линия) и кумулянт второго порядка  $\kappa_2$  (штриховая линия) как функции интенсивности шума  $\theta_2$

**Закключение.** В работе исследована эволюция двухкомпонентной биофизической системы реакционно-диффузионного типа в поле внешних флуктуаций, имеющая важное теоретическое и практическое значение. Изучено поведение статистически стационарных характеристик первого и второго порядков амплитуды критической моды этой системы. Определена граница перехода «порядок – беспорядок». Исследование восприимчивости и кумулянта второго порядка абсолютного значения амплитуды критической моды позволяет сделать вывод о том, что шумоиндуцированные упорядочивающий и разупорядочивающий переходы, связанные с образованием диссипативных структур в этой системе, аналогичны чисто индуцированным шумом переходам и являются неравновесными фазовыми переходами второго рода. Результаты численного моделирования эволюции системы (2) [11] имеют удовлетворительное количественное соответствие результатам аналитического исследования в окрестности точки перехода «беспорядок – порядок».

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Horsthemke W., Lefever M.* Noise-induced Transition. Berlin: Springer, 1984. 318 pp.
2. *Garcia-Ojalvo J., Sancho J. M.* Noise in Spatially Extended Systems. New York: Springer Verlag, 1999. 307 pp.
3. *Lindner B., García-Ojalvo J., Neimand A., Schimansky-Geiere L.* Effects of noise in excitable systems // *Phys. Rept.*, 2004. Vol. 392, no. 6. Pp. 321–424.
4. *Haken H.* Synergetics. Berlin: Springer, 2004. 758 pp.
5. *Gardiner C.* Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. Berlin: Springer, 2004. 424 pp.
6. *Valenti D., Schimansky-Geier L., Sailer X., Spagnolo B.* Moment equations for a spatially extended system of competing species // *Eur. Phys. J. B*, 2006. Vol. 50, no. 1–2. Pp. 199–203.
7. *Hutt A., Longtin A., Schimansky-Geier L.* Additive noise-induced Turing transitions in spatial systems with application to neural fields and the Swift–Hohenberg equation // *Physica D*, 2008. Vol. 237, no. 6. Pp. 755–773.
8. *Курюшина С. Е., Громова Л. И., Максимов В. В.* Стохастические уравнения и уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка в исследовании динамики шумоиндуцированных пространственных диссипативных структур // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2011. Т. 19, № 5. С. 45–63. [*Kurushina S. E., Gromova L. I., Maksimov V. V.* Stochastic equations and the Fokker-Planck equation for order parameters

- for studying of dynamics noise-induced spatial dissipative structures // *Izv. Vuzov. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika*, 2011. Vol. 19, no. 5. Pp. 45–63].
9. Курушина С. Е., Желнов Ю. В., Завершинский И. П., Максимов В. В. Образование диссипативных структур в двухкомпонентных системах типа реакция-диффузия во флуктуирующей среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 143–153. [Kurushina S. E., Zhelnov Yu. V., Zavershinskii I. P., Maksimov V. V. Pattern formation in two-component reaction-diffusion systems in fluctuate environment // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(20). Pp. 143–153].
  10. Курушина С. Е. Иванов А. А., Желнов Ю. В. Завершинский И. П., Максимов В. В. Автоволновые структуры во внешней флуктуирующей среде // *Изв. СНЦ РАН*, 2010. Т. 12, № 4. С. 41–50. [Kurushina S. E., Ivanov A. A., Zhelnov Yu. V., Zavershinskii I. P., Maksimov V. V. Autowave structures in fluctuating external environment // *Izv. SNC RAN*, 2010. Vol. 12, no. 4. Pp. 41–50].
  11. Курушина С. Е., Иванов А. А., Желнов Ю. В., Завершинский И. П., Максимов В. В. Моделирование пространственно-временных структур в системе хищник-жертва во внешней флуктуирующей среде // *Матем. моделирование*, 2010. Т. 22, № 10. С. 3–17. [Kurushina S. E., Ivanov A. A., Zhelnov Yu. V., Zavershinskii I. P., Maksimov V. V. Modeling spatial-temporal structures in a predator-prey system in an external fluctuating environment // *Matem. Modelirovanie*, 2010. Vol. 22, no. 10. Pp. 3–17].
  12. Scheffer M. Fish and nutrients interplay determines algal biomass: a minimal model // *OIKOS*, 1991. Vol. 62, no. 3. Pp. 271–282.
  13. Malchow H. Motional instabilities in prey-predator systems // *J. Theor. Biol.*, 2000. Vol. 204, no. 4. Pp. 639–647.
  14. Malchow H. Spatiotemporal pattern formation in nonlinear non-equilibrium plankton dynamics // *Procc. R. Soc. Lond. B*, 1993. Vol. 251, no. 1331. Pp. 103–109.
  15. Van den Broeck C., Parrondo J. M. R. Toral R., Kawai R. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. E*, 1997. T. 55, № 4. С. 4084–4094.

Поступила в редакцию 20/III/2012;  
в окончательном варианте — 21/VIII/2012.

MSC: 60H15,35R60

## TRANSITION DISORDER–ORDER–DISORDER IN REACTION-DIFFUSION BIOPHYSICAL SYSTEM

V. V. Maksimov

Samara State Transport University,  
18, First Bezimyanniy per., Samara, 443066, Russia.

E-mail: vvmaksimov52@mail.ru

*The evolution of spatial pattern formation, which arises in the biophysical system of reaction-diffusion type in external noise, is researched analytically. The behavior of the probability density of the order parameter, its mean and the most probable values, susceptibility and second-order cumulant as a function of external noise intensity are studied in the statistically steady state. The boundary of transition “order-disorder” is defined. It is shown that there is a sequence of noise-induced ordering and disordering transitions in this system.*

**Key words:** reaction-diffusion system, nonequilibrium phase transitions, external noise, order parameters.

Original article submitted 20/III/2012;  
revision submitted 21/VIII/2012.