УДК 519.233.5

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИОННОГО ТИПА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ПЛОСКИХ ТЕЛ В РЕЖИМЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОНТАКТИРОВАНИЯ

В. В. Стулин

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: stulinvv@mail.ru

Сложные аналитические решения задач циклического контактного теплообмена в форме систем интегральных уравнений приведены к критериальному виду и экономным численным анализом преобразованы в полиномиальные модели на основе применения методологии планирования эксперимента. Аппроксимация искомых функций осуществлялась по дискретным точкам с использованием формул Бонне. Вычисления показали достаточно быструю сходимость приближений и в практических расчётах, как правило, использовалось 7–11 итераций. Получены 13 критериальных уравнений регрессионного типа, содержащие наиболее важные и разнородные по составу и структуре образования характеристики квазиустановившейся стадии циклического контактного теплообмена. Оценка адекватности моделей выполнена с помощью множественного коэффициента корреляции.

Ключевые слова: *циклический контактный теплообмен, система интегральных уравнений, планирование вычислительного эксперимента, модели регрессионного типа.*

Вопросы управления и оптимизации большой группы процессов технологической теплофизики (это прежде всего процессы горячей обработки металлов давлением) связаны с необходимостью решения задач циклического контактного теплообмена (ЗЦКТ) с чередующимися во времени краевыми условиями (IV⇄II) (или (IV⇄III), (IV⇄I)) рода на контактной поверхности. В задачах подобного класса автоматически возникают вопросы учёта и описания отдельно или совместно действующих разнородных тепловых источников как в зонах контактирования объектов, так и в зонах их пространственной аккумуляции. К последним следует прежде всего отнести тепловые потоки q_v от трения тел по контактной поверхности, тепловые потоки q_w от пластического формоизменения отдельных элементов и тепловые потоки q_f от начального теплосодержания элементов контактной системы. В аналитическом плане некоторые из указанных выше задач для произвольного цикла контактирования и квазиустановившейся стадии циклического контактного теплообмена (ЦКТ) решены в [1–3].

Однако для численной проработки и последующего анализа указанные решения в том виде, в котором они представлены после интегрирования соответствующих краевых задач теплопроводности, обладают целым рядом принципиальных недостатков. В частности, итоговые решения ЗЦКТ получены не в традиционной функциональной форме, содержащей явную зависимость теплофизических характеристик от исследуемых факторов, а в виде систем

Владимир Васильевич Стулин (к.т.н., доц.), доцент, каф. высшей математики и прикладной информатики.

интегральных уравнений Фредгольма.

Соответственно, возникает необходимость использования основных положений безразмерного параметрического анализа [4] в рамках реализуемого вычислительного эксперимента с одновременным привлечением для решения поставленных задач методов теории планирования эксперимента [5–9]. Эти методы широко и успешно применяются в области чисто экспериментальных исследований. Вместе с тем априори можно полагать, что в качестве числовой информации, которая закладывается в матрицу планирования, могут использоваться не только экспериментальные данные, но и результаты пассивного численного анализа аналитических решений.

С учётом изложенного применим методику активного вычислительного эксперимента для описания температурного режима контактной системы «металлозаготовка – пограничный слой – инструмент» при действии циклического теплового источника q_f от нагретой металлозаготовки [1]. С этой целью запишем систему двух интегральных уравнений Фредгольма относительно искомых функций $f_{s0}^{(\infty)}(x)$ и $q_z^{(\infty)}(t)$, полученную в [1] для квазиустановившейся стадии ЦКТ (число циклов контактирования $m \to \infty$) при действии теплоисточника q_f:

– температурное распределение в инструменте перед началом контактирования:

$$f_{s0}^{(\infty)}(x) = \frac{2a_s}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n^2 C_n(x)}{\exp\left(a_s U_n^2 \tau^+\right) - 1} \int_0^{\tau_c} q_z^{(\infty)}(\tau) \exp\left(a_s U_n^2 \tau\right) d\tau, \qquad (1)$$

где

$$C_n(x) = \frac{\lambda_s U_n \cos U_n(l_s - x) + \alpha_s \sin U_n(l_s - x)}{U_n^2 \left[\lambda_s l_s U_n \cos U_n l_s + (\lambda_s + \alpha_s l_s) \sin U_n l_s\right]};$$

– тепловой поток в зоне контактирования:

$$\begin{aligned} q_z^{(\infty)}(t) = \frac{2a_s}{\lambda_s} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin\mu_n \Biggl\{ f_z^0 \left(\frac{H^*}{\mu_n} \cos\frac{\mu_n}{H^*} - \frac{1}{\mathtt{Bi}_s} \sin\frac{\mu_n}{H^*} \right) + \\ + \frac{1}{l_s} \int_0^{l_s} f_{s0}^{(\infty)}(\xi) \left[\frac{\mu_n}{H^* \mathtt{Bi}_s} \cos\frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_s}\right) + \right. \\ \left. + \sin\frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_s}\right) \right] d\xi \Biggr\} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{H^{*2}} \mathtt{Fo}_s \right). \qquad (2) \end{aligned}$$

В уравнениях (1), (2) введены следующие обозначения: μ_n, U_n — корни соответствующих трансцендентных уравнений, полученных в [1]; индекс z присваивается всем величинам, относящимся к заготовке, индекс s — инструменту; x, t — пространственная и временная переменные, $\mathtt{Fo}_s = a_s t / l_s^2$ — критерий Фурье.

Остальные величины являются постоянными в процессе ЦКТ: λ_s, λ_z, a_s, a_z, l_s, l_z — коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и толщина инструмента и заготовки соответственно; длительность цикла $\tau^+ = \tau_c + \tau_r$ состоит из контактного периода τ_c и неконтактного периода (паузы) τ_r; α_s — коэффициент поверхностного теплообмена между инструментом и окружающей средой (по плоскости $x = l_s$); $\alpha^+ = 1/\rho$ — условный коэффициент теплообмена в зоне контакта ($x = 0$) между инструментом и заготовкой в период контактирования τ_c (выражается через термическое сопротивление ρ пограничного слоя между контактирующими телами); $H^* = (l_z/l_s)\sqrt{a_s/a_z}$ — безразмерный критерий, характеризующий темп перестройки температурной обстановки в инструменте по отношению к заготовке; $\mathtt{Bi}_s = \alpha_s/(\lambda_s l_s)$, $\mathtt{Bi}_z^+ = \alpha^+/(\lambda_z l_z)$ — критерии Био.

Для общности теплофизического анализа выполним его в пространстве безразмерных комплексов [4]. С этой целью систему интегральных уравнений (1), (2) запишем в безразмерном виде:

$$\hat{f}_{s0}^{(\infty)}(\delta_s K_f)^r_{\min} = 2\frac{K_\varepsilon}{H^*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n\mathtt{Bi}_s^{-1}\cos\left[U_n\left(1-\delta_s K_f\right)\right]+\sin\left[U_n(1-\delta_s K_f)\right]}{U_n^2\left[U_n\mathtt{Bi}_s^{-1}\cos U_n+(1+\mathtt{Bi}_s^{-1})\sin U_n\right]}\times$$
$$\times\sum_{K_q=0}^{K_q^*-1}\mathtt{Ki}_z^{(\infty)}\left(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q\right)\left(1-\exp(-U_n^2\mathtt{Fo}_s^+)\right)^{-1}\Big(\exp\{U_n^2[\Delta\mathtt{Fo}_s^c(K_q+K_q^b)-\mathtt{Fo}_s^c]\}-$$
$$-\exp[U_n^2(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q-\mathtt{Fo}_s^c)]\exp(-U_n^2\mathtt{Fo}_s^r)\Big), \quad (3)$$

$$\mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\psi_f^{-1}(\mu_n)\sin\mu_n\Big\langle f_z^0\Big(\frac{H^*}{\mu_n}\cos\frac{\mu_n}{H^*}-\frac{1}{\mathtt{Bi}_s}\sin\frac{\mu_n}{H^*}\Big)+$$
$$+2\sin\frac{\mu_n\delta_s K_f^b}{2H^*}\sum_{K_f=0}^{K_f^*-1}\hat{f}_{s0}^{(\infty)}(\delta_s K_f)^r_{\min}\Big\{\frac{H^*}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n}{H^*}\Big[1-\delta_s\Big(\frac{K_f^b}{2}+K_f\Big)\Big]+$$
$$+\frac{1}{\mathtt{Bi}_s}\cos\frac{\mu_n}{H^*}\Big[1-\delta_s\Big(\frac{K_f^b}{2}+K_f\Big)\Big]\Big\}\Big\rangle\exp\Big(-\mu_n^2\frac{\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q}{H^{*2}}\Big). \quad (4)$$

В уравнениях (3), (4) введены следующие обозначения: U_n, μ_n — корни соответствующих характеристических уравнений, полученных в [1], явные выражения этих уравнений и функции $\psi_f^{-1}(\mu_n)$ ввиду их громоздкости здесь не приводятся; $K_\varepsilon = (\lambda_z/\lambda_s)\sqrt{a_s/a_z}$ — безразмерный критерий, характеризующий тепловую активность заготовки по отношению к инструменту; индексы f, q относятся к величинам, дискретизация которых осуществляется по пространственной переменной и времени соответственно; $\hat{f}_{s0}^{(\infty)}(\delta_s K_f)^r_{\min} = (f_s^{(\infty)}(\delta_s K_f)^r_{\min})/f_z^0$ — безразмерная минимальная температура по сечению инструмента в момент начала контактирования на квазиустановившейся стадии; f_z^0 — начальная постоянная температура заготовки; $\delta_s = \Delta l_s = l_s/K_f^*$ — длина шага разбиения толщины инструмента l_s при общем числе интервалов разбиения $K_f^* = 10$ ($K_f = 0, 1, 2, \ldots, K_f^*$); $\mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q) = \big(q_s^{(\infty)}(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q)l_z\big)\times(\lambda_z f_z^0)^{-1}$ — критерий Кирпичёва, содержащий поток взаимного теплообмена $q_s^{(\infty)}(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q)$ между заготовкой и инструментом; $\Delta\mathtt{Fo}_s^c = (a_s\Delta\tau_c)/l_s^2$ — длина (критериальная) шага разбиения временного этапа контактирования $\mathtt{Fo}_s^c$ при общем числе интервалов разбиения $K_q^* = 10$ ($K_q = 0, 1, 2, \ldots, K_q^*$); $\Delta\tau_c = \tau_c/K_q^*$; $\mathtt{Fo}_s^c = a_s\tau_c/l_s^2$, $\mathtt{Fo}_s^r = a_s\tau_r/l_s^2$, $\mathtt{Fo}_s^+ = a_s\tau^+/l_s^2$ — безразмерные числа Фурье.

Специально подобранные фиксированные числа K_f^b, K_q^b (числа Бонне) согласно применяемым формулам Бонне [10] для соответствующих десяти основных интервалов разбиения с шагом δ_s, $\Delta\mathtt{Fo}_s^c$ устанавливались численно (в нашем случае — из требования удовлетворения условиям неидеального контакта между заготовкой и инструментом в центре плана выполняются условия $0 < K_f^b < 1$, $0 < K_q^b < 1$).

Дополнительно по результатам решения системы уравнений (3), (4) рассчитывались температурные поля в отдельных элементах контактной системы как в период контакта, так и во время паузы, которые затем учитывались при составлении итоговых регрессионных моделей. Например, для инструмента — наиболее важного по соображениям эксплуатационной надежности элемента при известном тепловом потоке $q^{(\infty)}(t)$ температурные поля определялись по следующим формулам:

а) для интервала контактирования

$$T_c^*(x,t_c) = \frac{2a_s}{\lambda_s}\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 C_n(x)\exp(-a_s U_n^2 t_c)\times \\ \times\left[\int_0^{t_c} q^{(\infty)}(\tau)\exp\left(a_s U_n^2\tau\right)d\tau - \right. \\ \left. -\left[1-\exp\left(a_s U_n^2\tau^+\right)\right]^{-1}\int_0^{\tau_c} q^{(\infty)}(\tau)\exp\left(a_s U_n^2\tau\right)d\tau\right], \quad t_c\in[0,\tau_c];$$

б) для неконтактного периода

$$T_r^*(x,t_r) = \frac{2a_s}{\lambda_s}\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 C_n(x)\exp\left[-a_s U_n^2(\tau_c+t_r)\right]\times \\ \times\left[1-\exp(-a_s U_n^2\tau^+)\right]^{-1}\int_0^{\tau_c} q(\tau)\exp\left(a_s U_n^2\tau\right)d\tau, \quad t_r\in[\tau_c,\tau^+].$$

Система (3), (4) решалась методом последовательных приближений, процесс итераций заканчивался при максимальном 3%-ном расхождении двух последовательных приближений величины критерия $\mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q)$. Аппроксимация искомых функций $\hat{f}_{s0}^{(\infty)}(\delta_s K_f)_{\min}^r$, $\mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(\Delta\mathtt{Fo}_s^c K_q)$ осуществлялась по дискретным точкам с использованием формул Бонне [10], которые в совокупности составляют содержание второй теоремы о среднем значении и эффективно используются для приближенного вычисления интегралов от произведения функций, принадлежащих классу $C[0,\infty)$. Вычисления показали достаточно быструю сходимость приближений, и в практических расчётах, как правило, использовалось 7–11 итераций.

Следует особо подчеркнуть, что в работе с целью поиска более эффективного и экономного численного алгоритма использовались различные варианты обобщения формул Бонне. Обобщение основных формул Бонне [10] на дискретный промежуток $[x_0,x_n]$ $(x_i < x_{i+1}; i=0,1,\ldots,n-1)$, содержащий n частей, позволило получить две практически важные аппроксимационные формулы, которые из всех рассмотренных вариантов по числу производимых итераций оказались для нашего случая наиболее приемлемыми. Приведём указанные формулы.

1. Для монотонно убывающей положительной функции $f(x) \geqslant 0$ (этому условию соответствует температурное распределение в инструменте при $m \to \infty$) и интегрируемой $\varphi(x)$ имеем

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left[\Phi(x_0 + \Delta x(i+\bar{K})) - \Phi(x_i)\right], \quad \Phi'(x) = \varphi(x),$$

$\xi_{i+1} = x_0 + \Delta x(i+\bar{K})$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ — внутренние точки Бонне [10]; $x_i \leqslant \xi_{i+1} \leqslant x_{i+1}$; $\Delta x = (x_n - x_0)/n$, $0 \leqslant K_{i+1} \leqslant 1$ — числа Бонне для каждого $(i+1)$-го интервала; $\min\limits_i K_{i+1} \leqslant \bar{K} \leqslant \max\limits_i K_{i+1}$ $(\bar{K} = \mathrm{const})$ — число Бонне для всего промежутка $[x_0, x_n]$.

2. Для монотонно возрастающей положительной функции $f(x) \geqslant 0$ (этому условию соответствует возрастающий во времени тепловой поток в зоне контакта заготовки с инструментом при $m \to \infty$) и интегрируемой $\varphi(x)$ имеем

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left[\Phi(x_i) - \Phi(x_0 + \Delta x(i-1+\bar{K}))\right],$$

$\xi_i = x_0 + \Delta x(i-1+\bar{K})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — внутренние точки Бонне; $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$; $\Delta x = (x_n - x_0)/n$, $0 \leqslant K_i \leqslant 1$ — числа Бонне для каждого i-того интервала; $\min\limits_i K_i \leqslant \bar{K} \leqslant \max\limits_i K_i$ $(\bar{K} = \mathrm{const})$ — число Бонне для всего промежутка $[x_0, x_n]$.

При расчётах в качестве варьируемых факторов были задействованы все безразмерные комплексы (критерии), входящие в правые части уравнений (3), (4) и других уравнений в критериальной форме с параметрами оптимизации y_1, y_2, …, y_{13}, явное описание которых приводится ниже. Измеряемые физические и технологические параметры процесса, содержащиеся в критериях, а также области их достаточно широкого изменения заимствованы из различных источников [11–13] и представлены в табл. 1. Предельные значения коэффициентов теплоотдачи α, указанные в табл. 1, не могут быть достигнуты в условиях реального технологического процесса, поэтому имеют теоретическое значение: при $\alpha^+ \to \infty$ возникает идеальный тепловой контакт между контактирующими телами, а при $\alpha_s \to \infty$ температура внешней поверхности инструмента $(x = l_s)$ совпадает с температурой охлаждающей среды. На основе приведенных в табл. 1 данных вычислялись границы изменения выбранных факторов ЦКТ в безразмерной форме.

Таблица 1

Пределы варьирования физических и технологических параметров

Параметры	$a_z \cdot 10^5$	$a_s \cdot 10^5$	λ_z	λ_s	$l_z \cdot 10^3$	$l_s \cdot 10^3$	α^+	α_s	τ_c	τ^+
Размерность	м^2/с		Вт/(м·К)		м		Вт/(м^2·К)		с	
min	0,3	0,49	16,75	16,75	5	2	4187	4,2	1	5
max	0,6	0,98	33,5	33,5	20	10	∞	∞	30	50

Величины, выбранные в качестве независимых переменных (варьируемых факторов x_1, x_2, …, x_6), а также их уровни (согласно общепринятой схеме планирования экспериментов [5–9]) приведены в табл. 2.

Следует особо отметить, что факторы $x_2 = 1/\mathtt{Bi}_s$, $x_3 = K_\varepsilon$, $x_4 = H^*$, $x_6 = \mathtt{Fo}_s^+$ входят в систему уравнений (3), (4) в явном виде, а факторы $x_1 = 1/\mathtt{Bi}_z^+$, $x_5 = \tau$ — в неявном виде, так как x_1 входит одновременно в функцию $\psi_f(\mu_n)$ и характеристическое уравнение для определения корней μ_n через соотношение $\mathtt{Bi}_s^+ = K_\varepsilon/(H^*\mathtt{Bi}_z^+)$. Фактор x_5 содержится в критериях $\mathtt{Fo}_s^r = \mathtt{Fo}_s^+(1-\tau)$, $\mathtt{Fo}_s^c = \tau\mathtt{Fo}_s^+$, входящих в систему уравнений (3), (4).

Численным значениям критериев Био $\mathtt{Bi}_s$ и $\mathtt{Bi}_z^+$ соответствуют знаменатели приведенных в табл. 2 дробных выражений (столбцы 2 и 3 таблицы), в числителе указанных дробных выражений приведены соответствующие критериям Био значения безразмерных термических сопротивлений x_1, x_2. Предельные значения критериев Био ($\mathtt{Bi}_s \to \infty$, $\mathtt{Bi}_z^+ \to \infty$) имеют аналогичный теплофизический смысл, что и параметры α^+, α_s в табл. 1.

В качестве матрицы планирования выбрана матрица центрального композиционного ротатабельного униформ-планирования [5–7]. Планы такого рода для описания областей, близких к оптимуму (почти стационарной области), предпочтительнее, чем ортогональные планы, так как обладают свойством ротатабельности — равномерного распределения информации о процессе при движении от центра плана в любом направлении. Отказ от ортогонального планирования связан с определённым усложнением расчётов.

Использована ниже следующая структура плана.

1. Полуреплика полного факторного эксперимента — 2^{k-1} ($k = 6$) [5–8], заданная генерирующим соотношением $x_6 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$ и, следовательно, определяющим контрастом $1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$, содержащая 32 опыта ($x_i$ — кодовые обозначения варьируемых факторов согласно табл. 2). Возможность использования этой полуреплики обусловлена тем, что в ней остаются несмешанными линейные эффекты и парные взаимодействия [5–7].
2. Ядро плана: двенадцать «звёздных» точек с длиной звездного плеча $\alpha = 2{,}378$.
3. Центр плана: девять точек в центре плана (ввиду детерминированности результатов вычислительного эксперимента реализована одна точка).
4. Общее количество численных опытов в плане — 53.

Условия реализации численных опытов представлены в табл. 2, на основе которой составлена матрица планирования вычислительного эксперимента. Ввиду большой размерности матрицы планирования (содержит 53 строки и 42 столбца) она вместе с результатами численного эксперимента (значениями всех 13 параметров оптимизации $y_1 \div y_{13}$) в данной работе не приведена.

В качестве параметров оптимизации, обозначенных y_1, y_2, …, y_{13}, приня-

Таблица 2

Условия проведения численного эксперимента для задачи циклического контактного теплообмена с учётом инициирования теплоты нагретой металлозаготовки

Факторы (безразмерные числа и критерии)	$x_1 = \left(\mathtt{Bi}_s^+\right)^{-1}$ (термическое сопротивление в зоне контактирования)	$x_2 = \left(\mathtt{Bi}_s\right)^{-1}$ (термическое сопротивление на внутренней поверхности инструмента)	$x_3 = K_\varepsilon$ (критерий тепловой активности контактирующих тел)	$x_4 = H^*$ (температурно-геометрический критерий контактирующих тел)	$x_5 = \tau = \tau_c/\tau^+$ (скважность процесса циклического контактирования)	$x_6 = \mathtt{Fo}_s^+$ (критериальная длительность единичного цикла)
Основной уровень, (x_{i0})	$\frac{0,8}{1,25}$	$\frac{2000}{0,0001}$	2,035	9,27	0,4	61,37
Интервалы варьирования, (Δx_i)	$\frac{0,34}{2,94}$	$\frac{841}{0,00119}$	0,67	3,71	0,08	25,71
Верхний уровень, $(+1)$	$\frac{1,14}{0,88}$	$\frac{2841}{0,00035}$	2,705	12,98	0,48	87,08
Нижний уровень, (-1)	$\frac{0,46}{2,17}$	$\frac{1159}{0,00086}$	1,365	5,56	0,32	35,86
Верхняя звёздная точка, $(+2{,}378)$	$\frac{1,6}{0,625}$	$\frac{4000}{0,00025}$	3,62	18,08	0,6	122,5
Нижняя звёздная точка, $(-2{,}378)$	$\frac{0,0}{\infty}$	$\frac{0,0}{\infty}$	0,45	0,45	0,2	0,245

ты все наиболее важные и разнородные по составу и структуре образования характеристики процесса контактного теплообмена. Соответствующие обозначения и краткая характеристика параметров оптимизации y_1, y_2, …, y_{11} даются ниже:

y_1 $= \hat{f}_{s0}^{(\infty)}(0)_{\min}^{r}$ — безразмерная температура на гравюре инструмента в начальный момент контактирования на квазиустановившейся стадии;

y_2 $= \hat{T}_{fs}^{(\infty)}(0, \mathtt{Fo}_s^c)$ — безразмерная температура на гравюре в момент завершения этапа контактирования на квазиустановившейся стадии;

y_3 $= \hat{T}_{fz}^{(\infty)}(0, \mathtt{Fo}_s^c)$ — безразмерная температура контактной поверхности заготовки в момент завершения этапа контактирования на квазиустановившейся стадии;

y_4 $= \mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(0)$ — безразмерное значение теплового потока (критерия Кирпичёва) в начальный момент контактирования на квазиустановившейся стадии;

y_5 $= \mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(0)/\mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(\mathtt{Fo}_s^c)$ — коэффициент изменения теплового потока на этапе контактирования квазиустановившейся стадии процесса;

y_6 $= \hat{T}_{fz}^{(\infty)}(1, \mathtt{Fo}_s^c)$ — безразмерная температура центра заготовки в момент завершения этапа контактирования на квазиустановившейся стадии;

y_7 $= \hat{T}_{fz}^{(\infty)}(1, \mathtt{Fo}_s^c)/\hat{T}_{fz}^{(\infty)}(0, \mathtt{Fo}_s^c)$ — коэффициент изменения температуры заготовки по сечению в момент завершения этапа контактирования на квазиустановившейся стадии;

y_8 $= \hat{T}_{fz}^{(\infty)}(0, \mathtt{Fo}_s)_{\min}$ — минимальная температура контактной поверхности заготовки на этапе контактирования квазиустановившейся стадии;

y_9 $= \hat{T}_{fs}^{(\infty)}(0, \mathtt{Fo}_s)_{\max}$ — максимальная температура на гравюре на этапе контактирования квазиустановившейся стадии;

y_{10} $= \hat{T}_{fs}^{(\infty)}(0{,}0)/\hat{T}_{fs}^{(\infty)}(1{,}0)$ — коэффициент изменения температуры инструмента по сечению в начальный момент контактирования на квазиустановившейся стадии процесса;

y_{11} $= \mathtt{Ki}_z^{(1)}(0)$ — безразмерное значение теплового потока (критерий Кирпичёва) в начальный момент первого цикла.

Программой выполнения расчётов предусмотрено также определение интенсивности теплообмена между заготовкой и штампом в интервале контактирования первого цикла:

y_{12} $= \mathtt{Ki}_z^{(1)}(0)/\mathtt{Ki}_z^{(1)}(\mathtt{Fo}_s^c)$ — коэффициент изменения теплового потока на этапе контактирования первого цикла;

y_{13} $= \mathtt{Ki}_z^{(1)}(0)/\mathtt{Ki}_z^{(\infty)}(0)$ — коэффициент изменения теплового потока в начальный момент первого цикла ($m = 1$) и на квазиустановившейся стадии ЦКТ (характеризует отклонение процесса от режима единичного цикла).

Температурный режим единичного цикла при ЦКТ характеризуется тем, что в конце каждого последующего цикла температурное поле совпадает с исходным температурным распределением (перед началом цикла).

Вычисление коэффициентов b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} уравнений регрессионного типа

(полиномы второй степени)

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2, \tag{5}$$

где k — число факторов, производилось по специальной программе, составленной в среде `Microsoft Excel`. Для этого использовалась предложенная выше матрица планирования и соответствующие формулы [5]:

$$b_0 = \frac{A}{N}\left[2\lambda^2(k+1)\sum_{j=1}^{N} y_j - 2\lambda c \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j\right]; \quad b_i = \frac{c}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j;$$

$$b_{il} = \frac{c^2}{\lambda N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{lj} y_j \quad (l > i);$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N}\left\{c^2\left[(k+2)\lambda - k\right]\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j + c^2(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j - 2\lambda c \sum_{j=1}^{N} y_j\right\};$$

где $k = 6$, $N = 53$, $n_0 = 9$ (n_0 — число опытов в центре плана),

$$\lambda = \frac{kN}{(k+2)(N-n_0)} = 0{,}9034; \quad c = N \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2\right)^{-1} = 1{,}2237;$$

$$A = \left(2\lambda\left[(k+2)\lambda - k\right]\right)^{-1} = 0{,}4509.$$

По разработанной методике реализации численного эксперимента построено 13 регрессионных моделей полиномиального типа, из которых в качестве иллюстрации ниже приведено одно уравнение для y_1:

$$\begin{aligned} y_1 = {} & 0{,}07605973 - 0{,}02882247x_1 + 0{,}04878578x_2 + 0{,}01539632x_3 - \\ & - 0{,}020589x_4 + 0{,}01560497x_5 - 0{,}03950619x_6 - 0{,}00812144x_1x_2 - \\ & - 0{,}0064455x_1x_3 + 0{,}013485x_1x_4 - 0{,}00432237x_1x_5 + \\ & + 0{,}00056437x_1x_6 + 0{,}00164187x_2x_3 - 0{,}00768225x_2x_4 + \\ & + 0{,}0088865x_2x_5 - 0{,}01374812x_2x_6 - 0{,}00629544x_3x_4 + \\ & + 0{,}00859894x_3x_5 - 0{,}00587744x_3x_6 - 0{,}00386506x_4x_5 - \\ & - 0{,}00040231x_4x_6 + 0{,}00552994x_5x_6 + 0{,}01804052x_1^2 + \\ & + 0{,}00721053x_2^2 + 0{,}0099892x_3^2 + 0{,}00700192x_4^2 + \\ & + 0{,}00793489x_5^2 + 0{,}02447375x_6^2. \end{aligned}$$

Оценка адекватности представления интересующих зависимостей полиномами (5) выполнялась по обычной схеме посредством применения множественного коэффициента корреляции [5], численные значения которого находились в интервале [0,95; 1), что свидетельствует о достаточной адекватности регрессионных моделей полиномиального типа в планируемой области изменения факторов.

Таким образом, на основе разработанной методики планирования численного эксперимента построены в безразмерном виде математические полиномиальные модели изменения наиболее важных характеристик, определяющих тепловое состояние системы «заготовка – пограничный слой – инструмент» на квазиустановившейся стадии ЦКТ. Полученные модели аппроксимационного типа дают возможность в наглядной и компактной форме всесторонне проанализировать тепловой режим контактного взаимодействия двух плоских тел в безразмерном многофакторном пространстве с учётом взаимного влияния и значимости каждого из выбранных факторов, а также определить оптимальные значения параметров.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Евдокимов М. А., Стулин В. В.* Аналитическое решение задач циклического контактного теплообмена для системы двух плоских тел // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1(16). С. 119–129. [*Evdokimov M. A., Stulin V. V.* Analytic solution to cyclic contact heat exchange problems for a system of two flat bodies // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 1(16). Pp. 119–129].
2. *Стулин В. В., Крупко Е. А.* Приближенная аналитическая оценка теплового режима системы двух плоских тел в произвольном цикле контактного теплообмена // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Мат.*, 2009. № 2(10). С. 65–70. [*Stulin V. V., Krupko E. A.* Approximate analytical evaluation of the thermal regime for two flat bodies in any cycle of heat contact // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Mat.*, 2009. no. 2(10). Pp. 65–70].
3. *Стулин В. В.* Восстановление температуры и мощности тепловых источников на границе тел в пространстве преобразований Лапласа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Мат.*, 2007. № 2(6). С. 94–103. [*Stulin V. V.* Renewal of the temperature and power of heat sources on the bodies boundary in the space of Laplace transforms // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Mat.*, 2007. no. 2(6). Pp. 94–103].
4. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с. [*Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N.* Computational Heat Transfer. Moscow: Editorial URSS, 2003. 784 pp.]
5. *Налимов В. В., Чернова Н. А.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1965. 340 с. [*Nalimov V. V., Chernova N. A.* Statistical Methods of Planning Extreme Experiments. Moscow: Nauka, 1965. 340 pp.]
6. *Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 280 с. [*Adler Yu. P., Markova E. V., Granovsky Yu. V.* The design of experiments to find optimal conditions. Moscow: Nauka, 1976. 280 pp.]
7. *Ахназарова С. Л., Кафаров В. В.* Методы оптимизации эксперимента в химической технологии. М.: Высш. шк., 1985. 327 с. [*Akhnazarova S. L., Kafarov V. V.* Experiment Optimization in Chemistry and Chemical Engineering. Moscow: Vyssh. shk., 1985. 327 pp.]
8. *Кафаров В. В.* Методы кибернетики в химии и химической технологии. М.: Химия, 1976. 464 с. [*Kafarov V. V.* Cybernetic Methods in Chemistry and Chemical Technology. Moscow: Khimiya, 1976. 464 pp.]
9. *Hartmann K., Lezki E., Schëafer W.* Statistische Versuchsplanung und -auswertung in der Stoffwirtschaft. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1974. 444 pp.; русск. пер.: *Хартман К., Лецкий Э., Шефер В.* Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. М.: Мир, 1977. 552 с.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 808 с. [*Fikhtengolz G. M.* A Course on the Differential and Integral Calculus. Vol. 2. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 808 pp.]
11. *Позняк Л. А., Скрынченко Ю. М., Тишаев С. И.* Штамповые стали. М.: Металлургия, 1980. 244 с. [*Poznyak A. L., Skrynchenko Yu. M., Tishaev S. I.* Die steels. Moscow: Metallurgiya, 1980. 244 pp.]

12. *Сторожев М. В., Попов Е. А.* Теория обработки металлов давлением. М.: Машиностроение, 1977. 423 с. [*Storoghev M. V., Popov E. A.* Theory of Metal Forming. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 423 pp.]
13. *Тылкин М. А., Васильев Д. И., Рогалев А. М., Шкатов А. П., Бельский Е. И.* Штампы для горячего деформирования металлов / ред. М. А. Тылкин. М.: Высш. шк., 1977. 496 с. [*Tylkin M. A. Vasiliev D. I., Rogalev A. M. Shkatov A. P., Bel'skiy E. I.* Stamps for hot deformation of metals / ed. M. A. Tylkin. Moscow: Vyssh. shk., 1977. 496 pp.]

Поступила в редакцию 21/V/2012;
в окончательном варианте — 25/VII/2012.

MSC: 62G08

REGRESSION MODELS CONSTRUCTION FOR DESCRIBING THE THERMAL SYSTEM STATE OF TWO FLAT BODIES IN CYCLIC CONTACT

V. V. Stulin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `stulinvv@mail.ru`

Sophisticated analytical solutions of cyclic contact heat transfer problems in the form of integral equations were reduced to criteria form and converted into polynomial models based on the application of experiment planning methodology with economical numerical analysis. Approximation of the desired functions was performed by discrete points using Bonnet formulas, calculations showed quite rapid convergence of approximations and in practical calculations the number of iterations was 7–11. Thirteen criteria equations of regression type were received; the equations contain the most important and diverse in composition and formation structure characteristics of quasi-steady stage of cyclic contact heat exchange. The evaluation of the adequacy of models was made using multiple correlation coefficient.

Key words: *cyclic contact heat exchange, system of integral equations, numerical experiment planning, models of the regression type.*

Original article submitted 21/V/2012;
revision submitted 25/VII/2012.

Vladimir V. Stulin (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics and Applied Computer Science.