

УДК 535.14

## ПЕРЕПУТЫВАНИЕ АТОМОВ, ИНДУЦИРОВАННОЕ ДВУХМОДОВЫМ ТЕПЛОВЫМ ШУМОМ, ПРИ НАЛИЧИИ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И АТОМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

*Е. К. Башкиров, Е. Г. Мангулова*

Самарский государственный университет,  
Россия, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mails: bash@samsu.ru, mangulova-eg@mail.ru

*Рассмотрено перепутывание двух двухуровневых атомов с невырожденными двухфотонными переходами, взаимодействующих с тепловым двухмодовым полем в идеальном резонаторе. Показана возможность значительного увеличения степени атомного перепутывания при наличии атомной когерентности и прямого диполь-дипольного взаимодействия атомов.*

**Ключевые слова:** атомное перепутывание, тепловое двухмодовое поле, диполь-дипольное взаимодействие, атомная когерентность.

**Введение.** Проблема описания динамики кубитов, взаимодействующих с электромагнитными полями, является одной из наиболее актуальных проблем современной физики квантовых вычислений. Такие системы активно изучаются как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения в целом ряде экспериментальных установок: одноатомных лазерах и лазерах, ионах в резонаторах и магнитных ловушках, сверхпроводящих системах на джозефсоновских переходах, квантовых точках и других искусственных микроробъектах [1]. Такие исследования позволили создать прообразы квантовых компьютеров, работающих пока на отдельных кубитах. Дальнейший прогресс в данной области требует исследования новых физических устройств, которые можно использовать в качестве логических элементов квантовых компьютеров, для выбора оптимальных режимов работы таких систем, в том числе наиболее эффективных схем генерации и контроля перепутывания состояний кубитов, а также особенностей их релаксации. Для приложений в физике квантовых вычислений нужны максимально перепутанные чистые состояния с достаточно большим временем жизни, однако в реальных условиях квантовые системы всегда взаимодействуют с окружением. Такое взаимодействие обычно приводит к декогерентности, так что исследуемая система эволюционирует в смешанное перепутанное состояние, которое оказывается непригодным для целей квантовых вычислений. Поэтому с практической точки зрения основная задача при получении и использовании атомных перепутанных состояний заключается в том, чтобы минимизировать влияние шума. Недавно в целом ряде работ была высказана идея о том, что в некоторых случаях диссипация и шум могут, напротив, являться источником перепутывания. В частности, была показана возможность генерации перепутывания атомных систем в резонаторах, индуцированных тепловым шумом. В

---

*Евгений Константинович Башкиров (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. общей и теоретической физики. Екатерина Геннадьевна Мангулова, студент, каф. общей и теоретической физики.*

работе [2] было показано, что одномодовый тепловой шум может индуцировать атом-атомное перепутывание в системе двух двухуровневых атомов в идеальном резонаторе. Позднее аналогичное поведение было обнаружено и для атомов с многофотонными переходами [3, 4]. При этом было показано, что при двухфотонном взаимодействии атомов с тепловым полем степень перепутывания атомных состояний может значительно превосходить соответствующую величину для однофотонного взаимодействия. Позднее в целом ряде работ исследовались особенности генерации атомного перепутывания в различных обобщениях двухатомной модели Тависа—Каммингса для резонаторного поля в тепловом состоянии (см. ссылки в работе [5]).

Недавно на примере системы двух атомов, взаимодействующих как с одномодовым [9], так и с двухмодовым тепловым полем [10], было показано, что степень перепутывания атомов сильно зависит от их начального состояния. Показано, что при наличии атомной когерентности степень атомного перепутывания может заметно возрасти, а также, что степенью атомного перепутывания можно управлять, изменяя относительные фазы и амплитуды поляризованных атомов. При этом авторы не учли диполь-дипольного взаимодействия атомов. Вместе с тем в ряде работ показано, что диполь-дипольное взаимодействие может существенно увеличить степень атомного перепутывания [6–8].

В нашей работе [11] было рассмотрено влияние атомной когерентности на степень атомного перепутывания в невырожденной двухмодовой модели Тависа-Каммингса при наличии диполь-дипольного взаимодействия атомов в случае высоких степеней теплового шума (высокой температуры резонатора). При этом было показано, что при наличии диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности возможна генерация высокой степени перепутывания атомов, на порядок превосходящей степень перепутывания без учета указанных механизмов. В настоящей работе мы исследуем влияние диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности на атомное перепутывание в случае низких температур резонатора. Рассмотрение такого случая представляет также интерес и в связи с тем, что в экспериментах с одноатомными мазерами и лазерами резонаторы охлаждаются до температур порядка 0,5 К. В этом случае среднее число тепловых фотонов составляет менее 0,05.

**1. Модель и её точное решение.** Рассмотрим два идентичных двухуровневых атома, резонансно взаимодействующих с двухмодовым квантовым электромагнитным полем в идеальном резонаторе посредством невырожденных двухфотонных переходов при наличии прямого диполь-дипольного взаимодействия между атомами. В представлении взаимодействия гамильтониан такой модели можно представить в виде

$$H = \hbar g \sum_{i=1}^2 (a_1^\dagger a_2^\dagger R_i^- + R_i^+ a_1 a_2) + \hbar \Omega (R_1^+ R_2^- + R_2^+ R_1^-), \quad (1)$$

где  $a_j^\dagger$  и  $a_j$  — операторы рождения и уничтожения фотонов  $j$ -той резонаторной моды ( $j = 1, 2$ ),  $R_i^+$  и  $R_i^-$  — повышающий и понижающий оператор в  $i$ -том атоме ( $i = 1, 2$ ),  $g$  — константа невырожденного двухфотонного взаимодействия атомов с полем и  $\Omega$  — константа прямого диполь-дипольного взаимодействия атомов.

Обозначим через  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  возбужденное и основное состояния двухуровневого атома. Тогда двухатомная волновая функция может быть представлена в виде комбинации волновых векторов вида  $|\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle$ , где  $\alpha, \beta = +, -$ . Атом-полевая система в идеальном резонаторе обладает унитарной динамикой, которая в представлении взаимодействия описывается оператором эволюции вида  $U(t) = \exp(-iHt/\hbar)$ . Если система, включающая атомы и поле, находится в начальный момент времени в чистом состоянии, то ее вектор состояния в любой момент времени в представлении взаимодействия может быть представлен в виде  $|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi\rangle(0)$ . В двухатомном базисе  $|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$  оператор эволюции  $U(t)$  для модели с гамильтонианом (1) может быть записан как

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_{11} &= 1 + 2a_1 a_2 \frac{A}{\lambda} a_1^+ a_2^+, & U_{14} &= 2a_1 a_2 \frac{A}{\lambda} a_1 a_2, & U_{41} &= 2a_1^+ a_2^+ \frac{A}{\lambda} a_1^+ a_2^+, \\ U_{44} &= 1 + 2a_1^+ a_2^+ \frac{A}{\lambda} a_1 a_2, & U_{12} = U_{13} &= a_1 a_2 \frac{B}{\theta}, & U_{21} = U_{31} &= \frac{B}{\theta} a_1^+ a_2^+, \\ U_{24} = U_{34} &= \frac{B}{\theta} a_1 a_2, & U_{42} = U_{43} &= a_1^+ a_2^+ \frac{B}{\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{22} = U_{33} &= \frac{\exp\left[-i\frac{g}{2}(\alpha + \theta)t\right]}{4\theta} \times \\ &\times \left\{ [1 - \exp(i g \theta t)] \alpha + 2\theta \exp\left(i\frac{g}{2}(3\alpha + \theta)t\right) + \theta [1 + \exp(i g \theta t)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{23} = U_{32} &= \frac{\exp\left[-i\frac{g}{2}(\alpha + \theta)t\right]}{4\theta} \times \\ &\times \left\{ [1 - \exp(i g \theta t)] \alpha - 2\theta \exp\left(i\frac{g}{2}(3\alpha + \theta)t\right) + \theta [1 + \exp(i g \theta t)] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \exp\left[-i\frac{g\alpha}{2}t\right] \left\{ \cos\left(\frac{g\theta}{2}t\right) + i\frac{\alpha}{\theta} \sin\left(\frac{g\theta}{2}t\right) \right\} - 1, \\ B &= \exp\left[-i\frac{g}{2}(\alpha + \theta)t\right] [1 - \exp(i g \theta t)] \end{aligned}$$

и  $\alpha = \Omega/g$ ,  $\lambda = 2(a_1 a_2 a_1^+ a_2^+ + a_1^+ a_2^+ a_1 a_2)$ ,  $\theta = \sqrt{8(a_1 a_2 a_1^+ a_2^+ + a_1^+ a_2^+ a_1 a_2) + \alpha^2}$ .

Пусть в начальный момент времени резонаторное поле находится в двухмодовом тепловом состоянии

$$\rho_F(0) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} p_1(n_1) p_2(n_2) |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2|,$$

где  $p_i(n_i) = \bar{n}_i^{n_i}/(1 + \bar{n}_i)^{n_i}$  и  $\bar{n}_i$  — среднее число тепловых фотонов в  $i$ -той моде, а атомы в когерентных атомных состояниях вида

$$|\Psi_1(0)\rangle = \cos \theta_1 |+\rangle + e^{i\varphi_1} \sin \theta_1 |-\rangle, \quad |\Psi_2(0)\rangle = \cos \theta_2 |+\rangle + e^{i\varphi_2} \sin \theta_2 |-\rangle.$$

Здесь  $\theta_1$  и  $\theta_2$  обозначают амплитуды поляризованных атомов и  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — относительные фазы состояний двух атомов. Начальная атомная матрица плотности атомов можем быть тогда записана в виде

$$\rho_A(0) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(0) & \rho_{12}(0) & \rho_{13}(0) & \rho_{14}(0) \\ \rho_{12}^*(0) & \rho_{22}(0) & \rho_{23}(0) & \rho_{24}(0) \\ \rho_{13}^*(0) & \rho_{23}^*(0) & \rho_{33}(0) & \rho_{34}(0) \\ \rho_{14}^*(0) & \rho_{24}^*(0) & \rho_{34}^*(0) & \rho_{44}(0) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{11}(0) &= \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2, & \rho_{12}(0) &= \cos^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 e^{-i\varphi_2}, \\ \rho_{13}(0) &= \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_2 e^{-i\varphi_1}, & \rho_{14}(0) &= \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \\ \rho_{22}(0) &= \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2, & \rho_{23}(0) &= \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \rho_{33}(0) &= \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2, & \rho_{24}(0) &= \cos \theta_1 \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 e^{-i\varphi_1}, \\ \rho_{34}(0) &= \sin^2 \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 e^{-i\varphi_2}, & \rho_{44}(0) &= 1 - \rho_{11}(0) - \rho_{22}(0) - \rho_{33}(0). \end{aligned}$$

Для вычисления критерия перепутанности атомов необходимо найти редуцированную атомную матрицу плотности

$$\rho_A(t) = \text{Tr}_F U(t) \rho_F(0) \otimes \rho_A(0) U^+(t).$$

В результате с использованием явного вида оператора эволюции (2) для атомной матрицы плотности получаем

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13}^* & \rho_{23}^* & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{14}^* & \rho_{24}^* & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Явный вид матричных элементов в (3) не приведен здесь из-за их слишком громоздкого вида.

**2. Обсуждение результатов.** Для определения степени атом-атомного перепутывания будем использовать параметр Переса Хорощеких [1], который определяется как  $\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-$ , где  $\mu_i^-$  — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита (атома) матрицы (3). Для перепутанных состояний  $\varepsilon = 0$ . Для перепутанных состояний  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Максимальной степени перепутывания соответствует значение  $\varepsilon = 1$ .

Результаты численного моделирования временной зависимости параметра перепутывания для различных значений параметров модели представлено на рис. 1 и 2. На рис. 1, а, б показано временное поведение перепутывания для двухмодового теплового моля с малым средним числом фотонов в модах  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0,01$  без учета диполь-дипольного взаимодействия атомов в отсутствии (рис. 1, а) и при наличии атомной когерентности (рис. 1, б, в). На рис. 1,

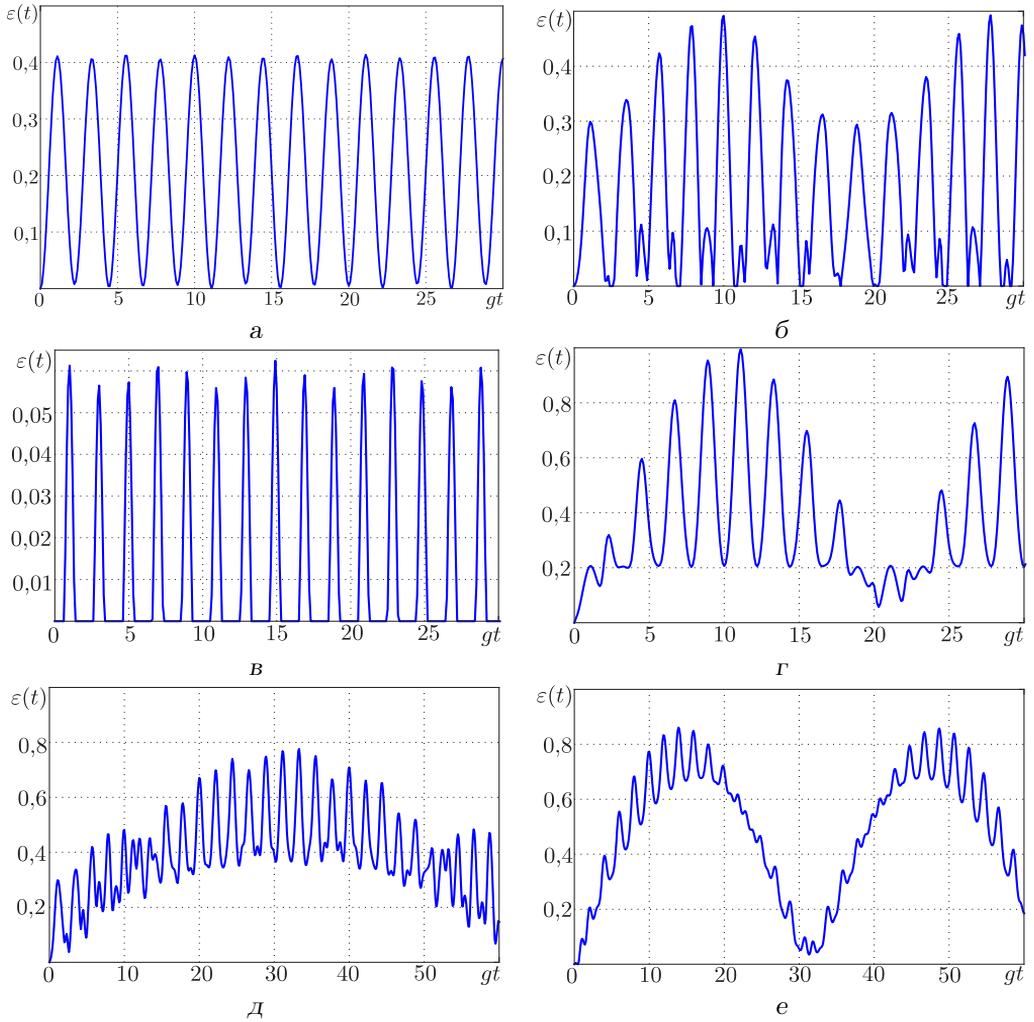


Рис. 1. Временная зависимость параметра перепутывания для параметров модели: а)  $\alpha = 0, \theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 0$ ; б)  $\alpha = 0, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4$ ; в)  $\alpha = 0, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = -\pi/4$ , г)  $\alpha = 0,1, \theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 0$ , д)  $\alpha = 0,1, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4$ , е)  $\alpha = 0,1, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = -\pi/4$ ; фазы поляризованных атомов  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и среднее число тепловых фотонов в модах  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0,01$

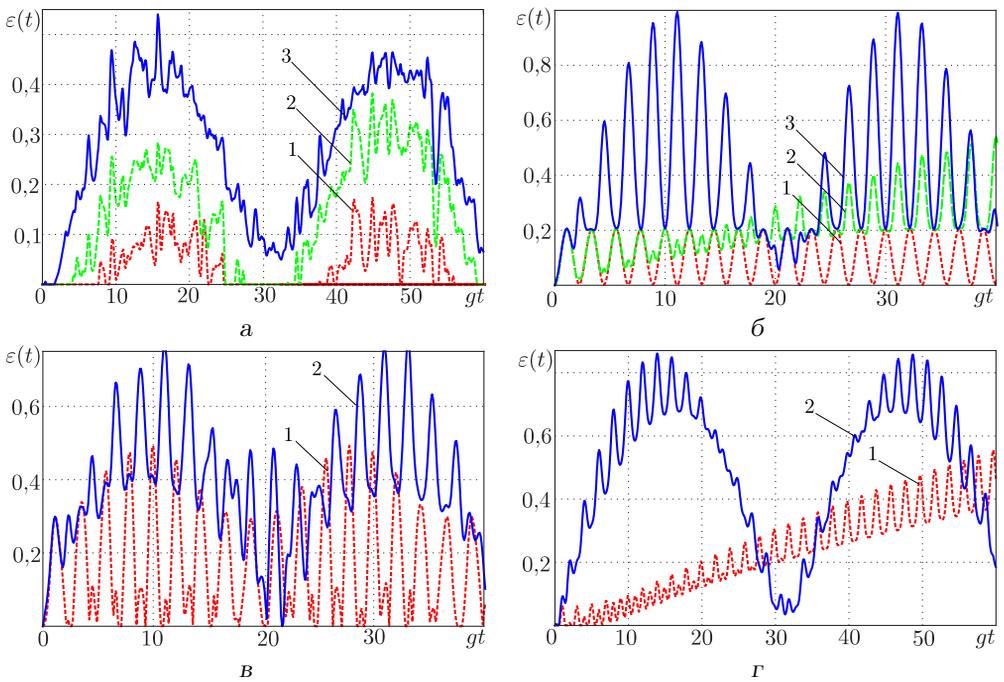


Рис. 2. Временная зависимость параметра переключения для параметров модели: а)  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1, \alpha = 0,1, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4$  и  $\Delta\varphi = 0,5\pi$  (линия 1),  $\Delta\varphi = 0,7\pi$  (линия 2),  $\Delta\varphi = \pi$  (линия 3); б, а)  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0,01, \theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 0, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и  $\alpha = 0$  (линия 1),  $\alpha = 0,01$  (линия 2),  $\alpha = 0,1$  (линия 3); в)  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0,01, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/4, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и  $\alpha = 0,01$  (линия 1),  $\alpha = 0,1$  (линия 2); г)  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0,01, \theta_1 = \pi/4, \theta_2 = -\pi/4, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и  $\alpha = 0,01$  (линия 1),  $\alpha = 0,1$  (линия 2)

г, е представлены аналогичные графики для перепутывания при наличии диполь-дипольного взаимодействия с константой диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = \Omega/g = 0,1$ . На рис. 2 показана зависимость степени перепутывания атомов от относительных фаз  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  поляризованных атомов для модели с  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 1$  и  $\alpha = 0,1$ . Из рисунков хорошо видно, что выбор определенного начального состояния атомов (степени атомной когерентности или поляризации атомов) позволяет осуществлять эффективный контроль за степенью их перепутывания. На рис. 2, б, г показана зависимость степени перепутывания атомов от константы прямого диполь-дипольного взаимодействия для некогерентного (рис. 2, б) и различных когерентных начальных состояний атомов (рис. 2, в, г). Из рисунков хорошо видно, что для любых начальных состояний атомов наличие диполь-дипольного взаимодействия приводит к увеличению степени перепутывания атомов. Физически диполь-дипольное взаимодействие можно включить, уменьшая относительное расстояние между атомами в резонаторе. Причем расстояние между атомами в резонаторе можно легко контролировать. В настоящее время в современных магнитных ловушках Пауля охлажденные ионы могут быть заперты на расстояниях порядка длины волны излучения. В этом случае параметр диполь-дипольного взаимодействия становится сравнимым с константой диполь-фотонного взаимодействия. В результате такие экспериментальные установки могут быть использованы для генерации значительной степени перепутывания атомов даже при наличии шума. Сравнение результатов, полученных нами для модели с невырожденными двухфотонными переходами, с соответствующими результатами для моделей с однофотонными переходами [8, 9] показывает, что для некоторых начальных состояний атомов в случае нелинейной модели может быть получена значительно более высокая степень атомного перепутывания.

**3. Заключение.** Таким образом, нами исследовано влияние атомной когерентности и диполь-дипольного взаимодействия на перепутывание двух атомов, взаимодействующих со слабым двухмодовым тепловым полем в идеальном резонаторе. При этом показано, что указанные механизмы могут использоваться для эффективного контроля за степенью перепутанности кубитов, необходимого при квантовой обработке информации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание 2.2459.2011).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *B. Schumacker, M. D. Westmoreland, Quantum Processes, Systems, and Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. xii+469 pp.*
2. *M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn, P. L. Knight, "Entanglement induced by a single-mode heat environment" // Phys. Rev. A, 2002. Vol. 65, no. 4, 040101(R). 4 pp., arXiv:quant-ph/0109052.*
3. *L. Zhou, H. S. Song, C. Li, "Entanglement induced by a single-mode thermal field and the criteria for entanglement" // J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2002. Vol. 4, no. 6. Pp. 425–429.*
4. *E. K. Bashkurov, "Entanglement induced by the two-mode thermal noise" // Laser Phys. Lett., 2006. Vol. 3, no. 3. Pp. 145–150, arXiv:quant-ph/0508188.*
5. *Е. К. Башкиров, М. П. Ступацкая, "Перепутывание двух атомов, взаимодействующих с тепловым электромагнитным полем" // Компьютерная оптика, 2011. Т. 35,*

- №2. С. 243–249. [E. K. Bashkirov, M. P. Stupatskaya, “Entanglement of two atoms interacting with a thermal electromagnetic field” // *Komp'yuternaya optika*, 2011. Vol. 35, no. 2. Pp. 243–249].
6. L. S. Aguiar, P. P. Munhoz, A. Vidiella-Barranco, J.A. Roversi, “The entanglement of two dipole dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field” // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2005. Vol. 7, no. 12. Pp. S769–S771.
  7. X.-P. Liao, M.-F. Fang, J.-W. Cai, X.-J. Zheng, “The entanglement of two dipole dipole coupled atoms interacting with a thermal field via a two-photon process” // *Chinese Phys. B*, 2008. Vol. 17, no. 6. Pp. 2137–2142.
  8. E. K. Bashkirov, M. P. Stupatskaya, “The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise” // *Laser Phys.*, 2009. Vol. 19, no. 3. Pp. 525–530.
  9. Y.-H. Hu, M.-F. Fang, C.-L. Jiang, K. Zeng, “Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature” // *Chinese Phys. B*, 2008. Vol. 17, no. 5. Pp. 1784–1790.
  10. Y.-H. Hu, M.-F. Fang, “Coherence-enhanced entanglement induced by a two-mode thermal field” // *Commun. Theor. Phys.*, 2010. Vol. 54, no. 3. Pp. 421–426.
  11. E. K. Bashkirov, M. S. Mastuygin, The influence of dipole-dipole interaction on entanglement in nondegenerate two-photon Tavis-Cummings model with atomic coherence, 2012. 10 pp., arXiv: 1210.3685 [quant-ph]

Поступила в редакцию 13/XI/2012;  
в окончательном варианте — 27/III/2013.

MSC: 81V80, 94A17

## ENTANGLEMENT INDUCED BY TWO-MODE THERMAL NOISE TAKING INTO ACCOUNT THE DIPOLE-DIPOLE INTERACTION AND ATOMIC COHERENCE

*E. K. Bashkirov, E. G. Mangulova*

Samara State University,  
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mails: bash@samsu.ru, mangulova-eg@mail.ru

*The entanglement of two two-level atoms with the nondegenerate two-photon transitions interacting with two-mode thermal field in lossless cavity has been considered. The possibility of entanglement degree growth in the presence of an atomic coherence and direct dipole-dipole interaction of atoms has been derived.*

**Key words:** *atomic entanglement, two-mode thermal field, dipole-dipole interaction, atomic coherence.*

Original article submitted 13/XI/2012;  
revision submitted 27/III/2013.