Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 2 (31). С. 147–155

УДК 539.3

ЦИКЛИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЁХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. Старовойтов, Д. М. Савицкий

Белорусский государственный университет транспорта,
Беларусь, 246653, Гомель, ул. Кирова, 34.

E-mail: edstar@mail.by

Рассмотрено деформирование физически нелинейного трёхслойного стержня при циклическом нагружении в температурном поле. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Предложена методика решения соответствующих краевых задач. Получены аналитические решения задач термоупругости и термоупругопластичности при прямом и обратном нагружениях. Проведён численный анализ решений.

Ключевые слова: *циклическое деформирование, термоупругопластичность, трёхслойный стержень.*

Введение. Слоистые элементы конструкций нашли широкое применение в авиа-, ракето-, приборостроении и строительстве, поэтому разработка методик решения соответствующих краевых задач является актуальной проблемой. Исследованию напряжённо-деформированного состояния неоднородных элементов конструкций посвящены многие публикации, в том числе [1–4]. В рамках теории малых упругопластических деформаций [5] в монографии [6] рассмотрено циклическое деформирование однородных элементов конструкций.

1. Постановка краевой задачи при прямом нагружении. Рассмотрим трёхслойный стержень с жёстким заполнителем (рис. 1). Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью заполнителя. Принимаем, что в тонких несущих слоях *1*, *2* справедливы гипотезы Кирхгофа, в жёстком несжимаемом по толщине заполнителе *3* нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$, через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя. На торцах предполагается наличие жёстких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, на границах слоев — склейки. Температурное поле T_k в k-том слое рассматриваемого стержня считаем известным.

С помощью введённых гипотез продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw,_x \quad (c \leqslant z \leqslant c + h_1), \\ u^{(3)} &= u + z\psi - zw,_x \quad (-c \leqslant z \leqslant c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw,_x \quad (-c - h_2 \leqslant z \leqslant -c), \end{aligned} \tag{1}$$

Эдуард Иванович Старовойтов (д.ф.-м.н, проф.), заведующий кафедрой, каф. строительной механики. *Дмитрий Михайлович Савицкий*, аспирант, каф. строительной механики.

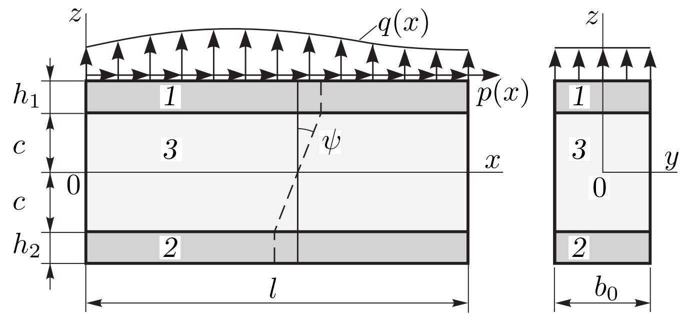

Рис. 1

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций следуют из соотношений Коши и выражений (1), напряжения — из закона Гука. Внутренние силы и моменты вводятся соотношениями

$$
\begin{gathered}
N=\sum_{k=1}^{3} N^{(k)},\ M=\sum_{k=1}^{3} M^{(k)},\ H=c(N^{(1)}-N^{(2)})+M^{(3)},\ Q=Q^{(3)},\\
N^{(k)}=b_0\int_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)}dz,\ M^{(k)}=b_0\int_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)}zdz,\ Q^{(3)}=b_0\int_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}dz,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ — компоненты тензора напряжений, b_0 — ширина сечения стержня, интегралы берутся по толщине h_k каждого из слоёв.

Пусть на рассматриваемый стержень, наружные несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а несжимаемый по толщине заполнитель — нелинейно-упругий, действует распределенная силовая нагрузка $p'(x)$, $q'(x)$, при этом соответствующие траектории нагружения относятся к классу простых [5]. Один штрих вверху здесь и в дальнейшем обозначает нагружение из естественного состояния. Для связи напряжений и деформаций используются соотношения термопластичности в форме [2]:

$$
\begin{aligned}
&s_{xx}^{\prime(k)}=2G_k(T_k)f^{\prime(k)}(\varepsilon_u^{(k)},T_k)e_{xx}^{\prime(k)},\\
&\sigma^{\prime(k)}=3K_k(T_k)(\varepsilon^{\prime(k)}-\alpha_kT_k) \qquad (k=1,2;\ i,j=x,y,z),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $s_{xx}^{\prime(k)}$, $e_{xx}^{\prime(k)}$ — девиаторные, $\sigma^{\prime(k)}$, $\varepsilon^{\prime(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k — термозависимые модули сдвига и объёмного деформирования; α_k — коэффициент линейного температурного расширения; $f^{\prime(k)}$ — функция пластичности Ильюшина при нагружении из естественного состояния

$$
f^{\prime(k)}(\varepsilon_u^{(k)},T_k)=\begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{\prime(k)}\leqslant\varepsilon_y^{\prime(k)}(T_k),\\ 1-\omega^{\prime(k)}(\varepsilon_u^{\prime(k)},T_k), & \varepsilon_u^{\prime(k)}>\varepsilon_y^{\prime(k)}(T_k),\end{cases}
$$

$\varepsilon_u^{\prime(k)}$ — интенсивность деформаций, $\varepsilon_y^{\prime(k)}$ — деформационный предел текучести материала, $\varepsilon_s^{\prime(3)}$ — предел физической нелинейности материала заполнителя.

Выделим в напряжениях (3) упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma'^{(k)}_{xx} = \sigma'^{(k)e}_{xx} - \sigma'^{(k)\omega}_{xx},\ \sigma'^{(3)}_{xz} = \sigma'^{(3)e}_{xz} - \sigma'^{(3)\omega}_{xz},$$

где

$$\begin{aligned} &\sigma'^{(k)e}_{xx} = 2G_k e'^{(k)}_{xx} + 3K_k(\varepsilon'^{(k)} - \alpha_k T_k), &&\sigma'^{(k)\omega}_{xx} = 2G_k e'^{(k)}_{xx}\omega'^{(k)},\\ &\sigma'^{(k)\omega}_{xz} = 2G_3 e'^{(3)}_{xz}\omega'^{(3)}, &&\sigma'^{(k)\omega}_{xz} = 2G_3 e'^{(3)}_{xz}\omega'^{(3)}. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2), получим

$$N'^{(k)} = N'^{(k)e} - N'^{(k)\omega},\ M^{('k)} = M'^{(k)e} - M'^{(k)\omega},\ Q'^{(3)} = Q'^{(3)e} - Q'^{(3)\omega}, \quad (4)$$

где

$$N'^{(k)e} = b_0\int \sigma'^{(k)e}_{xx}dz,\ N'^{(k)\omega} = b_0\int_{h_k} \sigma'^{(k)\omega}_{xx}dz,\ M'^{(k)e} = b_0\int_{h_k} \sigma'^{(k)e}_{xx}zdz,$$
$$M'^{(k)\omega} = b_0\int_{h_k} \sigma'^{(k)\omega}_{xx}zdz,\ Q'^{(3)e} = b_0\int_{-c}^{c} \sigma'^{(3)e}_{xz}dz,\ Q'^{(3)\omega} = b_0\int_{-c}^{c} \sigma'^{(3)\omega}_{xz}dz.$$

Уравнения равновесия трёхслойного стержня получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа

$$\delta A = \delta W, \quad (5)$$

где

$$\delta A = b_0\int_0^l (p'\delta u + q'\delta w)dx$$

— вариация работы внешней поверхностной нагрузки.

Вариация работы сил упругости учитывает работу касательных напряжений в заполнителе:

$$\delta W = b_0\int_0^l \left[\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k} \sigma'^{(k)}_{xx}\delta\varepsilon'^{(k)}_{xx}dz + 2\int_{h_3} \sigma'^{(3)}_{xz}\delta\varepsilon'^{(3)}_{xz}dz\right]dx. \quad (6)$$

С помощью соотношений (1) вариации деформаций в (6) выражаются через вариации независимых перемещений δu, $\delta\psi$ и δw. Подставив полученные выражения в уравнение (5) и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим в итоге систему дифференциальных уравнений равновесия трёхслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} &a_1 u'_{,xx} + a_6\psi'_{,xx} - a_7 w'_{,xxx} = -p' + p'_\omega,\\ &a_6 u'_{,xx} + a_2\psi'_{,xx} - a_3 w'_{,xxx} - a_5\psi' = h'_\omega\\ &a_7 u'_{,xxx} + a_3\psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxxx} = -q' + q'_\omega, \end{aligned} \quad (7)$$

где для коэффициентов имеем

$$a_1 = K_1 + h_1 + K_2 + h_2 + 2K_3 + c,\ a_2 = c^2\Big[K_1 + h_1 + K_2 + h_2 + \frac{2}{3}K_3 + c\Big],$$

$$a_3 = c\Big[K_1 + h_1\Big(c + \frac{1}{2}h_1\Big) + K_2^+ h_2\Big(c + \frac{1}{2}h_2\Big) + \frac{2}{3}K_3^+ c^2\Big],$$
$$a_4 = K_1^+ h_1\Big(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\Big) + K_2^+ h_2\Big(c + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\Big) + \frac{2}{3}K_3^+ c^3,$$
$$a_5 = 2G_3 c, \quad a_6 = c[K_1 + h_1 - K_2^+ h_2],$$
$$a_7 = K_1^+ h_1\Big(c + \frac{1}{2}h_1\Big) - K_2^+ h_2\Big(c + \frac{1}{2}h_2\Big), \quad K_k+ = K_k + \frac{4}{3}G_k.$$

Величины p'_ω, h'_ω, q'_ω учитывают физическую нелинейность материалов слоёв и вычисляются по формулам, следующим из (4) и (5):

$$p'_\omega = \frac{1}{b_0}N'^{\omega}_{,x}, \quad h'_\omega = \frac{1}{b_0}(H'^{\omega}_{,x} - Q'^{\omega}), \quad q'_\omega = \frac{1}{b_0}M'^{\omega}_{,xx},$$
$$N'^{\omega} = \frac{4}{3}b_0\sum_{k=1}^{3} G_k\int_{h_k}\omega'_k\varepsilon'^{(k)}_{xx}dz, \quad M^{\omega} = \frac{4}{3}b_0\sum_{k=1}^{3} G_k\int_{h_k}\omega'_k\varepsilon'^{(k)}_{xx}zdz, \tag{8}$$
$$Q'^{\omega} = 2b_0G_3\int_{-c}^{c}\omega'_3\psi' dz.$$

Система дифференциальных уравнений (7) нелинейная, поэтому для решения необходимо использовать приближённые методы, например, метод «упругих» решений Ильюшина. Предположим, что в (7), (8) содержится малый параметр, например, все $\omega_k < 1$. Тогда возможен метод итераций, при котором для любого n-ного приближения система уравнений (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &a_1u'^{(n)}_{,xx} + a_6\psi'^{(n)}_{,xx} - a_7w'^{(n)}_{,xxx} = -p' + p'^{(n-1)}_\omega,\\ &a_6u'^{(n)}_{,xx} + a_2\psi'^{(n)}_{,xx} - a_3w'^{(n)}_{,xxx} - a_5\psi'^{(n)} = h'^{(n-1)}_\omega,\\ &a_7u'^{(n)}_{,xxx} + a_3\psi'^{(n)}_{,xxx} - a_4w'^{(n)}_{,xxxx} = -q' + q'^{(n-1)}_\omega. \end{aligned} \tag{9}$$

Величины $p'^{(n-1)}_\omega$, $h'^{(n-1)}_\omega$, $q'^{(n-1)}_\omega$, соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных «внешних» нагрузок. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоёв:

$$p'^{(n-1)}_\omega = \frac{1}{b_0}N'^{\omega(n-1)}_{,x}, \quad h'^{(n-1)}_\omega = \frac{1}{b_0}(H'^{\omega(n-1)}_{,x} - Q'^{\omega(n-1)}), \quad q'^{(n-1)}_\omega = \frac{1}{b_0}M'^{\omega(n-1)}_{,xx},$$
$$N'^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^{3}N'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3}b_0\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}G_k\omega'^{(k)}(\varepsilon'^{(k)(n-1)}_u)\varepsilon'^{(k)(n-1)}_{xx}dz,$$
$$M'^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^{3}M'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3}b_0\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}G_k\omega'^{(k)}(\varepsilon'^{(k)(n-1)}_u)\varepsilon'^{(k)(n-1)}_{xx}zdz, \tag{10}$$
$$H'^{\omega(n-1)} = c(N'^{(1)\omega(n-1)} - N'^{(2)\omega(n-1)}) + M'^{(3)\omega(n-1)}$$
$$Q'^{\omega(n-1)} = 2b_0\int_{-c}^{c}G_3\omega'^{(3)}(\varepsilon'^{(3)(n-1)}_u)\psi'^{(n-1)}dz.$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче термоупругости с дополнительными «внешними» нагрузками (10). Решение системы (9) можно выписать в следующем рекуррентном виде:

$$
\begin{aligned}
\psi'^{(n)}(x) &= C_2^{(n)}\operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)}\operatorname{ch}(\beta x) + \\
&\qquad + \frac{1}{\beta}\left[\operatorname{sh}(\beta x)\int g'^{(n)}\operatorname{ch}(\beta x)dx - \operatorname{ch}(\beta x)\int g'^{(n)}\operatorname{sh}(\beta x)dx\right], \\
u'^{(n)}(x) &= \gamma_3\psi'^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2}\Big[-a_4L_2^{-1}\big(p' - p_\omega'^{(n-1)}\big) + \\
&\qquad + a_7L_3^{-1}\big(q' - q_\omega'^{(n-1)}\big) + \frac{a_7}{2}C_1^{(n)}x^2\Big] + C_7^{(n)}x + C_8^{(n)}, \\
w'^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2}\left[\alpha_1\int\psi'^{(n)}dx - a_7L_3^{-1}\big(p' - p_\omega'^{(n-1)}\big) + \right. \\
&\qquad \left. + a_1L_4^{-1}\big(q' - q_\omega'^{(n-1)}\big) + \frac{1}{6}a_1C_1^{(n)}x^3\right] + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}C_4^{(n)}x^2 + C_5^{(n)}x + C_6^{(n)},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1} — линейные интегральные операторы,

$$L_1^{-1}(g) \equiv \int g dx,$$

$$g'^{(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\gamma_1 h_\omega'^{(n-1)} + \gamma_2\big(p' - p_\omega'^{(n-1)}\big) + \gamma_1\left(\int\big(q' - q_\omega'^{(n-1)}\big)dx + C_1^{(n)}\right),$$

$$\beta^2 = \frac{a_1a_5\alpha_2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{a_1\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_6\alpha_2 - a_7\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{a_3a_7 - a_4a_6}{\alpha_2}, \quad \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2 \neq 0, \quad \alpha_1 = a_1a_3 - a_6a_7,$$

$$\alpha_2 = a_1a_4 - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_1a_2 - a_6^2.$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, ..., $C_8^{(n)}$ на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. В случае жёсткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце граничные условия следующие:

$$x = 0:\ w' = w'_{,x} = u' = \psi' = 0,\ x = l:\ M' = M'_{,x} = N' = \psi' = 0.$$

2. Повторное термосиловое нагружение. Пусть начиная с момента t_1 осуществляется мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями обратного знака p'', q'', изменяющимися по тому же закону, что и при нагружении из естественного состояния. Эти усилия создадут в стержне поле перемещений u'', ψ'', w'', деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $e_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $\varepsilon''^{(k)}$ и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $s_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $\sigma''^{(k)}$. При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения температура во всех точках тела остается неизменной, совпадающей с полем температуры к моменту начала разгрузки, т. е. $T_1(z) = T(z, t_1)$ и модули упругости приняли фиксированные значения $G_k(z) \equiv G_k(T_1(z))$, $K_k(z) \equiv K_k(T_1(z))$, причём соответствующие траектории нагружения по-прежнему относятся к классу простых.

Введём для всех характеристик напряжённо-деформированного состояния и нагрузки разности, в которых величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения в стержне перед разгрузкой, двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла:

$$\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\beta}^{(k)*} = \sigma_{\alpha\beta}^{\prime(k)} - \sigma_{\alpha\beta}^{\prime\prime(k)}, \quad s_{\alpha\beta}^{(k)*} = s_{\alpha\beta}^{\prime(k)} - s_{\alpha\beta}^{\prime\prime(k)}, \quad \sigma^{(k)*} = \sigma^{\prime(k)} - \sigma^{\prime\prime(k)}, \\
\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)*} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime(k)} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime\prime(k)}, \quad e_{\alpha\beta}^{(k)*} = e_{\alpha\beta}^{\prime(k)} - e_{\alpha\beta}^{\prime\prime(k)}, \quad \varepsilon^{(k)*} = \varepsilon^{\prime(k)} - \varepsilon^{\prime\prime(k)}, \\
u^* = u' - u'', \quad \psi^* = \psi' - \psi'', \quad w^* = w' - w'', \\
q^* = q' - q'', \quad p^* = p' - p''.
\end{gathered} \tag{12}$$

Для величин в (12), отмеченных звёздочкой, примем физические уравнения состояния типа (3):

$$s_{xx}^{(k)*} = 2G_k(T_k) f^{(k)*}\big(\varepsilon_u^{(k)}, T_k\big) e_{xx}^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_1^{(k)} \varepsilon^{(k)*} \ (k = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Соответствующие универсальные функции нелинейности в несущих слоях полагаем выраженными через функции пластичности при нагружении из естественного состояния:

$$f^{(k)*} \equiv f^{\prime(k)}\big(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, T_1, a_m^*\big),$$

$$f^{(k)*}\big(\varepsilon_u^{(k)}, T_1\big) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(k)*} \leqslant \varepsilon_y^{(k)*}, \\ 1 - \omega^{(k)*}\big(\varepsilon_u^{(k)*}, T_1\big), & \varepsilon_u^{\prime(k)} > \varepsilon_y^{(k)*}, \end{cases}$$

$$\omega^{(k)*} = \omega^{\prime(k)}\big(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, T_1, A_{1k}^*, \alpha_{1k}^*\big),$$

где A_{1k}^*, α_{1k}^* — экспериментальные параметры материала k-того слоя, входящие в соответствующую аппроксимационную формулу.

Физическая нелинейность заполнителя на втором полуцикле в силу отсутствия в нём остаточных деформаций по-прежнему описывается соотношениями (3).

Компоненты напряжений и деформаций со звёздочками, используя физические соотношения (13), представим в виде

$$\sigma_x^{(k)*} = \sigma_x^{(k)e*} - \sigma_x^{(k)\omega*}, \quad \sigma_{xz}^{(3)*} = \sigma_{xz}^{(3)e*} - \sigma_{xz}^{(3)\omega*}, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(k)e*} &= 2G_k e_x^{(k)*} + 3K_k \varepsilon^{(k)*}, & \sigma_x^{(k)\omega*} &= 2G_k e_x^{(k)*} \omega^{(k)*}, \\
\sigma_{xz}^{(3)e*} &= 2G_3 e_{xz}^{(3)*}, & \sigma_{xz}^{(k)\omega*} &= 2G_3 e_{xz}^{(3)*} \omega^{(3)*}.
\end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с величинами типа внутренних усилий (2), итерационные уравнения (9) для величин со звёздочками записываем в виде

$$\begin{aligned}
& a_1 u_{,xx}^{(n)*} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)*} - a_7 w_{,xxx}^{(n)*} = -p^* + p_\omega^{(n-1)*}, \\
& a_6 u_{,xx}^{(n)*} + a_2 \psi_{,xx}^{(n)*} - a_3 w_{,xxx}^{(n)*} - a_5 \psi^{(n)*} = h_\omega^{(n-1)*}, \\
& a_7 u_{,xxx}^{(n)*} + a_3 \psi_{,xxx}^{(n)*} - a_4 w_{,xxxx}^{(n)*} = -q^* + q_\omega^{(n-1)*}.
\end{aligned} \tag{15}$$

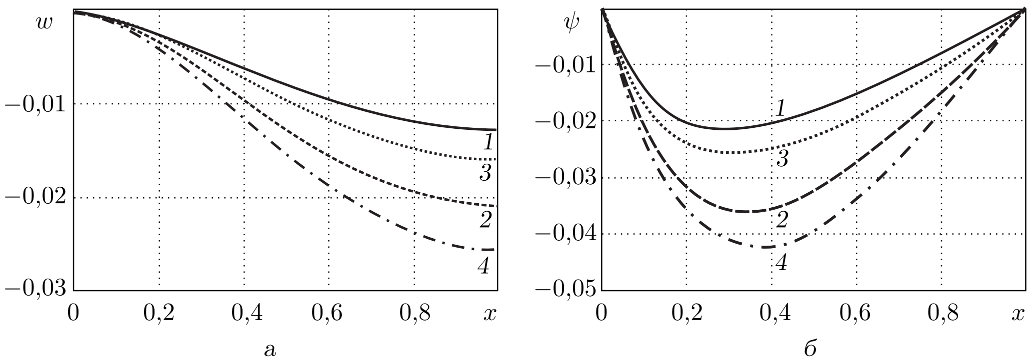
w
−0,01
−0,02
−0,03
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x
1
3
2
4
а
ψ
−0,01
−0,02
−0,03
−0,04
−0,05
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x
1
3
2
4
б

Рис. 2

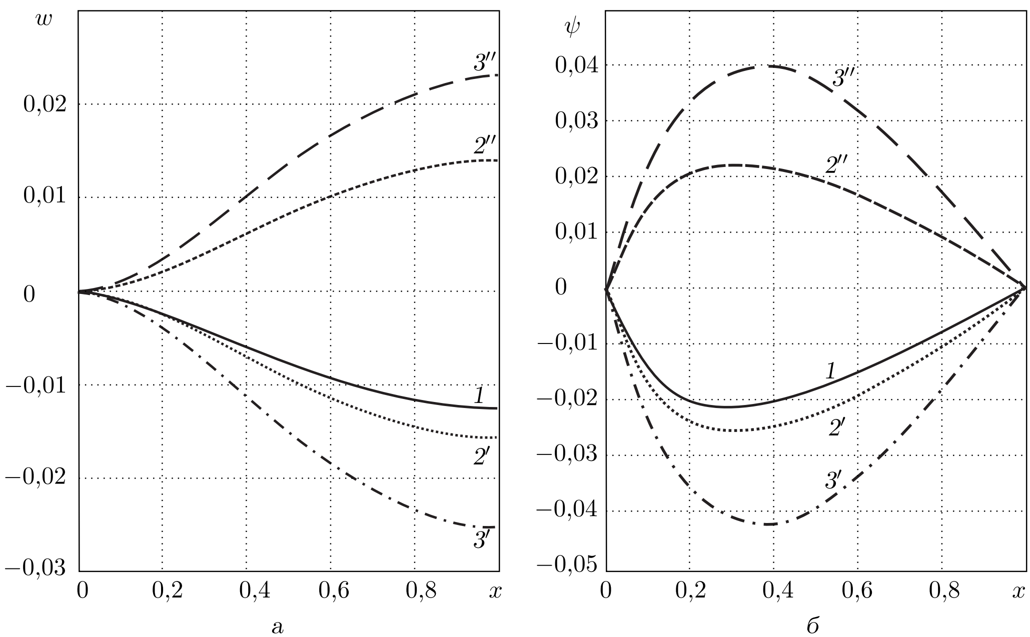
w
0,02
0,01
0
−0,01
−0,02
−0,03
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x
3″
2″
1
2′
3′
а
ψ
0,04
0,03
0,02
0,01
0
−0,01
−0,02
−0,03
−0,04
−0,05
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x
3″
2″
1
2′
3′
б

Рис. 3

Уравнения равновесия для величин со звёздочками в (15) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (9) и отличается только отсутствием температурных слагаемых в (14). Поэтому аналитическое решение (15) будет иметь рекуррентный вид типа (11).

Перемещения в процессе второго полуцикла получим из соотношений (12):

$$u''(x) = u'(x) - u^*(x),\ \psi''(x) = \psi'(x) - \psi^*(x),\ w''(x) = w'(x) - w^*(x),$$

где величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения перед разгрузкой.

Числовые результаты получены для трёхслойного стержня, слои которого выполнены из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Для описания зависимости параметров упругости несущих слоёв от температуры принимаются известные соотношения [2, 3].

Здесь и далее параметры слоёв: $h_1 = h_2 = 0{,}03$, $c = 0{,}09$; интенсивность распределённой нагрузки $q = -0{,}75$ МПа, $p = 0$. Температура принята одинаковой во всех слоях стержня. Численные результаты продемонстрировали практическую сходимость метода итераций. За искомое решение принято восьмое приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %.

На рис. 2 показаны перемещения в трёхслойном упругопластическом стержне (*а* — прогиб, *б* — относительный сдвиг в заполнителе): *1* — упругие изотермические ($T_1 = 293$ K), *2* — упругие термосиловые ($T_2 = 343$ K), *3* — упругопластические изотермические ($T_1 = 293$ K), *4* — упругопластические термосиловые ($T_3 = 343$ K) перемещения. Здесь учёт физической нелинейности материалов слоёв повышает упругие расчётные перемещения на 20 %, при нагревании на 50 K — на 22 %.

На рис. 3 кривые с одним штрихом соответствуют нагружению из естественного состояния, с двумя штрихами — повторный изгиб знакопеременной нагрузкой: *1* — перемещения упругого стержня, *2* — изотермическая упругопластичность, *3* — термоупругопластический изгиб ($T = 343$ K).

Прогиб и сдвиг при повторном нагружении уменьшаются на 3–4 %, как при «холодной», так и при «горячей» пластичности, что объясняется циклическим упрочнением материала.

Выводы. Таким образом, предложенная методика позволяет исследовать напряжённо-деформированное состояние трёхслойного физически нелинейного стержня при повторном знакопеременном нагружении в температурном поле. При этом решение новой краевой задачи строится по известному решению соответствующей задачи о нагружении из естественного состояния. Следует подчеркнуть, что приведённые решения справедливы только в области малых упругопластических деформаций при простых нагружениях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко*, Механика трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. М.: Физматлит, 2011. 560 с. [*Yu. M. Pleskachevskiy, E. I. Starovoytov, D. V. Leonenko*, Mechanics of three-layer beams and plates connected with the elastic foundation. Moscow: Fizmatlit, 2011. 560 pp.]
2. *E. I. Starovoitov, F. B. Naghiyev*, Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity, and Viscoelasticity. Toronto, New Jersey, Canada, USA: Apple Academic Press, 2012. 346 pp.
3. *А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко*, “Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм” // *Экологический вестник науч-*

ных центров ЧЭС, 2004. №1. С. 45–52. [*A. G. Gorshkov, E. I. Starovoytov, D. V. Leonenko*, “Vibrations of three-layer beams under the action of local loads of different forms” // *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov ChES*, 2004. no. 1. Pp. 45–52].

4. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.*, “Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation” // *Mech. Solids*, 2011. Vol. 46, no. 2. Pp. 291–298.
5. *А. А. Ильюшин*, Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с. [*A. A. Ilyushin*, Plasticity, Part 1: Elastic-Plastic Deformations. Moscow: Gostechizdat, 1948. 376 pp.]
6. *В. В. Москвитин*, Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с. [*V. V. Moskvitin*, Cyclic Loading of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1981. 344 pp.]

Поступила в редакцию 23/X/2012;
в окончательном варианте — 17/IV/2013.

MSC: 74C05; 74K10

CYCLIC LOADING OF THREE-LAYER BEAM IN A TEMPERATURE FIELD

E. I. Starovoitov, D. M. Savitskiy

Belarusian State University of Transport,
34, Kirova st., Gomel, 246653, Belarus.

E-mail: `edstar@mail.by`

The deformation of three-layer elastoplastic beam under the cyclic loading in a temperature field is considered. For the description of kinematics of asymmetrical on the package thickness beam the hypotheses of broken normal are accepted. The method of solving the corresponding boundary-value problems is given. The analytical solutions of thermoelasticity and thermo-elasto-plasticity problems under the direct and reverse loading are received. The numeric analysis is conducted.

Key words: *cyclic deformation, thermo-elasto-plasticity, three-layer beam.*

Original article submitted 23/X/2012;
revision submitted 17/IV/2013.

Eduard I. Starovoitov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Building Mechanics. *Dmitriy M. Savitskiy*, Postgraduate Student, Dept. of Building Mechanics.