УДК 517.956.3

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ СМЕШАННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: elenakozlova.sstu@gmail.com

Рассмотрена задача Коши для системы гиперболических уравнений, содержащей смешанную производную. Для различных случаев совершен переход от исходной системы уравнений к системе треугольного или диагонального вида, допускающей расщепление уравнений. Получены задачи Коши для отдельных уравнений, в том числе неоднородных.

Ключевые слова: *задача Коши, система гиперболических уравнений, смешанная производная.*

Рассматривается система уравнений

$$u_{tt} + 2Bu_{xt} + Cu_{xx} = 0, \tag{1}$$

где B, C — постоянные коммутативные матрицы второго порядка; $u(x,t)$ — двумерная вектор-функция. Для обеспечения гиперболичности [1] системы (1) для собственных значений матриц B и C полагается, что $b_i^2 - c_i > 0$, $i = 1, 2$.

Для системы (1) ставится задача Коши с начальными условиями:

$$u(x{,}0) = \varphi^0(x), \quad u_t(x{,}0) = \psi^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Здесь $\varphi^0(x)$, $\psi^0(x)$ — двумерные вектор-функции.

Известно [2], что структуры двух коммутирующих матриц связаны. Поэтому для каждой матрицы можно найти все коммутирующие с ней матрицы (задача Фробениуса). Далее этот факт используется для преобразования системы (1).

Рассмотрим случай, когда матрица B имеет различные собственные значения $b_1 \neq b_2$. В этом случае матрица C является простой и приводится к диагональному виду тем же преобразованием подобия, что и B: $S^{-1}BS = J_B = \operatorname{diag}\{b_1, b_2\}$, $S^{-1}CS = J_C = \operatorname{diag}\{c_1, c_2\}$, где $\det S \neq 0$. Замена $u = Sw$ в (1) приводит к системе уравнений

$$w_{tt} + 2J_B w_{xt} + J_C w_{xx} = 0$$

и условиям при $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$w(x{,}0) = S^{-1}\varphi^0(x) = \tilde{\varphi}^0(x), \quad w_t(x{,}0) = S^{-1}\psi^0(x) = \tilde{\psi}^0(x). \tag{2}$$

В этом случае система распадается на два уравнения и для k-той компоненты вектор-функции $w(x,t)$ получаем задачу Коши вида

$$(w_k)_{tt} + 2b_k(w_k)_{xx} + c_k(w_k)_{xx} = 0, \quad k = 1, 2,$$
$$w_k(x{,}0) = \tilde{\varphi}_k^0(x), \quad (w_k)_t(x{,}0) = \tilde{\psi}_k^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Прямые $x - p_k t = C_1$, $x - q_k t = C_2$ — характеристики приведённого уравнения ($p_k = b_k - ((b_k)^2 - c_k)^{1/2}$, $q_k = b_k + ((b_k)^2 - c_k)^{1/2} \in \mathbb{R}$).

Елена Александровна Козлова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Решение полученной начальной задачи в треугольнике $\Delta_k = \{q_k t \leqslant x \leqslant p_k t + l,\ 0 \leqslant t \leqslant l\gamma_k\}$, где $\gamma_k = (q_k - p_k)^{-1}$, строится аналогично решению задачи Коши для волнового уравнения [3]:

$$w_k(x,t) = \gamma_k\left(q_k\tilde{\varphi}_k^0(x - p_k t) - p_k\tilde{\varphi}_k^0(x - q_k t) + \int_{x-q_k t}^{x-p_k t}\tilde{\psi}_k^0(z)dz\right).$$

Возвращаясь к исходной функции $u(x,t)$ с помощью обратной замены $u = Sw$, можно получить искомое решение начальной задачи для системы (1) в области $\Delta_1 \bigcap \Delta_2$.

Рассмотрим теперь случай, когда матрица B имеет одно собственное значение b алгебраической кратности 2, его геометрическая кратность — 2 или 1 [2].

Если нормальная жорданова форма матрицы B имеет вид $J_B = bE$, то любая матрица, подобная B, будет диагональной. Выберем матрицу перехода S ($\det S \neq 0$) так, чтобы она приводила C к нормальной жордановой форме J_C. Если матрица C — простая, то J_C является диагональной и решение задачи Коши полностью аналогично предыдущему случаю. Если же $J_C = cE + H$ — жорданова клетка порядка 2, где $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то получаем систему

$$\begin{cases} (w_1)_{tt} + 2b(w_1)_{xt} + c(w_1)_{xx} = 0, \\ (w_2)_{tt} + 2b(w_2)_{xt} + c(w_2)_{xx} = -(w_1)_{xx} \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями (2), $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q_2 = q$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

Для первого уравнения системы (3) решение задачи Коши имеет тот же вид, что и в предыдущем случае. Правая часть второго уравнения системы (3) известна и зависит от w_1. Уравнения системы (3) имеют одинаковые области построения решений ($\Delta_1 = \Delta_2$). Поэтому необходимо найти в этой области w_2 в виде суммы решения однородного уравнения, удовлетворяющего неоднородным условиям, и частного решения соответствующего неоднородного уравнения с однородными условиями. Формула решения задачи Коши для неоднородного уравнения

$$w_{tt} + 2bw_{xt} + cw_{xx} = f(x,t)$$

имеет такой вид:

$$w(x,t) = \gamma\left(q\tilde{\varphi}^0(x - pt) - p\tilde{\varphi}^0(x - qt) + \int_{x-qt}^{x-pt}\tilde{\psi}^0(z)dz + \right.$$
$$\left. + \int_0^t d\tau \int_{x-q(t-\tau)}^{x-p(t-\tau)} f(s,\tau)ds\right).$$

Вычислим $w_1(x,t)$ и подставим её в правую часть второго уравнения системы:

$$w_2(x,t) = \gamma\left(q\tilde{\varphi}_2^0(x - pt) - p\tilde{\varphi}_2^0(x - qt) + \int_{x-qt}^{x-pt}\tilde{\psi}_2^0(z)dz\right) +$$
$$+ \gamma^3(p+q)\big(\tilde{\varphi}_1^0(x - pt) - \tilde{\varphi}_1^0(x - qt)\big) + 2\gamma^3\int_{x-qt}^{x-pt}\tilde{\psi}_1^0(z)dz -$$
$$- \gamma^2 t\big(q\tilde{\varphi}_1^{0\prime}(x - pt) + p\tilde{\varphi}_1^{0\prime}(x - qt) + \tilde{\psi}_1^0(x - pt) + \tilde{\psi}_1^0(x - qt)\big)$$

и вернёмся к функции $u(x,t)$.

Теперь предположим, что нормальная жорданова форма матрицы B имеет вид $J_B = bE + H$. Матрица перехода S ($\det S \neq 0$) должна приводить B к нормальной жордановой форме $J_B = S^{-1}BS$. Обозначим $J_C = S^{-1}CS$. Так как B, C — коммутативные матрицы, то и J_B, J_C — коммутативные, причём [2] $J_C = cE + \alpha H$. Здесь α в зависимости от структуры C может быть равным нулю или отличным от нуля.

Тогда исследуемая система перейдет в систему

$$\begin{cases} (w_1)_{tt} + 2b(w_1)_{xt} + c(w_1)_{xx} = 0, \\ (w_2)_{tt} + 2b(w_2)_{xt} + c(w_2)_{xx} = -2(w_1)_{xt} - \alpha(w_1)_{xx}. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой для решения задачи Коши для неоднородного уравнения и подставив в правую часть $w_1(x,t)$, получим выражение для $w_2(x,t)$:

$$\begin{aligned} w_2(x,t) = \gamma\left(q\tilde{\varphi}_2^0(x-pt) - p\tilde{\varphi}_2^0(x-qt) + \int_{x-qt}^{x-pt}\tilde{\psi}_2^0(z)dz\right) + \\ + \alpha\gamma^3(p+q)\bigl(\tilde{\varphi}_1^0(x-pt) - \tilde{\varphi}_1^0(x-qt)\bigr) + 2\alpha\gamma^3\int_{x-qt}^{x-pt}\tilde{\psi}_1^0(z)dz - \\ - \alpha\gamma^2 t\bigl(q\tilde{\varphi}_1^{0\prime}(x-pt) + p\tilde{\varphi}_1^{0\prime}(x-qt) + \tilde{\psi}_1^0(x-pt) + \tilde{\psi}_1^0(x-qt)\bigr) - \\ - 4\gamma^3 pq\bigl(\tilde{\varphi}_1^0(x-pt) - \tilde{\varphi}_1^0(x-qt)\bigr) - 2\gamma^3(p+q)\int_{x-qt}^{x-pt}\tilde{\psi}_1^0(z)dz + \\ + 2\gamma^2 t\bigl(pq\tilde{\varphi}_1^{0\prime}(x-pt) + pq\tilde{\varphi}_1^{0\prime}(x-qt) + p\tilde{\psi}_1^0(x-p^1t) + q\tilde{\psi}_1^0(x-qt)\bigr). \end{aligned}$$

Возврат к $u(x,t)$ осуществляется с помощью замены $u = Sw$.

Отметим, что коммутирующие матрицы B и C третьего и выше порядков не всегда возможно привести к жордановой форме одним преобразованием подобия. В этом случае следует приводить матрицы к треугольному виду (см., например, [4]).

Рассмотренное здесь уравнение, содержащее смешанную производную, возникает при описании малых колебаний движущегося гибкого стержня [5, 6].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.; *Bitsadze A. V.* Some Classes of Partial Differential Equations / Advanced Studies in Contemporary Mathematics. Vol. 4. New York: Gordon and Breach, 1988. 520 pp.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*Gantmakher F. R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka, 1988. 549 pp.]
3. *Тихонов А. Н, Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 224 с.; *Tikhonov A. N., Samarskii A. A.* Equations of Mathematical Physics / Dover Books on Physics. New York: Dover Publications, 1990.
4. *Marcus M., Minc H.* A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Boston: Allyn and Bacon, 1964. 198 pp.; *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 224 с.
5. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 224 с. [*Svetlitskii V. A.* The Mechanics of Flexible Rods and Filaments. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 224 pp.]
6. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1980. 243 с. [*Skorobogat'ko V. Ya.* Studies in Qualitative Theory of Partial Differential Equations. Kiev: Naukova Dumka, 1980. 243 pp.]

Поступила в редакцию 01/VII/2012;
в окончательном варианте — 15/XI/2012.

MSC: 35L51

CAUCHY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC SYSTEM WITH MIXED DERIVATIVE

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `elenakozlova.sstu@gmail.com`

Cauchy problem for the hyperbolic system with mixed derivative is considered. The given system is transformed to the triangular or diagonal form for the further equations separation. The Cauchy problem for each equation (homogeneous or inhomogeneous) is obtained.

Key words: *Cauchy problem, hyperbolic system, mixed derivative.*

Original article submitted 01/VII/2012;
revision submitted 15/XI/2012.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.