Краткие сообщения

Алгебра

УДК 512.572

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛЕЙБНИЦА—ПУАССОНА

С. М. Рацеев[1]***, О. И. Череватенко***[2]

[1] Ульяновский государственный университет,
432063, Россия, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.
[2] Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова,
432063, Россия, Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, д. 4.

E-mails: `ratseevsm@rambler.ru`, `chai@pisem.net`

В данной работе изучаются алгебры Лейбница и алгебры Лейбница—Пуассона с точки зрения выполнения в этих алгебрах тех или иных тождеств, рассматриваются многообразия данных алгебр. Пусть K — основное поле нулевой характеристики. Хорошо известно, что в этом случае вся информация о многообразии линейных алгебр V содержится в его полилинейных компонентах $P_n(V)$, $n \in \mathbb{N}$, где $P_n(V)$ — линейная оболочка полилинейных слов от n различных букв в свободной алгебре $K(X, V)$. В работе приводятся конструкции алгебр, порождающих класс нильпотентных многообразий алгебр Лейбница, а также конструкции алгебр, порождающих класс лейбницево нильпотентных многообразий алгебр Лейбница—Пуассона с тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Ключевые слова: *алгебра Лейбница, алгебра Лейбница—Пуассона, многообразие алгебр.*

Алгебра Лейбница над полем K — неассоциативная алгебра с умножением $\{,\}$, определяемая тождеством Лейбница $\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}$, которое превращает правое умножение в дифференцирование этой алгебры. При этом заметим, что если в алгебре Лейбница выполняется тождество $\{x, x\} = 0$, то она является алгеброй Ли. Таким образом, любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Лейбница (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографии [1]). Обозначим через $K(X, \mathbf{V})$ относительно свободную алгебру данного многообразия, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество свободных образующих. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в его полилинейных компонентах $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1,2,\ldots$, где $P_n(\mathbf{V})$ — линейное подпространство в пространстве $K(X, \mathbf{V})$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$.

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке, т.е. $\{\ldots\{\{x_1, x_2\}, x_3\}, \ldots, x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Сергей Михайлович Рацеев (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. информационной безопасности и теории управления.
Ольга Ивановна Череватенко (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

Далее понадобится следующее утверждение, которое несложно проверить.

Предложение 1. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. На декартовом квадрате $B = A \times A$ определим операции сложения и умножения $\{,\}$ элементов множества B:*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in B$. Тогда полученная алгебра B будет являться алгеброй Лейбница.

Пусть $SU_N = SU_N(K)$ — алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка N над полем K. Хорошо известно, что в случае бесконечного поля K элемент свободной ассоциативной алгебры $x_1 \wedge \ldots \wedge x_N$ является базисом тождеств алгебры SU_N [2].

Обозначим через $U_N = SU_N \times SU_N$ алгебру Лейбница, построенную с помощью предложения 1. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *В случае основного поля K нулевой характеристики элемент свободной алгебры Лейбница $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ является базисом тождеств алгебры U_N.*

Доказательство. Очевидно, что в алгебре U_N выполнено тождество

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} = 0,$$

т.е. для произвольных элементов $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_N, b_N) \in U_N$ выполнено равенство

$$\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_N, b_N)\} = \\ = ([\ldots[a_1, a_2], \ldots, a_N], b_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_N) = (0, 0). \quad (1)$$

Покажем, что $c_n(U_N) = n!$, $1 \leqslant n < N$. Для этого рассмотрим линейное соотношение

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\} = 0, \quad \alpha_\sigma \in K.$$

Зафиксируем некоторое $\sigma \in S_n$ и сделаем подстановку

$$x_{\sigma(1)} \to (0, e_{12}),\ x_{\sigma(2)} \to (e_{23}, 0), \ldots,\ x_{\sigma(n)} \to (e_{n\ n+1}, 0),$$

где e_{ij} — матричная единица. Тогда, используя равенство (1), получаем равенство $\alpha_\sigma(0, e_{1\ n+1}) = (0, 0)$. Отсюда следует, что $\alpha_\sigma = 0$. В силу произвольности выбора σ делаем вывод, что система $\{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\}$, $\sigma \in S_n$, линейно независима. Предложение доказано. $\square$

Алгебра $A = A(+, \cdot, \{,\}, K)$ над полем K называется алгеброй Лейбница—Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{,\}, K)$ — алгебра Лейбница с операцией умножения $\{,\}$ и для любых a, b, $c \in A$ выполнены правила:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad \{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b.$$

Заметим, что если в алгебре Лейбница—Пуассона выполнено тождество $\{x, x\} = 0$, то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Об алгебрах Пуассона можно найти подробную информацию в работе [3]. Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики (см., например [4]) и т.д.

Нетрудно проверить следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим декартово произведение $C = A\times A\times K$, в котором определим операцию сложения и две операции умножения $\cdot$ и $\{,\}$ элементов множества C:*

$$(x_1, x_2, \alpha) + (y_1, y_2, \beta) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \alpha + \beta),$$
$$(x_1, x_2, \alpha) \cdot (y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta),$$
$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1, 0),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in C$. Тогда полученная алгебра C будет являться алгеброй Лейбница—Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Пусть $U_N^{LP} = SU_N \times SU_N \times K$ — алгебра Лейбница—Пуассона, построенная с помощью предложения 3.

Теорема. *В случае основного поля K нулевой характеристики для алгебры Лейбница—Пуассона U_N^{LP} справедливы следующие утверждения:*

(*i*) *полилинейные тождества*

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} = 0 \tag{2}$$

порождают идеал тождеств алгебры U_N^{LP};

(*ii*) *для любого натурального n базис полилинейной компоненты $P_n(U_N^{LP})$ состоит из элементов вида*

$$\begin{gathered} x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \\ x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}\}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $k = 2, \ldots, \min\{n, N-1\}$, $\{i_1, \ldots, i_{n-k}, j_1, \ldots, j_k\} = \{1, 2, \ldots, n\}$ как множества и $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$;

(*iii*) *для любого натурального n выполнено равенство*

$$c_n(U_N^{LP}) = 1 + \sum_{k=2}^{\min\{n,N-1\}} C_n^k \cdot k!,$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Доказательство. Очевидно, что в алгебре U_N^{LP} выполняются тождества (2), т.е. для произвольных элементов (a_1, b_1, α_1), (a_2, b_2, α_2), …, $(a_N, b_N, \alpha_N) \in U_N^{LP}$ выполнены равенства

$$\begin{gathered} \{(a_1, b_1, \alpha_1), (a_2, b_2, \alpha_2), \ldots, (a_N, b_N, \alpha_N)\} = \\ = ([\ldots[a_1, a_2], \ldots, a_N], b_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_N, 0) = (0, 0, 0), \\ \{(a_1, b_1, \alpha_1), (a_2, b_2, \alpha_2)\} \cdot \{(a_3, b_3, \alpha_3), (a_4, b_4, \alpha_4)\} = (0, 0, 0). \end{gathered} \tag{4}$$

Обозначим через $\mathbf{V}$ многообразие алгебр Лейбница—Пуассона, порожденное тождествами (2). Полилинейная компонента $P_n(\mathbf{V})$ есть линейная оболочка элементов вида (3).

Покажем, что по модулю идеала тождеств алгебры U_N^{LP} элементы (3) являются линейно независимыми. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого n в алгебре U_N^{LP} выполнено нетривиальное тождество

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{n-k},j_1,\ldots,j_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_{n-k},j_1,\ldots,j_k} \cdot x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}\} = 0.$$

Пусть $i_1, \ldots, i_{n-k_0}, j_1, \ldots, j_{k_0}$ — такой набор индексов, при котором значение k_0 минимально и $\alpha_{i_1,\ldots,i_{n-k_0},j_1,\ldots,j_{k_0}} \neq 0$. Сделаем следующую подстановку:

$$x_{i_1} \to (0,0,1), x_{i_2} \to (0,0,1), \ldots, x_{i_{n-k_0}} \to (0,0,1).$$

Тогда мы получим нетривиальное тождество

$$\sum_{\sigma \in S_{k_0}} \alpha_\sigma \{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k_0)}\} = 0, \quad \alpha_\sigma \in K.$$

Зафиксируем некоторое $\sigma \in S_{k_0}$ и сделаем подстановку

$$x_{\sigma(1)} \to (0, e_{12}, 0), x_{\sigma(2)} \to (e_{23}, 0, 0), \ldots, x_{\sigma(k_0)} \to (e_{k_0\ k_0+1}, 0, 0).$$

Тогда, используя равенство (4), получаем равенство $\alpha_\sigma(0, e_{1\ k_0+1}, 0) = (0,0,0)$. Отсюда $\alpha_\sigma = 0$. Таким образом, условия (i) и (ii) доказаны. Условие (iii) следует из условия (ii). Теорема доказана. □

Работа частично поддержана РФФИ (проект № 10−01−004209−a).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с. [*Bakhturin Yu. A.* Identities in Lie algebras. Moscow: Nauka, 1985. 448 pp.]
2. *Мальцев Ю. Н.* Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц // *Алгебра и логика*, 1971. Т. 10, № 4. С. 393–400; *Mal'tsev Yu. N.* Basis for identities of the algebra of upper triangular matrices // *Algebra and Logic*, 1971. Vol. 10, no. 4. Pp. 242–247.
3. *Рацеев С. М.* Рост в алгебрах Пуассона // *Алгебра и логика*, 2011. Т. 50, № 1. С. 68–88; *Ratseev S. M.* Growth in Poisson algebras // *Algebra and Logic*, 2011. Vol. 50, no. 1. Pp. 46–61.
4. *Борисов А. В, Мамаев И. С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. М.-Ижевск: РХД, 1999. 464 с. [*Borisov A. V., Mamaev I. S.* Poisson structures and Lie algebras in Hamiltonian mechanics. Moscow, Izhevsk: RKhD, 1999. 464 pp.]

Поступила в редакцию 06/V/2012;
в окончательном варианте — 03/VII/2012.

MSC: 17A32; 17B63

ON THE NILPOTENT LEIBNIZ–POISSON ALGEBRAS

***S. M. Ratseev*[1], *O. I. Cherevatenko*[2]**

[1] Ul'yanovsk State University,
42, L. Tolstogo st., Ul'yanovsk, 432970, Russia.
[2] Ul'yanovsk State Pedagogical University,
4, pl. im. 100-letiya so dnya rozhdeniya V. I. Lenina, Ul'yanovsk, 432700, Russia.

E-mails: `ratseevsm@rambler.ru`, `chai@pisem.net`

In this article Leibniz and Leibniz–Poisson algebras in terms of correctness of different identities are investigated. We also examine varieties of these algebras. Let K be a base field of characteristics zero. It is well known that in this case all information about varieties of linear algebras V contains in its polylinear components $P_n(V)$, $n \in \mathbb{N}$, where $P_n(V)$ is a linear span of polylinear words of n different letters in a free algebra $K(X, V)$. In this article we give algebra constructions that generate class of nilpotent varieties of Leibniz algebras and also algebra constructions that generate class of nilpotent by Leibniz varieties of Leibniz–Poisson algebras with the identity $\{x_1, x_2\} \cdot \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Key words: *Leibniz algebra, Leibniz–Poisson algebra, variety of algebras.*

Original article submitted 06/V/2012;
revision submitted 03/VII/2012.

Sergey M. Ratseev (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Information Security & Control Theory.
Olga I. Cherevatenko (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.