

УДК 517.958

РЕЖИМ СКАТЫВАНИЯ В МОДЕЛИ ХИГГСА С ТРЕНИЕМ

*Е. В. Писковский*Московский физико-технический институт (государственный университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

E-mail: evgeny.piskovsky@gmail.com

*Рассматривается модель Хиггса с трением. Для построения приближенного решения применяется гиперболический аналог метода усреднения Крылова–Боголюбова. Полученное приближенное аналитическое решение сравнивается с численным решением.***Ключевые слова:** режим скатывания, модель Хиггса с трением, гиперболический аналог метода усреднения Крылова–Боголюбова.

Для уравнения Хиггса в теории поля [1], уравнения Фридмана в космологии [2, 3] и ряда других задач нелинейной динамики интерес представляет не только режим малых колебаний, но и режим скатывания [4, 5].

В работах [6, 7] предложен метод решения уравнения Хиггса, являющийся гиперболическим аналогом метода усреднения Крылова–Боголюбова. Метод был применен к исследованию режима скатывания в модели ангармонического осциллятора с мнимой частотой (уравнения Хиггса):

$$\ddot{q}(t) - \mu^2 q(t) = -\varepsilon q^3(t) \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

С использованием известного разложения точного решения уравнения (1) в терминах гиперболических функций [8], была доказана теорема об оценке погрешности приближения точного решения решением, полученным с помощью гиперболического аналога метода усреднения Крылова–Боголюбова (см. [7]).

В настоящей статье рассмотрено применение гиперболического аналога метода усреднения Боголюбова–Крылова к решению уравнения Хиггса с трением [4]:

$$\ddot{q}(t) + 2\varepsilon h \dot{q}(t) - \mu^2 q(t) = -\varepsilon q^3(t) \in \mathbb{R}, \quad h > 0, \quad \mu > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (2)$$

с начальными данными $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = \text{const}$.

1. Гиперболический аналог метода усреднения Крылова–Боголюбова.

В рамках рассматриваемого метода решение уравнения Хиггса с трением (2) представляется в виде

$$q = a \sinh(\psi) + \varepsilon u(a, \psi), \quad (3)$$

где амплитуда a удовлетворяет уравнению $\dot{a} = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$, а мгновенная частота ψ даётся уравнением $\dot{\psi} = \mu + \varepsilon B_1$. Коэффициенты A_1 , B_1 и функция u задают первое приближение к решению уравнения согласно методу:

$$\dot{q} = \varepsilon A_1 \sinh(\psi) + a(\mu + \varepsilon B_1) \cosh(\psi) + \varepsilon \mu \frac{\partial u}{\partial \psi}, \quad (4)$$

Евгений Викторович Писковский, аспирант, факультет управления и прикладной математики.

$$\ddot{q} = 2\varepsilon A_1 \mu \cosh(\psi) + a(\mu^2 + 2\mu\varepsilon B_1) \sinh(\psi) + \varepsilon \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}. \quad (5)$$

Из уравнений (2), (4), (5) получены выражения для амплитуды и первой поправки к мгновенной частоте:

$$a = a_0 e^{-\varepsilon ht}, \quad a_0 = \text{const}, \quad B_1 = \frac{3}{8\mu} a_0^2 e^{-2\varepsilon ht}.$$

Константа a_0 определяется из начальных условий. Далее, принимая во внимание начальное условие $q(0) = 0$, запишем

$$\psi = \mu t - \frac{3a_0^2}{16\mu h} (e^{-2\varepsilon ht} - 1).$$

Первая поправка u имеет следующий вид:

$$u = -\frac{a^3}{32\mu^2} \sinh(3\psi).$$

Решение уравнения (2) с точностью до ε даётся выражением

$$q(t) = a_0 e^{-\varepsilon ht} \sinh\left(\mu t - \frac{3a_0^2}{16\mu h} (e^{-2\varepsilon ht} - 1)\right) - \varepsilon \frac{a_0^3 e^{-3\varepsilon ht}}{32\mu^2} \sinh\left(3\left(\mu t - \frac{3a_0^2}{16\mu h} (e^{-2\varepsilon ht} - 1)\right)\right). \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2\varepsilon h \dot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^3 = 0, \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad \omega > 0, \quad \varepsilon > 0$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) \neq 0$. Решение такого уравнения даётся выражением [9, 10]:

$$x(t) = a e^{-\varepsilon ht} \sin\left(\omega t + \frac{a^2}{16\omega h} (e^{-2\varepsilon ht} - 1)\right). \quad (7)$$

В [6, 7] отмечено, что представленное решение (6) формально может быть получено из разложения метода усреднения (7) заменами $\omega \rightarrow i\mu$ и $a \rightarrow -ia_0$.

2. Численное решение. Сравнение с полученным приближением. Оценка погрешности приближения точного решения уравнения (2) первым приближением (6) в данной работе не представлена. Чтобы получить представление о погрешности приближения решения уравнения (2), в настоящем разделе сравниваются численное решение уравнения (2), приближенное решение, полученное в виде (3), и решение уравнения, полученное линеаризацией уравнения (2):

$$\ddot{q} + 2\varepsilon h \dot{q} - \mu^2 q = 0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) \neq 0. \quad (8)$$

Решение последнего уравнения даётся выражением

$$q(t) = C_1 \sinh(\sqrt{\mu^2 + \varepsilon^2 h^2 t}) e^{-\varepsilon h t}.$$

Чтобы получить численное решение, были взяты следующие значения коэффициентов уравнения (2): $\varepsilon = 0,25$, $h = 0,1$, $\mu = 3,0$ и заданы начальные условия $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 5,6$, $T = 2\pi/\mu \approx 2,0944$.

На рис. 1 представлены графики численного решения уравнения (2), первого приближения, полученного выше. Заметим, что решение линейаризованного уравнения (8) существенно отличается от численного решения уравнения (2) уже при $t = 0,3T \approx 0,6283$, а первое приближение (6) с хорошей точностью совпадает с численным до $t = 0,6T \approx 1,2566$.

На рис. 2 представлены фрагменты фазовых кривых, полученных на основе численного решения (линия 1), приближённого решения уравнения (2) (линия 2), решения линейаризованного уравнения (8) (линия 3). Параметр t изменяется в тех же пределах, что и на рис. 1. Видно, что существенное отклонение решения линейаризованного уравнения (8) от приближенного и численного решений уравнения (2) не позволяет использовать решение линейаризованного уравнения (8) в качестве приближения решения уравнения Хиггса с трением, а первое приближение обеспечивает хорошее приближение как обобщённой координаты, так и обобщённой скорости частицы, $t \leq 0,6T$.

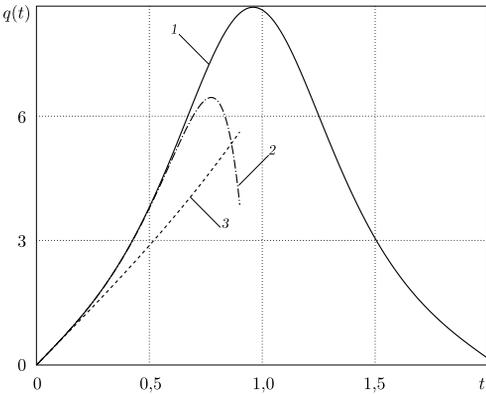


Рис. 1. Решения уравнения (2), полученные численно (линия 1), аналитически (линия 2), и точное решение уравнения (8) (линия 3)

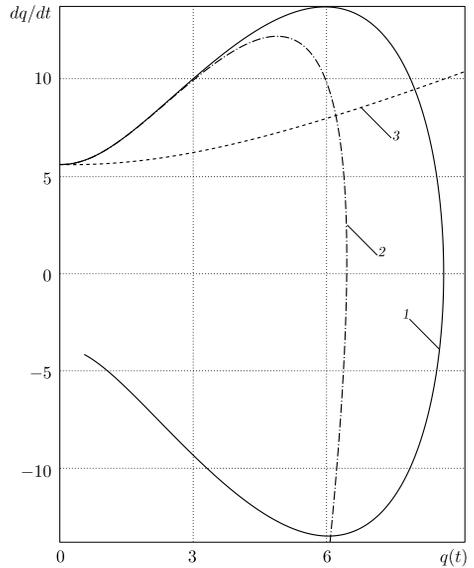


Рис. 2. Фрагмент фазовой кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = q(t)$, $y = \dot{q}(t)$: линия 1 — численное решение системы, соответствующей (2); линия 2 иллюстрирует аналитическое решение; линия 3 иллюстрирует поведение системы, соответствующей (8)

Автор благодарен И. Я. Арефьевой и И. В. Воловичу за постановку задачи и руководство в написании настоящей работы. Работа частично поддержана РФФИ (грант 11-01-00828-а) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рубаков В. А.*, Классические калибровочные поля. М.: УРСС, 1999. 335 с. [*V. A. Rubakov*, Classical gauge fields. Moscow: URSS. 335 pp.]
2. *V. Mukhanov*, Physical foundations of cosmology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. xix+421 pp.
3. *Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков*, Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва. М.: УРСС, 2008. 552 с.; англ. пер.: *D. S. Gorbunov, V. A. Rubakov*, Introduction to the Theory of the Early Universe. Hot Big Bang Theory. Singapore: World Scientific, 2011. 504 pp.
4. *I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich*, “Cosmological daemon” // *JHEP*, 2011. Vol. 2011, no. 08, 102, arXiv: 1103.0273 [hep-th].
5. *I. Ya. Aref'eva, N. V. Bulatov, R. V. Gorbachev*, FRW cosmology with non-positively defined Higgs potentials: E-print, 2011. 40 pp., arXiv: 1112.5951 [hep-th]
6. *И. Я. Арефьева, И. В. Волович*, “Асимптотическое разложение решений в одной задаче о скатывании” / В сб.: *Математическая теория управления и дифференциальные уравнения: Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко* / Тр. МИАН, Т. 277. М.: МАИК, 2012. С. 7–21; англ. пер.: *I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich*, “Asymptotic expansion of solutions in a rolling problem” // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012. Vol. 277. Pp. 1–15.
7. *И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Е. В. Писковский*, “Скатывание в модели Хиггса и эллиптические функции” // *ТМФ*, 2012. Т. 172, № 1. С. 138–154; англ. пер.: *I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, E. V. Piskovskiy*, “Rolling in the Higgs model and elliptic functions” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2012. Vol. 172, no. 1. Pp. 1001–1016, arXiv: 1202.4395 [hep-th].
8. *А. М. Журавский*, Справочник по эллиптическим функциям. М., Л.: АН СССР, 1941. 235 с. [*A. M. Zhuravskii*, Handbook of Elliptic Functions. Moscow, Leningrad: AN SSSR, 1941. 235 pp.]
9. *Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов*, Введение в нелинейную механику. Киев: АН УССР, 1937. 353 с. [*N. M. Krylov, N. N. Bogolyubov*, Introduction to non-linear mechanics. Kiev: AN USSR, 1937. 353 pp.]
10. *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с. [*N. N. Bogolyubov, Ju. A. Mitropol'skiy*, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow: Nauka, 1974. 503 pp.]

Поступила в редакцию 24/I/2013;
в окончательном варианте — 26/III/2013.

MSC: 83C25; 37C10

ROLLING REGIME IN THE HIGGS MODEL WITH FRICTION

E. V. Piskoskiy

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9, Institutskii per., Dolgoprudny, 141700, Russia.

E-mail: evgeny.piskovsky@gmail.com

The Higgs model with friction is considered. The hyperbolic analog of the Krylov-Bogoliubov averaging method is used to obtain an approximate solution. The obtained solution is compared to a numerical solution of the considered equation.

Key words: *rolling regime, the Higgs model with friction, hyperbolic analog of the Krylov-Bogoliubov averaging method.*

Original article submitted 24/I/2013;
revision submitted 26/III/2013.

Evgeny V. Piskovskiy, Postgraduate Student, Faculty of Control and Applied Mathematics.