УДК 517.962.24+519.246

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ФОРМЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Е. Зотеев, М. А. Романюк

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: zoteev-ve@mail.ru, zausmasha@mail.ru

Рассматривается численный метод определения параметров математических моделей в форме дробно-рациональных функциональных зависимостей. В основе метода лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений. Такой подход к решению задачи идентификации дробно-рациональных функциональных зависимостей позволяет обеспечить высокую адекватность построенной математической модели и, как следствие, добиться высокой точности оценивания её параметров.

Ключевые слова: *параметрическая идентификация, разностные уравнения, итерационная процедура, среднеквадратичное приближение, дробно-рациональная функциональная зависимость.*

Проблема параметрической идентификации математических моделей, описывающих динамические процессы различной физической природы в форме дробно-рациональных зависимостей, является одной из важнейших проблем в математическом моделировании. Исследование динамических процессов в форме дробно-рациональных функциональных зависимостей, которые являются точным или приближенным решением нелинейных дифференциальных уравнений, широко применяется в практике научно-технического и промышленного эксперимента. Например, в машиностроении для описания затухания амплитуды колебаний диссипативной механической системы обычно используется нелинейная функциональная зависимость вида [1]

$$a(t) = a_0\Big(1 + (n-1)\frac{\delta_0 t}{T}\Big)^{1-n},$$

которая может быть аппроксимирована более простой дробно-рациональной функцией [2]:

$$\tilde{a}(t) = a_0\Big(1 + \frac{\delta_0 t}{T} + \Big(1 - \frac{n}{2}\Big)\Big(\frac{\delta_0 t}{T}\Big)^2\Big)^{-1}, \qquad (1)$$

где a_0 — начальная амплитуда колебаний; δ_0 и T — декремент и период колебаний; n — характеристика нелинейности диссипативной силы. В частности, при турбулентном трении ($n = 2$) формула (1) задаёт гиперболическую зависимость [1, 2]:

$$a(t) = a_0\left(1 + \frac{\delta_0 t}{T}\right)^{-1}.$$

Владимир Евгеньевич Зотеев (д.т.н., доц.), профессор, каф. прикладной математики и информатики. *Мария Анатольевна Романюк*, ассистент, каф. прикладной математики и информатики.

Другим примером математического описания исследуемого объекта дробно-рациональными зависимостями является гиперболическая зависимость квадрата амплитуды $a(\omega)$ вынужденных колебаний линейной диссипативной системы от частоты возбуждения [3, 4]:

$$a^2(\omega) = \frac{P_0^2\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}, \tag{2}$$

где P_0 — амплитуда гармонического возбуждения; ω_0 — собственная (резонансная) частота системы; h — коэффициент демпфирования.

Известны методы оценивания параметров дробно-рациональных зависимостей вида (1) или (2), например, метод определения параметров характеристики сопротивления по огибающей экспериментальной виброграммы [1], метод «затухающих колебаний» [1, 5], метод «кривой резонанса» [1, 5], обладающие рядом существенных недостатков, к которым можно отнести, во-первых, линеаризацию (упрощение) математической модели в той или иной форме, во-вторых, принципиальную невозможность применения статистических методов оценивания при обработке результатов измерений и, в-третьих, использование, как правило, громоздких промежуточных графических построений без какой-либо ориентации на применение современных средств вычислений и обработки информации. Вследствие этого эти методы обладают невысокими точностью и помехозащищенностью.

Одним из эффективных путей решения этой проблемы является применение численного метода, в основе которого лежат линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений результаты наблюдений [2]. Параметрическая идентификация нелинейных функциональных зависимостей производится на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщённой регрессионной модели, которые известным образом связаны с параметрами дробно-рациональных функций.

В основе параметрической идентификации с использованием численного метода лежит вычисление таких оценок параметров математической модели, которые минимизируют величину её отклонения от результатов наблюдений по евклидовой норме в N-мерном арифметическом пространстве:

$$\|y - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 \to \min, \tag{3}$$

где y_k — результаты наблюдений; $\hat{y}_k$ — результаты вычислений на основе построенной математической модели.

Численный метод определения параметров дробно-рациональных зависимостей на основе разностных уравнений включает следующие основные этапы:

– формирование выборки результатов наблюдений y_k $(k = 0, 1, 2, ..., N-1)$ с периодом дискретизации τ, где N — объём выборки;
– построение разностных уравнений, рекуррентно описывающих дискретные значения дробно-рациональной функции;
– построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений и формирование на их основе обобщенной регрессионной модели;

– среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения;
– вычисление оценок параметров математической модели в форме дробно-рациональной зависимости;
– оценка погрешности результатов вычислений.

Рассмотрим применение численного метода на основе разностных уравнений в задаче параметрической идентификации математических моделей, описываемых дробно-рациональными функциями вида

$$\hat{y}(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t}, \tag{4}$$

$$\hat{y}(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}, \tag{5}$$

$$\hat{y}(t) = \frac{c_0 + c_1 t}{1 + c_2 t + c_3 t^2}. \tag{6}$$

Полагая в равенствах (4)–(6) $t = t_k = \tau k$, где τ — период дискретизации, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, получаем уравнения, описывающие последовательности дискретных значений дробно-рациональных зависимостей:

$$\hat{y}_k = \frac{c_0}{1 + c_1 \tau k}, \quad \hat{y}_k = \frac{c_0}{1 + c_1 \tau k + c_2 \tau^2 k^2}, \quad \hat{y}_k = \frac{c_0 + c_1 \tau k}{1 + c_2 \tau k + c_3 \tau^2 k^2}.$$

Рассмотрим построение разностного уравнения, рекуррентно описывающего последовательность дискретных значений дробно-рациональной зависимости (4).

Очевидно, что имеет место равенство

$$\hat{y}_k = \lambda_1 + \lambda_2 k \hat{y}_k,$$

где $\lambda_1 = c_0$ и $\lambda_2 = -c_1 \tau$. В то же время справедливо соотношение

$$\hat{y}_{k-1} = \lambda_1 + \lambda_2 (k-1) \hat{y}_{k-1}.$$

Отсюда для значений $k = 1, 2, 3, \ldots$ получаем разностное уравнение вида

$$\hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} = \lambda_2 [k \hat{y}_k - (k-1) \hat{y}_{k-1}],$$

которое можно дополнить равенством $\hat{y}_0 = c_0 = \lambda_1$. Аналогично формируются разностные уравнения, рекуррентно описывающие последовательности дискретных значений дробно-рациональных зависимостей (5) и (6):

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = \lambda_1, \\ \hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} = \lambda_2 [k \hat{y}_k - (k-1) \hat{y}_{k-1}] + \lambda_3 [k^2 \hat{y}_k - (k-1)^2 \hat{y}_{k-1}], \\ \hfill k = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где $\lambda_1 = c_0$, $\lambda_2 = -c_1 \tau$, $\lambda_3 = -c_2 \tau^2$;

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = \lambda_1, \\ \hat{y}_k - \hat{y}_{k-1} = \lambda_2 + \lambda_3 [k \hat{y}_k - (k-1) \hat{y}_{k-1}] + \lambda_4 [k^2 \hat{y}_k - (k-1)^2 \hat{y}_{k-1}], \\ \hfill k = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где $\lambda_1 = c_0$, $\lambda_2 = c_1\tau$, $\lambda_3 = -c_2\tau$, $\lambda_4 = -c_3\tau^2$.

Представленные выше соотношения лежат в основе построения стохастических разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений y_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$ при исследовании математических моделей процессов в форме дробно-рациональных зависимостей. Результаты эксперимента y_k могут быть представлены в виде

$$y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k, \tag{7}$$

где величина ε_k характеризует отклонение результата измерений y_k от дискретного значения дробно-рациональной функции $\hat{y}_k$, используемой в качестве математической модели исследуемого процесса. Относительно характера величины ε_k (вообще говоря, случайной) пока никаких суждений делать не будем, что позволит существенно расширить область применения численного метода. С учётом соотношения (7) полученные выше формулы запишем так:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_1 + \varepsilon_0, \\ y_k - y_{k-1} = \lambda_2[ky_k - (k-1)y_{k-1}] + \eta_{k+1}, \\ \eta_{k+1} = [\lambda_2(k-1) - 1]\varepsilon_{k-1} + (1 - \lambda_2 k)\varepsilon_k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, N-1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_1 + \varepsilon_0, \\ y_k - y_{k-1} = \lambda_2[ky_k - (k-1)y_{k-1}] + \lambda_3[k^2 y_k - (k-1)^2 y_{k-1}] + \eta_{k+1}, \\ \eta_{k+1} = [\lambda_2(k-1) + \lambda_3(k-1)^2 - 1]\varepsilon_{k-1} + (1 - \lambda_2 k - \lambda_3 k^2)\varepsilon_k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, N-1; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_1 + \varepsilon_0, \\ y_k - y_{k-1} = \lambda_2 + \lambda_3[ky_k - (k-1)y_{k-1}] + \lambda_4[k^2 y_k - (k-1)^2 y_{k-1}] + \eta_{k+1}, \\ \eta_{k+1} = [\lambda_3(k-1) + \lambda_4(k-1)^2 - 1]\varepsilon_{k-1} + (1 - \lambda_3 k - \lambda_4 k^2)\varepsilon_k, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{10}$$

Построенные разностные уравнения (8)–(10) в матричной форме принимают вид обобщённой регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases} \tag{11}$$

Для дробно-рациональной зависимости (4) переопределённая система линейных алгебраических уравнений $b = F\lambda$ описывается следующими соотношениями: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^\top$ — вектор коэффициентов разностного уравнения; $b = (y_0, y_1 - y_0, y_2 - y_1, \ldots, y_{N-1} - y_{N-2})^\top$ — N-мерный вектор правой части системы;

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y_1 \\ 0 & 2y_2 - y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & (N-1)y_{N-1} - (N-2)y_{N-2} \end{pmatrix}$$

— $(N \times 2)$-матрица регрессоров.

Для дробно-рациональной зависимости (5) имеем

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\top, \quad b = (y_0, y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_{N-1} - y_{N-2})^\top,$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & y_1 \\ 0 & 2y_2 - y_1 & 4y_2 - y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (N-1)y_{N-1} - (N-2)y_{N-2} & (N-1)^2 y_{N-1} - (N-2)^2 y_{N-2} \end{pmatrix},$$

а для зависимости (6) —

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^\top, \quad b = (y_0, y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_{N-1} - y_{N-2})^\top,$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y_1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2y_2 - y_1 & 4y_2 - y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & (N-1)y_{N-1} - (N-2)y_{N-2} & (N-1)^2 y_{N-1} - (N-2)^2 y_{N-2} \end{pmatrix}.$$

Вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^\top$, описывающий эквивалентное возмущение в обобщённой регрессионной модели $b = F\lambda + \eta$, есть линейное преобразование вектора остатков $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})^\top$. Элементы матриц $P_\lambda = \{p_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3, \dots, N)$ линейного преобразования вектора остатков для дробно-рациональных зависимостей (6)–(9) соответственно описываются следующими формулами:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1; \\ 1 - \lambda_2(i-1), & 2 \leqslant i = j; \\ \lambda_2(i-2) - 1, & i = j + 1; \\ 0, & i < j, \quad i > j + 1; \end{cases}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1; \\ 1 - \lambda_2(i-1) - \lambda_3(i-1)^2, & 2 \leqslant i = j; \\ \lambda_2(i-2) + \lambda_3(i-2)^2 - 1, & i = j + 1; \\ 0, & i < j, \quad i > j + 1; \end{cases}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1; \\ 1 - \lambda_3(i-1) - \lambda_4(i-1)^2, & 2 \leqslant i = j; \\ \lambda_3(i-2) + \lambda_4(i-2)^2 - 1, & i = j + 1; \\ 0, & i < j, \quad i > j + 1. \end{cases}$$

В рассматриваемом численном методе вычисление коэффициентов разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений, сводится к решению регрессионной задачи (11): нахождению среднеквадратичных оценок, минимизирующих функционал (3): $\|y - \hat{y}\|^2 = \|\varepsilon\|^2 \to \min$. При решении регрессионной задачи применяется итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения [2], которая включает следующие основные шаги:

1) вычисление первоначальной оценки $\hat{\lambda}^{(0)}$ вектора коэффициентов регрессионной модели;
2) вычисление элементов матрицы P_λ линейного преобразования вектора остатков;
3) преобразование обобщенной регрессионной модели к виду
$$P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} b = P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} F\lambda + \hat{\varepsilon}^{(i)},$$
где $\hat{\varepsilon}^{(i)} = P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}}\eta$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — номер итерации;
4) решение линейной регрессионной задачи
$$\|\hat{\varepsilon}^{(i)}\|^2 = \left\|P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} b - P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} F\hat{\lambda}^{(i+1)}\right\|^2 \to \min,$$
которое приводит к новой уточненной среднеквадратичной оценке вектора регрессионных коэффициентов:
$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = (F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} F)^{-1} F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} b,$$
где $\Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}} = P_{\hat{\lambda}^{(i)}} P^\top_{\hat{\lambda}^{(i)}}$;
5) сравнение двух последовательных приближений вектора оценок коэффициентов разностного уравнения:
$$|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}| \leqslant 0{,}001.$$
Если данное условие выполняется, то итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок завершается; в противном случае следует перейти ко второму шагу.

Очевидно, что при сходимости итерационной процедуры ($\lim_{i\to\infty}\hat{\lambda}^{(i)} = \hat{\lambda}$) выполняется равенство $P^{-1}_{\hat{\lambda}}\eta = \varepsilon$, то есть $\lim_{i\to\infty}\hat{\varepsilon}^{(i)} = \varepsilon$, и, следовательно, вектор $\hat{\lambda}$ оценок регрессионных коэффициентов обеспечивает минимум остаточной суммы квадратов:
$$\hat{\lambda} = \arg\min_{\hat{\lambda}^{(i)}} \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2.$$
Проблема сходимости итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения исследована в [2,7]: сформулированы достаточные условия сходимости; получена формула апостериорной оценки погрешности; сформулированы ограничения на величину случайной помехи, обеспечивающие достаточное условие сходимости; построена формула априорной оценки погрешности, позволяющая оценить число итераций, необходимое для достижения заданной точности.

Начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)}$ вектора коэффициентов регрессионной модели может быть получено из условия минимизация функционала невязки [2]
$$\|\eta\|^2 = \left\|b - F\hat{\lambda}\right\|^2 \to \min.$$

В этом случае первоначальная оценка вычисляется по формуле

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^{\top}F)^{-1}F^{\top}b.$$

Однако при большом разбросе экспериментальных данных итерационная процедура, использующая эту оценку, не всегда обеспечивает минимум остаточной суммы квадратов. Другой подход к выбору начального приближения $\hat{\lambda}^{(0)}$ заключается в решении интерполяционной задачи: вычислению коэффициентов разностного уравнения из условия совпадения значений дробно-рациональной функции с результатами наблюдений в нескольких специальным образом выбранных точках эксперимента. Например, рассмотрим выбор начального приближения $\hat{\lambda}^{(0)}$ в задаче параметрической идентификации дробно-рациональной зависимости (5), для которой система разностных уравнений (9) содержит три коэффициента λ_1, λ_2 и λ_3.

Потребуем, чтобы значения дискретной функции

$$\hat{y}_k = \frac{c_0}{1 + c_1\tau k + c_2\tau^2 k^2} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2 k - \lambda_3 k^2}$$

при $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1^{(0)}$, $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2^{(0)}$ и $\lambda_3 = \hat{\lambda}_3^{(0)}$ совпадали с результатами наблюдений y_k в трёх различных точках, соответствующих $k = 0$, $k = m = [N/2]$ и $k = N - 1$, где $[x]$ — целая часть числа x: $\hat{y}_0 = y_0$, $\hat{y}_m = y_m$ и $\hat{y}_{N-1} = y_{N-1}$. В результате получаем $\hat{y}_0 = y_0 = \hat{\lambda}_1^{(0)}$, $\hat{y}_m = y_m = \hat{\lambda}_0^{(0)} + m y_m \hat{\lambda}_2^{(0)} + m^2 y_m \hat{\lambda}_3^{(0)}$ и $\hat{y}_{N-1} = y_{N-1} = \hat{\lambda}_0^{(0)} + (N-1) y_{N-1} \hat{\lambda}_2^{(0)} + (N-1)^2 y_{N-1} \hat{\lambda}_3^{(0)}$. Отсюда начальное приближение $\hat{\lambda}_0 = (\hat{\lambda}_1^{(0)}, \hat{\lambda}_2^{(0)}, \hat{\lambda}_3^{(0)})^{\top}$ вычисляется по формулам

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = y_0, \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = \frac{(1 - \frac{y_0}{y_{N-1}})m^2 - (1 - \frac{y_0}{y_m})(N-1)^2}{m(N-1)(m-N+1)},$$

$$\hat{\lambda}_3^{(0)} = \frac{(1 - \frac{y_0}{y_m})(N-1) - (1 - \frac{y_0}{y_{N-1}})m}{m(N-1)(m-N+1)}.$$

Аналогично формируется вектор первоначальных оценок коэффициентов разностного уравнения для дробно-рациональных функций (4) и (6).

Проведённые численно-аналитические исследования показали высокую эффективность выбора первоначальных оценок вектора коэффициентов разностного уравнения на основе вычисления параметров интерполирующей функции.

При вычислении оценок параметров математической модели в форме дробно-рациональной зависимости можно воспользоваться формулами $\hat{c}_0 = \hat{\lambda}_1$, $\hat{c}_1 = -\hat{\lambda}_2/\tau$ для зависимости (4), формулами $\hat{c}_0 = \hat{\lambda}_1$, $\hat{c}_1 = -\hat{\lambda}_2/\tau$, $\hat{c}_2 = -\hat{\lambda}_3/\tau^2$ для зависимости (5) или формулами $\hat{c}_0 = \hat{\lambda}_1$, $\hat{c}_1 = \hat{\lambda}_2/\tau$, $\hat{c}_2 = -\hat{\lambda}_3/\tau$, $\hat{c}_3 = -\hat{\lambda}_4/\tau^2$ для зависимости (6).

Для оценки погрешности результатов вычислений можно воспользоваться методикой, описанной в [2]. В основе этой методики лежит предположение, что разброс результатов наблюдений y_k относительно математической модели в каждой точке эксперимента описывается независимой случайной величиной, имеющей нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. Обычно в практике эксперимента это требование выполняется. В этом случае за оценку предельной абсолютной погрешности вычисления параметра $\hat{c}_i$ можно принять (с доверительной вероятностью $1-\alpha$) величину $\Delta c_i = t_\alpha s[\hat{c}_i]$, где значение $t_\alpha = t(\alpha, \nu)$ берётся из таблицы распределения Стьюдента при числе степеней свободы $\nu = N - n$ и уровне значимости α; $s[\hat{c}_i]$ — оценка среднеквадратического отклонения параметра $\hat{c}_i$. Так как оценка любого из параметров $\hat{c}_i$ дробно-рациональных функций (4)–(6) пропорциональна оценке $\hat{\lambda}_j$ какого-либо коэффициента разностного уравнения, имеет место равенство

$$\hat{c}_i = |k| s[\hat{\lambda}_j],$$

где k — коэффициент пропорциональности; $s[\hat{\lambda}_j]$ — оценка среднеквадратического отклонения соответствующего коэффициента разностного уравнения.

Для вычисления оценки дисперсии коэффициента $\hat{\lambda}_j$ разностного уравнения можно воспользоваться формулой

$$s^2[\hat{\lambda}_j] = g_{jj} s^2_{\text{ост}},$$

в которой g_{jj} — диагональный элемент матрицы $G = (F^\top \Omega_{\hat{\lambda}} F)^{-1}$, где

$$\Omega_{\hat{\lambda}} = P_{\hat{\lambda}} P_{\hat{\lambda}}^\top, \quad s^2_{\text{ост}} = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2,$$

n — число параметров в модели [2].

На основе компьютерного моделирования проведены численно-аналитические исследования эффективности описанного численного метода определения параметров математических моделей в форме дробно-рациональных зависимостей. Целью исследований являлся анализ зависимостей погрешности δc_i вычисления каждого из параметров дробно-рациональной функции (4)–(6) от величины случайной помехи ε в результатах наблюдений, а также степени адекватности s построенной математической модели истинной функциональной зависимости.

Для этого формировалась выборка из $N = 50$ значений $\tilde{y}_k$ дробно-рациональной зависимости с периодом дискретизации τ и параметрами c_i, значения которых представлены в табл. 1. К смоделированным таким образом дискретным значениям $\tilde{y}_k$ добавлялась случайная помеха ε_k, величина которой ε изменялась от 0 до 10 %:

Таблица 1

Значения параметров дробно-рациональных зависимостей, используемые при компьютерном моделировании

Зависимость	Период дискретизации, τ	Параметры зависимости $\tilde{c}_0$	$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_2$	$\tilde{c}_3$
(4)	0,4	1,0	0,5	—	—
(5)	0,1	1,0	1,0	1,0	—
(6)	0,1	1,0	−0,5	0,1	1,0

$$\varepsilon = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 \Big/ \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k^2 \right)^{1/2} \cdot 100\,\%.$$

С целью статистической обработки результатов исследований в каждой точке численного эксперимента (при одной и той же величине ε случайной помехи) вычисление оценки параметров дробно-рациональной зависимости повторялось $M = 100$ раз. Для оценки погрешности вычисления параметра $\hat{c}_i$ использовалась величина

$$\delta c_i = \sqrt{M[(\hat{c}_i - \tilde{c}_i)^2]} \cdot |\tilde{c}_i|^{-1} \cdot 100\,\%,$$

где второй центральный момент относительно истинного значения параметра c_i вычислялся по формуле

$$M[(\hat{c}_i - \tilde{c}_i)^2] = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} (\hat{c}_{ij} - \tilde{c}_i)^2.$$

Для анализа адекватности построенной математической модели истинной дробно-рациональной зависимости использовалась величина

$$s = \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{y}_k - \hat{y}_k)^2 \Big/ \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k^2 \right)^{1/2} \cdot 100\,\%.$$

Результаты вычислений погрешности оценок параметров δc_i и адекватности построенной модели s представлены в табл. 2.

Полученные результаты численно-аналитических исследований позволяют сделать вывод о высокой эффективности численного метода параметрической идентификации дробно-рациональных зависимостей на основе разностных уравнений. Представленные в табл. 2 результаты показывают, что построенные математические модели даже при высоком уровне помехи в результатах наблюдений адекватно описывают исходные дробно-рациональные

Таблица 2

Погрешности вычисления параметров δc_i дробно-рациональных функций и величины s в зависимости от величины случайной помехи ε в результатах наблюдений

Зависимость (4)											
$\varepsilon, \%$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta c_0, \%$	0,0	0,2	0,5	0,9	1,1	1,6	1,9	2,3	3,1	3,8	4,1
$\delta c_1, \%$	0,0	0,4	0,9	1,7	2,2	3,3	3,8	4,9	6,8	8,3	9,2
$s, \%$	0,0	0,1	0,3	0,5	0,6	0,9	1,1	1,4	2,0	2,4	2,7
Зависимость (5)											
$\varepsilon, \%$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta c_0, \%$	0,0	0,3	0,5	0,9	1,1	1,5	1,6	2,0	2,7	3,1	3,3
$\delta c_1, \%$	0,0	1,8	2,9	5,0	6,6	7,7	10,0	12,2	13,2	15,7	15,0
$\delta c_2, \%$	0,0	1,0	1,9	3,4	5,0	6,6	9,4	12,0	14,4	18,4	21,0
$s, \%$	0,0	0,2	0,4	0,7	0,9	1,3	1,6	2,0	2,7	3,3	3,7
Зависимость (6)											
$\varepsilon, \%$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta c_0, \%$	0,0	0,2	0,4	0,7	1,3	0,9	1,5	2,3	2,1	2,5	1,9
$\delta c_1, \%$	0,0	0,2	0,6	0,8	1,2	1,4	1,5	2,6	3,2	3,7	3,8
$\delta c_2, \%$	0,0	18,7	31,6	53,5	73,0	75,2	106,2	77,8	121,6	197,9	176,2
$\delta c_3, \%$	0,0	1,5	3,3	4,7	7,9	9,2	13,4	15,1	22,5	28,4	30,1
$s, \%$	0,0	0,2	0,5	0,8	1,2	1,5	2,0	2,7	3,6	4,2	4,6

зависимости. Однако для дробно-рациональной зависимости (6) погрешность вычисления параметра $\hat{c}_2$ при больших ε достаточно велика. Это можно объяснить некоторой неустойчивостью самой (обратной) задачи: при существенных различиях в параметрах (176,2 %) сама зависимость практически не изменяется (4,6 %).

Проведён сравнительный анализ известного метода определения параметров характеристики сопротивления по огибающей экспериментальной виброграммы [1] и численного метода на основе разностных уравнений. Так как огибающая амплитуд колебаний нелинейной диссипативной механической системы описывается дробно-рациональной зависимостью (1) [1, 2], в численном методе использовалась система разностных уравнений (9). В качестве результатов наблюдений были взяты данные эксперимента, приведенные в [1]. Результаты $N = 10$ измерений a_k амплитуды колебаний с шагом τ, равным периоду колебаний $T = 0{,}15$ с, представлены во второй строке табл. 3.

Таблица 3

Экспериментальные и расчётные значения амплитуд колебаний

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$s, \%$
a_k	10,00	6,84	5,05	3,92	3,14	2,58	2,17	1,85	1,60	1,40	–
$\hat{a}_k^{(1)}$	10,00	6,92	5,12	3,97	3,18	2,61	2,19	1,87	1,62	1,42	0,89, %
$\hat{a}_k^{(2)}$	10,00	6,84	5,05	3,92	3,14	2,59	2,17	1,85	1,60	1,40	0,06, %

В третьей строке табл. 3 приведены значения $\hat{a}_k^{(1)}$ огибающей амплитуд колебаний, вычисленные известным методом определения параметров характеристики сопротивления по огибающей экспериментальной виброграммы [1], а в последней строке — значения $\hat{a}_k^{(2)}$ огибающей амплитуд колебаний, вычисленные численным методом на основе разностных уравнений. В последнем столбце табл. 3 приведены значения величины s для моделей, построенных по экспериментальным данным:

$$s = \left(\sum_{k=0}^{9} (a_k - \hat{a}_k^{(i)})^2 \Bigg/ \sum_{k=0}^{9} a_k^2 \right)^{1/2} \cdot 100\,\%.$$

Очевидно, что применение численного метода позволяет более чем на порядок повысить адекватность математической модели по сравнению с известным методом.

Аналогичный вывод можно сделать и при сравнительном анализе известного метода «кривой резонанса» [1] и численного метода на основе разностных уравнений, использующего математическую модель амплитудно-частотной характеристики диссипативной механической системы в форме (2). В [4] представлены результаты такого анализа, подтверждающие высокую эффективность рассматриваемого численного метода.

Таким образом, разработан эффективный численный метод определения параметров математических моделей в форме дробно-рациональных функций, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты наблюдений. Этот метод может быть применен в задачах параметрической идентификации объектов, систем или процессов различной физической природы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.; Т. 2. М.: Машиностроение, 1979. 351 с. [Vibrations in Engineering: Handbook in 6 Vols. Vol. 1. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 352 pp.]; Vol. 2. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 351 pp.]
2. *Зотеев В. Е.* Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / ред. В. П. Радченко. М.: Машиностроение-1, 2009. 344 с. [*Zoteev V. E.* Parametric identification of dissipative mechanical systems based on difference equations / ed. . V. P. Radchenko. Moscow: Mashinostroenie-1, 2009. 344 pp.]
3. *Пановко А. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с. [*Panovko A. G.* Fundamentals of applied theory of vibrations and shock. Leningrad: Mashinostroenie, 1976. 320 pp.]
4. *Попова Д. Н., Зотеев В. Е.* Разработка и исследование линейно параметрической дискретной модели амплитудно-частотной характеристики механической системы с линейно-вязким трением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 2(15). С. 179–182. [*Popova D. N., Zoteev V. E.* Development and research of the parametric linear discrete model for amplitude-frequency response of a mechanical system with linear-viscous friction // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007. no. 2(15). Pp. 179–182].
5. *Писаренко Г. С., Матвеев В. А., Яковлев А. П.* Методы определения характеристик колебаний упругих систем. Киев: Наукова думка, 1976. 88 с. [*Pisarenko G. S., Matveev V. V., Yakovlev A. P.* Methods of determining the vibration-damping characteristics of elastic systems. Kiev: Naukova Dumka, 1976. 88 pp.]
6. *Зотеев В. Е.* Исследование сходимости итерационной процедуры вычисления коэффициентов разностного уравнения / В сб.: *Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием* (1–4 июня 2009 г.). Часть 4: Информационные технологии в математическом моделировании / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2009. С. 47–54. [*Zoteev V. E.* Convergence analysis of the iterative procedure for coefficients difference equation calculating / In: *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference with international participation* (1–4 June 2009). Part 4 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2009. Pp. 47–54].
7. *Зотеев В. Е.* О сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно параметрической дискретной модели // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 133–141. [*Zoteev V. E.* On convergence of iteration procedure for mean-square estimation of coefficients of a linear parametric discrete model // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 1(18). Pp. 133–141].

Поступила в редакцию 02/V/2012;
в окончательном варианте — 26/VIII/2012.

MSC: 65C20; 65P40, 34C15, 37M05

PARAMETRICAL IDENTIFICATION OF THE MATHEMATICAL MODEL IN THE FORM OF FRACTION-RATIONAL DEPENDENCIES ON THE BASIS OF DIFFERENCE EQUATIONS

V. E. Zoteev, M. A. Romanyuk

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `zoteev-ve@mail.ru, zausmasha@mail.ru`

The numerical method of parametrical identification of the mathematical model in the form of fraction-rational functional dependencies is considered. The method is based on iteration procedure for mean-square estimation of coefficients of linear parametric discrete models in the form of stochastic difference equations. Such an approach to solving the problem of identification of the fraction-rational functional dependencies can ensure a high adequacy of the models, and as a consequence, achieve high accuracy of estimating of the models parameters.

Key words: *parametrical identification, difference equations, iterative process, mean-square approximation, fraction-rational functional dependence.*

Original article submitted 02/V/2012;
revision submitted 26/VIII/2012.

Vladimir E. Zoteev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Mariya A. Romanyuk*, Assistant, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.