Дифференциальные уравнения

УДК 517.938

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРИВОЙ И РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. А. Рудых, Д. Я. Киселевич

Институт математики, экономики и информатики
Иркутского государственного университета,
Россия, 664003, Иркутск, ул. Карла Маркса, 1.

E-mails: rudykh@icc.ru, dariakis@mail.ru

Рассматривается неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой вводится в рассмотрение функция плотности вероятности распределения ансамбля изображающих точек Гиббса, обладающая всеми свойствами, характерными для функции плотности вероятности, а также удовлетворяющая уравнению в частных производных первого порядка (уравнению Лиувилля). Показано, что такая функция плотности вероятности распределения существует и является единственным решением задачи Коши для уравнения Лиувилля. Рассматриваются свойства интегральной кривой и решения неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что при определённых предположениях движение вдоль траекторий системы осуществляется по максимуму функции плотности вероятности распределения, т.е. при выполнении всех требуемых условий интегральная кривая неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в любой момент времени является наиболее вероятной траекторией движения последней. Для линейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений показано, что движение вдоль траекторий осуществляется по моде функции плотности вероятности распределения, и найдена оценка её решения.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнение Лиувилля, функция плотности вероятности распределения, интегральная кривая, движение по максимуму.*

Введение. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = X(x,t), \quad x(t)\big|_{t=t_0} = x_0 \tag{1}$$

и соответствующее ей уравнение Лиувилля [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Lf(x,t), \quad f(x,t)\big|_{t=t_0} = f_0(x). \tag{2}$$

Здесь

$$L\,\cdot\, = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(X_i(x,t)\,\cdot\,) \tag{3}$$

Геннадий Алексеевич Рудых (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического анализа и дифференциальных уравнений. *Дарья Яковлевна Киселевич*, аспирант, каф. математического анализа и дифференциальных уравнений.

— оператор Лиувилля, относительно которого, исходя из специфики функции $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, будем предполагать, что L действует согласно

$$L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n); \tag{4}$$

x, $X(x,t)$— векторы из $\mathbb{R}^n$; $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество, причём $G = \Omega \times I$; $I = \{t : t_* < t < +\infty\}$; Ω — проекция G в $\mathbb{R}^n$; $f_0(x) = f(x,t_0)$ — начальная функция такая, что

$$f_0(x) \geqslant 0, \quad f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)dx = 1; \tag{5}$$

$\chi(x,t)$ — дивергенция векторного поля системы (1); $X_i(x,t) \in C_{xt}^{(1,1)}(G)$;

$$D(x(x_0,t_0,t),t) = \det\left\|\frac{\partial x(x_0,t_0,t)}{\partial x_0}\right\|$$

— якобиан отображения $x_0 \to x(x_0,t_0,t)$;

$$S(x,t) = \det\left\|\frac{\partial x_0(x,t,t_0)}{\partial x}\right\|$$

— якобиан отображения $x(x_0,t_0,t) \to x_0$; $\chi(x(x_0,t_0,t),t)$ — дивергенция векторного поля системы ОДУ (1), вычисленная вдоль её решения.

Ансамблем Гиббса системы ОДУ (1) назовём множество идентичных систем вида (1) с одинаковыми правыми частями и отличающихся друг от друга лишь начальными состояниями.

Итак, если систему (1) трактовать как закон движения изображающей точки x в $\mathbb{R}^n$, то ансамблю Гиббса системы ОДУ (1) будет соответствовать в $\mathbb{R}^n$ ансамбль изображающих точек. Пусть $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ — компактное множество, занимаемое ансамблем Гиббса системы ОДУ (1) в момент времени $t = t_0$. Каждая из изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$, двигаясь по траекториям системы ОДУ (1), переместится за время от t_0 до t в новое состояние $x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 \in \Omega_t \subset \Omega$, где $T(t,t_0)$ — оператор сдвига вдоль траекторий системы (1) [2]; $\Omega_t = \{x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}\}$ — образ множества Ω_{t_0} в силу системы ОДУ (1). Итак, имеем $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$. Функцию со свойствами (5) будем трактовать как плотность вероятности распределения ансамбля изображающих точек Гиббса системы (1) в множестве Ω_{t_0}. Текущее значение функции плотности вероятности распределения $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ определяется из задачи Коши (2) и характеризует состояние ансамбля изображающих точек Гиббса системы (1) в образе Ω_t множества Ω_{t_0}.

Будем говорить, что для системы уравнений (1) выполняется предположение А, если для всех изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$ решение $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ последней нелокально продолжимо на I и остается в области Ω при всех $t \geqslant t_0$. Под классическим решением задачи Коши (2) с оператором (3), действующим согласно (4), будем понимать функцию $f(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, которая, будучи подставленной в уравнение (2), обращает последнее в тождество.

Теорема. *Пусть для системы ОДУ (1) выполняется предположение А. Пусть $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ — компактное множество положительной меры Лебега*

$\operatorname{mes}\Omega_{t_0} > 0$, *занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ* (1) *в начальный момент времени* $t = t_0$. *Пусть каждая из изображающих точек* $x_0 \in \Omega_{t_0}$, *двигаясь по траекториям системы ОДУ* (1), *переместится за время от* t_0 *до* t *в новое состояние* $x(x_0, t_0, t) = T(t, t_0)x_0 \in \Omega_t$. *Пусть* $\Omega_t = x(x_0, t_0, t) = T(t, t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}$ — *образ множества* Ω_{t_0} *в силу системы ОДУ* (1). *Пусть ансамбль Гиббса системы ОДУ* (1) *характеризуется в множестве* $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ *плотностью вероятности распределения* $f_0(x)$ *со свойствами* (5). *Тогда для всех* $t \in I$ *существует единственное классическое решение задачи Коши* (2)–(4), *обладающее свойствами*

$$f(x,t) \geqslant 0, \quad f(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx = 1,$$

$$f(x(x_0,t_0,t),t) = f(x(t_0),t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right), \tag{6}$$

$$f(x,t) = f_0(p(x,t,t_0))\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \chi(x(p(x,t,t_0),t_0,\tau),\tau)d\tau\right), \tag{7}$$

где $p(x,t,t_0) \triangleq T^{-1}(t,t_0)x = x_0$. *Кроме того, для множества* $\Omega_t \subset \Omega$ *выполняются соотношения*

$$\operatorname{mes}\Omega_t = \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_t} \chi(x,\tau)dxd\tau + \operatorname{mes}\Omega_{t_0}, \tag{8}$$

$$\lim_{\Omega_t \to x^*} \frac{d}{dt}\ln\operatorname{mes}\Omega_t = \chi(x^*,t). \tag{9}$$

Доказательство. Так как для системы (1) выполняется предположение А, то $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями класса C^1 по совокупности x_0, t_0, t для любой точки $x_0 \in \Omega_{t_0}$ и $t \in I$. Поэтому отображение, осуществляемое оператором сдвига $T(t,t_0)$: $\Omega_{t_0} \to \Omega_t$ и задаваемое соотношениями $x(t) = x(x_0,t_0,t)$, взаимно однозначно, дифференцируемо, а следовательно, непрерывно в любой точке $x^* \in \Omega_{t_0}$. Причём линейный ограниченный оператор $V = \left\| \partial x(x_0,t_0,t)/\partial x_0\big|_{x_0=x^*} \right\|$, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, является производной Фреше нелинейного оператора $T(t,t_0)$ в точке $x^* \in \Omega_{t_0}$. Так как непрерывный образ компакта есть компакт, то из компактности Ω_{t_0} следует компактность Ω_t. Из непрерывности и взаимной однозначности отображения $T(t,t_0) : \Omega_{t_0} \to \Omega_t$ следует, что оператор сдвига определяет гомеоморфизм множества $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ в множество $\Omega_t \subset \Omega$. Ввиду того, что отображение, осуществляемое оператором сдвига $T(t,t_0) : \Omega_{t_0} \to \Omega_t$, непрерывно дифференцируемо и $D(x(x_0,t_0,t),t) \neq 0$, то для любой точки $x \in \Omega_t$ существует единственное непрерывно дифференцируемое обратное отображение $x_0 = T^{-1}(t,t_0)x$, якобиан которого $S(x,t)$, как будет показано ниже, удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) = LS(x,t), \quad S(x,t)|_{t=t_0} = 1, \tag{10}$$

где L — оператор Лиувилля, определяемый согласно (3).

Пусть в начальный t_0 и текущий t моменты времени ансамбль изображающих точек Гиббса системы уравнений (1) содержится соответственно в множествах Ω_{t_0} и $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$ и характеризуется функциями $f_0(x)$ и $f(x,t)$. Так как множества Ω_{t_0} и Ω_t гомеоморфны, вероятность того, что образ $x(x_0,t_0,t)$ произвольно выбранной точки $x_0 \in \Omega_{t_0}$ при отображении $x(x_0,t_0,t) = T(t,t_0)x_0$ принадлежит в текущий момент времени $t \in I$ множеству Ω_t, равна единице. Таким образом, имеет место равенство

$$\int_{\Omega_{t_0}} f(x_0,t_0)dx_0 = \int_{\Omega_t} f(x,t)dx. \tag{11}$$

Путём замены переменных $x \to x(x_0,t_0,t)$ преобразуем правую часть формулы (11) к виду

$$\int_{\Omega_t} f(x,t)dx = \int_{\Omega_{t_0}} f(x(x_0,t_0,t),t)D(x(x_0,t_0,t),t)dx_0.$$

Подставляя это выражение в (11), приходим к тождеству

$$\int_{\Omega_{t_0}} f(x_0,t_0)dx_0 = \int_{\Omega_{t_0}} f(x(x_0,t_0,t),t)D(x(x_0,t_0,t),t)dx_0. \tag{12}$$

Так как $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ — произвольное множество, из (12) следует зависимость

$$f(x(t_0),t_0) = f(x(x_0,t_0,t),t)D(x(x_0,t_0,t),t). \tag{13}$$

Дифференцируя (13) по t и учитывая, что $f(x(t_0),t_0) = \mathrm{const}$, имеем

$$\frac{d}{dt}(f(x(x_0,t_0,t),t)D(x(x_0,t_0,t),t)) = 0. \tag{14}$$

Расписывая производную от $D(x(x_0,t_0,t),t)$ по правилу дифференцирования определителей, нетрудно убедиться, что якобиан $D(x(x_0,t_0,t),t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}D(x(x_0,t_0,t),t) = \chi(x(x_0,t_0,t),t)D(x(x_0,t_0,t),t),\\ D(x(x_0,t_0,t),t)\big|_{t=t_0} = 1.\end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) и учитывая, что $D(x(x_0,t_0,t),t) > 0$, получим

$$\frac{d}{dt}f(x(x_0,t_0,t),t) + \chi(x(x_0,t_0,t),t)f(x(x_0,t_0,t),t) = 0. \tag{16}$$

Итак, с одной стороны, из (16) следует справедливость формулы (6). С другой стороны, в силу того, что $x(t) = x(x_0,t_0,t)$, из (16) получим уравнение Лиувилля (2). Используя соотношение (6), построим решение уравнения Лиувилля. С этой целью запишем характеристическую систему уравнений, соответствующую задаче Коши (2). Для этого к системе ОДУ (1) присоединим уравнение

$$\frac{d}{dt}f(x,t) = -\chi(x,t)f(x,t), \quad f(x,t)\big|_{t=t_0} = f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{17}$$

Разрешим n соотношений $x(t) = x(x_0, t_0, t)$ относительно n начальных состояний x_0 (что возможно, так как отображение, осуществляемое оператором сдвига $T(t, t_0)$, является гомеоморфным, более того, выполняются все условия теоремы о неявной функции). Итак, имеем $x_0 = T^{-1}(t, t_0)x \triangleq p(x, t, t_0)$. Очевидно, что $p(x, t, t_0) \in C^{(1,1)}_{xt}(G)$ и являются n независимыми первыми интегралами системы (1). Из (17) следует, что функция $f(x, t)$, вычисленная вдоль решения $x(t) = x(x_0, t_0, t)$ системы (1), удовлетворяет соотношению (6), которое может быть преобразовано к виду (7).

Покажем, что функция $S(x, t)$ удовлетворяет задаче Коши (10). Ясно, что $S(x, t) \in C^{(1,1)}_{xt}(G)$. Кроме того, якобианы $D(x(x_0, t_0, t), t)$, $S(x, t)$ являются взаимно обратными функциями, т.е.

$$D(x(x_0, t_0, t), t)S(x, t) = 1, \tag{18}$$

где $x_0 \in \Omega_{t_0}$ и $x \in \Omega_t$ связаны соотношением $x(t) = x(x_0, t_0, t)$.
Подставляя $D(x(x_0, t_0, t), t)$ из (18) в (15), приходим к справедливости (10), причём

$$S(x, t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \chi(x(p(x, t, t_0), t_0, \tau), \tau)d\tau\right). \tag{19}$$

С учётом (19) перепишем (7) в виде

$$f(x, t) = f_0(p(x, t, t_0))S(x, t). \tag{20}$$

Так как $f_0(p(x, t, t_0))$ как функция переменных x, t является первым интегралом системы ОДУ (1), а $S(x, t)$ удовлетворяет задаче Коши (10), непосредственной подстановкой легко проверить, что $f(x, t)$ является решением уравнения Лиувилля (2), причём $f(x, t) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$. С другой стороны, в силу взаимной однозначности множеств $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ и $\Omega_t \subset \Omega$, связанных соотношением $\Omega_t = T(t, t_0)\Omega_{t_0}$, и финитности $f_0(x)$ следует, что $f(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ для любого $t \in I$. Отметим, что вложение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ плотно, а $\operatorname{supp} f(x, t) = \Omega_t$ для всех $t \in I$. Тот факт, что функция $S(x, t) \in C^{(1,1)}_{xt}(G)$, определяемая формулой (19), является решением задачи Коши (10), следует из соотношения (20). Действительно, ввиду того, что функция $f_0(p(x, t, t_0)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ остается постоянной в силу системы ОДУ (1), из (20) следует, что $S(x, t)$ удовлетворяет задаче Коши (10).

Теперь покажем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)dx = 1$$

для всех $t \in I$. Выше установлено, что функция $f(x, t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (2). Поэтому, интегрируя (2) по $\mathbb{R}^n$ с учётом того, что $f(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ для любого $t \in I$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} X_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, t)dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)\chi(x, t)dx = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)dx = 0.$$

Тем самым
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx = C,$$
где $C > 0$ определяется из условия
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t_0)dx = 1.$$
Окончательно получаем, что
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx = 1$$
для любого $t \in I$.

Для завершения доказательства покажем справедливость формул (8), (9). Тот факт, что множество $\Omega_t = T(t,t_0)\Omega_{t_0}$ обладает положительной мерой Лебега $\operatorname{mes}\Omega_t > 0$, следует из цепочки равенств

$$\operatorname{mes}\Omega_t = \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_{t_0}} D(x(x_0,t_0,t),t)dx_0 = \\ = \int_{\Omega_{t_0}} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \chi(x(x_0,t_0,\tau),\tau)d\tau\right)dx_0. \quad (21)$$

Очевидно, что выражение (21) приводит к зависимости
$$\frac{d}{dt}\operatorname{mes}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \chi(x,t)dx. \quad (22)$$
Интегрируя соотношение (22) по переменной t в пределах от t_0 до t и учитывая, что $(\operatorname{mes}\Omega_t)\big|_{t=t_0} = \operatorname{mes}\Omega_{t_0}$, приходим к формуле (8). Доказательство предельного равенства (9) очевидно, если учесть, что соотношение (22) может быть преобразовано к виду
$$\frac{d}{dt}\ln\operatorname{mes}\Omega_t = \int_{\Omega_t} \chi(x,t)dx\left(\int_{\Omega_t} dx\right)^{-1}. \quad \square$$

Доказанная теорема не может служить эффективным средством построения функции плотности вероятности распределения $f(x,t)$, так как при этом необходимо в аналитическом виде иметь решение $x(t) = x(x_0,t_0,t)$ системы (1), а затем также аналитически разрешить последние соотношения относительно начальных состояний x_0. Таким образом, теорема устанавливает в рассматриваемом классе функций достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (2) для всех $t \in I$. Кроме того, как будет показано ниже, позволяет исследовать поведение интегральной кривой системы уравнений (1).

Поведение интегральной кривой. Рассмотрим вопрос о поведении интегральной кривой системы ОДУ (1). С этой целью введём функцию $g(x,t) \triangleq f_0(p(x,t,t_0)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, которая имеет вид
$$g(x,t) = f(x,t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \chi(x(p(x,t,t_0)),t_0,\tau),\tau)d\tau\right)$$

и удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}g(x,t)+\sum_{i=1}^{n}X_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}g(x,t)=0, \tag{23}$$

$$g(x,t)\big|_{t=t_0}=g_0(x)=f_0(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Предложение 1. *Пусть для системы ОДУ* (1) *выполняется предположение* A, $divX(x,t)=\chi(t)$, $f(x,t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *решение задачи Коши* (2) *с оператором* (3), *действующим согласно* (4), *причём функция* $f_0(x)=f(x,t_0)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *имеет в точке* $x_0\in\Omega_{t_0}$ *строгий глобальный экстремум* (*максимум*)

$$\max_{x\in\Omega}f(x,t_0)=f(x(t_0),t_0). \tag{24}$$

Тогда в любой момент времени $t\in I$ *имеет место соотношение*

$$\max_{x\in\Omega}f(x,t)=f(x(x_0,t_0,t),t).$$

Доказательство. С использованием соотношения (18) при сделанных предположениях относительно правых частей системы (1) запишем решение

$$f(x,t)=f_0(p(x,t,t_0))\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right) \tag{25}$$

задачи Коши (2). Определим $\max\limits_{x\in\Omega}f(x,t)$ с учетом того, что выполняются условия предложения 1, а формула (6) в данном случае представима в виде

$$f(x(x_0,t_0,t),t)=f(x(t_0),t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right). \tag{26}$$

Принимая во внимание (24), (25), (26), имеем

$$\begin{aligned}\max_{x\in\Omega}f(x,t)&=\max_{x\in\Omega}\left[f_0(p(x,t,t_0))\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right)\right]=\\&=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right)\max_{x\in\Omega}f_0(x,t)=\\&=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\chi(\tau)d\tau\right)\max_{x\in\Omega}f(x,t_0)=f(x(x_0,t_0,t),t).\quad\square\end{aligned}$$

Пример 1. Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{x}_1=-x_2,\quad \dot{x}_2=x_2\big(\sin(\ln t)+\cos(\ln t)-2\big) \tag{27}$$

с начальными условиями

$$x_1(t)\big|_{t=1}=x_1^0,\quad x_2(t)\big|_{t=1}=x_2^0. \tag{28}$$

Покажем справедливость предложения 1 для задачи Коши (27), (28). Решение задачи Коши (27), (28) имеет вид

$$x_1(t) = x_1^0 \exp\bigl(-(t-1)\bigr), \quad x_2(t) = x_2^0 \exp\bigl(t\sin(\ln t) - 2(t-1)\bigr).$$

Пусть $f_0(x_1, x_2) = C\exp\bigl(-(x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2\bigr)$, где C — постоянная, получаемая из условия

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_0(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1.$$

Тогда решением задачи Коши (2) будет функция

$$f(x_1, x_2, t) = C\exp\Bigl(-\bigl(x_1\exp(t-1) - x_1^0\bigr)^2 - \\ - \bigl(x_2\exp(2(t-1) - t\sin(\ln t)) - x_2^0\bigr)^2\Bigr)\exp\bigl(3(t-1) - t\sin(\ln t)\bigr).$$

Функция $f_0(x_1, x_2)$ имеет максимум в начальной точке $(x_1^0, x_2^0, 1)$, следовательно, согласно предложению 1, функция $f(x_1, x_2, t)$ достигает своего максимума на решении задачи Коши (27), (28), который определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, t) = 0.$$

Следствие. *Если система ОДУ* (1) *является линейной* (*в общем случае неавтономной*)

$$\dot{x} = A(t)x + h(t), \quad x(t)\big|_{t=t_0} = x_0, \tag{29}$$

то её интегральная кривая, соответствующая решению $x(t) = x(x_0, t_0, t)$, *осуществляется для любого* $t \in I$ *по моде* M *функции* $f(x,t)$, *определяемой из* (2) *с учётом* (29), *причём*

$$\hat{x}_i \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x,t)dx = x_i(t), \quad x_i(t) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} x_i^2 \cdot f(x,t)dx\right)^{1/2}.$$

Если выполняются условия предложения 1, то интегральная кривая системы ОДУ (1) в любой момент времени $t \in I$ является наиболее вероятной траекторией движения последней, т.е. осуществляется по моде M функции плотности вероятности распределения $f(x,t)$.

Пример 2. Рассмотрим линейную неавтономную систему

$$\dot{x}_1 = tx_1 + t, \quad \dot{x}_2 = -2tx_2 + t; \qquad x_1(t)\big|_{t=0} = 0, \quad x_2(t)\big|_{t=0} = 0. \tag{30}$$

Покажем, что для задачи Коши (30) выполняется следствие 1. Решением задачи Коши (30) будут функции

$$x_1(t) = \exp(t^2/2) - 1, \quad x_2(t) = -\frac{1}{2}\exp(-t^2) + \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Если $f_0(x) = (2\pi)^{-1}\exp\left(-x_1^2/2 - x_2^2/2\right)$, то задача Коши для обобщённого уравнения Лиувилля (2) имеет следующее решение:

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\exp\Big(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\big(x_1\exp(-t^2/2)+\exp(-t^2/2)-1\big)^2-\\ -\frac{1}{2}\big(x_2\exp(t^2)-\exp(t^2)/2+1/2\big)^2\Big).$$

Максимум функции $f(x,t)$ определяется из системы

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1,x_2,t)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1,x_2,t)=0$$

и достигается на решении (31). Нетрудно убедиться, что $\hat{x}_1(t)=x_1(t)$, $\hat{x}_2(t)=x_2(t)$, причём для любого $t\in[0;+\infty)$ выполняются неравенства

$$x_1(t)=\exp(t^2/2)-1\leqslant\Big(\exp(t^2)+\big(\exp(t^2/2)-1\big)^2\Big)^{1/2},$$

$$x_2(t)=-\exp(-t^2/2)+1/2\leqslant\Big(\exp(-2t^2)+\big(1-\exp(-t^2)\big)^2/4\Big)^{1/2}.$$

Предложение 2. *Если для системы ОДУ* (1) *выполняется предположение A, а $g(x,t)\in L_2(\mathbb{R}^n)$ — решение задачи Коши* (23), *причём $g_0(x)=g(x,t_0)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет в точке x_0 строгий глобальный экстремум* (*максимум*)

$$\max_{x\in\Omega}g(x,t_0)=g(x(t_0),t_0),$$

то в любой момент времени $t\in I$ имеет место соотношение

$$\max_{x\in\Omega}g(x,t)=g(x(x_0,t_0,t),t).$$

Доказательство предложения 2 аналогично доказательству предложения 1. Из предложения 2 следует, что интегральная кривая системы (1) осуществляется по траектории, на которой функция $g(x,t)$ принимает максимальное значение. Другими словами, решение $x(t)=x(x_0,t_0,t)$ задачи Коши (1) определяется из системы уравнений $(\partial/\partial x)g(x,t)=0$.

Пример 3. Для системы ОДУ

$$\begin{gathered}\dot{x}_1=(1-\exp(-x_1)/2)x_2,\quad \dot{x}_2=4\exp t+\ln(\exp x_1-1/2),\\ x_1(t)\big|_{t=0}=x_1^0,\quad x_2(t)\big|_{t=0}=x_2^0\end{gathered}\tag{32}$$

покажем справедливость предложения 2. При $f_0(x)=C\exp\big(-(x_1-x_1^0)^2-(x_2-x_2^0)^2\big)$ задача Коши (2) для обобщённого уравнения Лиувилля, соответствующего системе (32), имеет решение $f(x,t)=S(x,t)g(x,t)$, где

$$S(x,t)=\frac{a^{\operatorname{ch}t-1}(t)\exp\big(x_1-2t+d(t)\big)}{a^{\operatorname{ch}t}(t)\exp\big(-2t+d(t)\big)+1/2};$$

$$g(x,t)=C\exp\Big(-\Big[\ln\Big(\frac{1}{2}+a^{\operatorname{ch}t-1}(t)\exp\big(b(t)+d(t)\big)\Big)-x_1^0\Big]^2\Big)\times$$

$$\times \exp\Big(-\Big[\frac{x_2 - 2(t+1)\exp t}{\operatorname{ch} t} - \operatorname{sh} t \ln(a(t)) - \big(b(t)+d(t)\big)\operatorname{th} t + 2 - x_2^0\Big]^2\Big);$$

$$a(t) = \exp x_1 - 1/2, \quad b(t) = 2t(\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t)\exp t, \quad d(t) = (2\exp t - x_2)\operatorname{sh} t;$$

$x \triangleq (x_1, x_2); C$ — постоянная, определяемая из условия

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_0(x)dx = 1.$$

Определяя максимум функции $g(x,t)$ из системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x,t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} g(x,t) = 0,$$

убеждаемся,что последний достигается на решении

$$x_1(t) = \ln\Big[\frac{1}{2} + \exp\Big(2t\exp t + 2\operatorname{sh} t\big(x_2^0/2 - 1\big)\Big)\big(\exp x_1^0 - 1/2\big)^{\operatorname{ch} t}\Big],$$

$$x_2(t) = 2t\exp t + 2\exp t + 2\big(x_2^0/2 - 1\big)\operatorname{sh} t + \ln\big(e^{x_1^0} - 1/2\big)\operatorname{sh} t$$

задачи Коши (32).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Steeb W.-H.* Generalized Liouville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles // *Physica A*, 1979. T. 95, №1. C. 181-190.
2. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 331 с. [*Krasnosel'skiy M. A.* The Shift Operator along Trajectories of Differential Equations. Moscow: Nauka, 1966. 331 pp.]
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. 448 с. [*Trenogin V. A.* Functional Analysis. Moscow: Fizmatlit, 2002. 448 pp.]
4. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. шк., 1982. 285 с. [*Zubov V. I.* Dynamics of controlled systems. Moscow: Vyssh. Shkola, 1982. 285 pp.]
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с. [*Nemytskiy V. V., Stepanov V. V.* Qualitative Theory of Differential Equations. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 550 pp.]
6. *Леонов Г. А.* Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. СПб.: СПб. ун-т, 2004. 144 с. [*Leonov G. A.* Strange Attractors and Classical Stability Theory. St. Petersburg: SPb. Un-t, 2004. 144 pp.]

Поступила в редакцию 24/X/2011;
в окончательном варианте — 10/V/2011.

MSC: 34A34

PROPERTIES OF THE INTEGRAL CURVE AND SOLVING OF NON-AUTONOMOUS SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

G. A. Rudykh, D. J. Kiselevich

Institute of Mathematics, Economics and Computer Science
of Irkutsk State University,
20, Gagarin Bulvar, Karl Marks st., 664003, Russia.

E-mails: `rudykh@icc.ru, dariakis@mail.ru`

In this paper, we consider non-autonomous system of ordinary differential equations. For a given non-autonomous system, we introduce the distribution probability-density function of representative points of the ensemble of Gibbs, possessing all the characteristic properties of the probability-density function, and satisfying the partial differential equation of the first order (Liouville equation). It is shown that such distribution probability-density function exists and represents the only solution of the Cauchy problem for the Liouville equation. We consider the properties of the integral curve and the solutions of non-autonomous system of ordinary differential equations. It is shown that under certain assumptions, the motion along trajectories of the system is the maximum of the distribution probability-density function, that is, if all the required terms are satisfied, an integral curve of non-autonomous system of ordinary differential equations at any given time is the most probable trajectory. For the linear non-autonomous system of ordinary differential equations, it is shown that the motion along the trajectories is carried out in the mode of distribution probability-density function and the estimate of its solutions is found.

Key words: *system of ordinary differential equations, Liouville equation, distribution probability-density function, integral curve, maximum movement .*

Original article submitted 24/X/2011;
revision submitted 10/V/2011.

Gennady A. Rudykh (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Mathematical Analysis & Differential Equations. *Daria J. Kiselevich*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analisys & Differential Equations.