

## Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ  
«ЗДАНИЕ – ФУНДАМЕНТ – ГРУНТОВОЕ ОСНОВАНИЕ»

Г. Н. Гусев, А. А. Ташкинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
614990, Россия, Пермь, Комсомольский пр-т, 29.

E-mails: gusev@project-center.ru, rector@pstu.ru

*Рассмотрены проблемы определения толщины сжимаемого слоя основания при математическом моделировании систем «здание – фундамент – основание» на фундаментных плитах больших размеров. Представлены результаты определения толщины сжимаемого основания численными методами и по аналитической методике.*

**Ключевые слова:** линейно-деформируемое полупространство, двухпараметрическое упругое основание, вычислительный эксперимент, САЕ ANSYS.

Согласно решениям теории упругости осадка  $S_{\text{упр}}$  однородного линейно-деформируемого полупространства задаётся соотношением

$$S_{\text{упр}} = \frac{w}{C} q \sqrt{F}, \quad (1)$$

где  $q$  – удельное давление;  $F$  – площадь, на которую действует распределённая нагрузка;  $w$  – интегральный коэффициент, постоянный для данной формы площади основания и местоположения рассматриваемой точки;  $C = E/(1 - \nu^2)$ ;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Из (1) следует, что при фиксированном давлении на основание теоретическая величина вертикальных перемещений в центре фундаментной плиты неограниченно возрастает при увеличении площади самого основания.

Однако в реальных условиях при однородных основаниях для площадей фундаментных плит больше 50 м<sup>2</sup> вертикальные перемещения существенно меньше теоретических [1]. Причем расхождение экспериментальных и теоретических значений (1) перемещений в центре приложения нагрузки увеличивается с ростом площади фундамента [1].

Для устранения вычислительного эффекта влияния площади фундамента на вертикальные перемещения при конечно-элементном моделировании в расчёт вводится не упругое полупространство, а сжимаемый слой конечной толщины, ниже которого основание в модели принимается как несжимаемое. При этом толщина слоя, обеспечивающая совпадение расчётных осадок с фактическими (полученными экспериментальным путем), не совпадает с той глубиной, где согласно опытным данным уже не фиксируются перемещения под нагрузкой. Таким образом, проблема определения расчётной толщины сжимаемого слоя при моделировании поведения фундаментной плиты большой площади нетривиальна.

Для расчёта деформируемых фундаментных плит на трехмерном упругом основании применяется модель двухпараметрического упругого основания, в котором отсутствует отмеченный выше эффект влияния площади действующей нагрузки.

*Георгий Николаевич Гусев*, аспирант, каф. механики композиционных материалов и конструкций. *Анатолий Александрович Ташкинов* (д.ф.-м.н., проф.), ректор.

Для оценки вертикальных перемещений в центральной области фундаментной плиты достаточно большой площади при почти периодическом (в центральной области) опирании на неё колонн каркаса здания может быть использовано решение следующей модельной задачи. Бесконечная пластинка покоится на упругом основании и несет равноотстоящие и равные нагрузки  $P$ , из которых каждая распределена равномерно по площади  $u \cdot v$  прямоугольника (рис. 1).

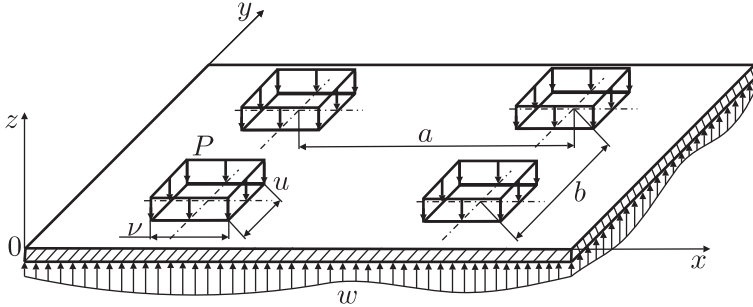


Рис. 1. Бесконечная пластинка на упругом основании

Вертикальные перемещения  $w$  представляются рядом:

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{2n\pi y}{b}; \quad (2)$$

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{D\gamma_{mn}^4 + k}; \quad \gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2; \quad \alpha_m = \frac{2m\pi}{a}; \quad \beta_n = \frac{2n\pi}{b};$$

$$a_{mn} = \frac{4P\varepsilon_{mn}}{\pi^2 mn uv} \cdot \sin \frac{m\pi u}{a} \cdot \sin \frac{n\pi v}{b}.$$

Здесь  $a, b$  — расстояния между центрами приложения нагрузок по осям  $x, y$  соответственно;  $D$  — цилиндрическая жесткость пластинки;  $\varepsilon_{mn} = 1$  при  $m \neq 0, n \neq 0$ ;  $\varepsilon_{mn} = 0,5$  при  $m \neq 0, n = 0$  (или  $m = 0, n \neq 0$ );  $\varepsilon_{mn} = 0,25$  при  $m = 0, n = 0$ .

Частный случай  $k = 0$  отвечает равномерному распределению реакции основания, т.е. схеме «опрокинутого безбалочного перекрытия» [2], нагруженного равномерно с интенсивностью  $q = P/ab$ . Из структуры выражений (2) видно, что введение коэффициента постели  $C_1$  вместо  $k$  как основной деформационной характеристики двухпараметрического упругого основания, отвечающей за интенсивность вертикальной реакции в основании [3], приводит к уменьшению прогибов в пластинке. Согласно исследованиям [4, 5], для определения прогибов в пластинке в модели двухпараметрического упругого основания можно принять второй коэффициент постели  $C_2$ , отвечающий за интенсивность сдвиговых усилий в основании, близким или равным нулю.

Определение коэффициентов постели  $C_1$  и  $C_2$  для решения описанной задачи проводится по методике П. Л. Пастернака [3]. Предложен следующий вычислительный эксперимент по определению данных коэффициентов (рис. 2). Решается задача о вдавливании жесткого штампа радиусом  $r$ , находящегося под действием вертикальной нагрузки  $N$ , приложенной с эксцентриситетом  $e_0$  и вызывающей в нижележащем упругом полупространстве под штампом по преимуществу сжимающие напряжения. Учитывая, что полупространство согласно предположению считается линейно деформируемым, можно внецентричную нагрузку  $N$  заменить центральной нагрузкой  $N$  и моментом  $M = e_0 N$ .

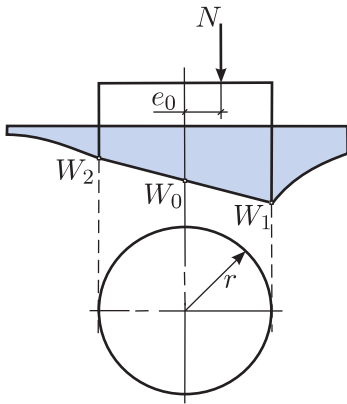


Рис. 2. Схема вычислительно-экспериментального определения коэффициентов постели

с эксцентриситетом  $e_0$ , определить коэффициенты постели  $C_1$  и  $C_2$  для оснований разной жёсткости.

Задача о вдавливании штампа численно решалась с помощью программного комплекса ANSYS. Основание под штампом представлялось изотропным упругим телом. В пользу адекватности применяемой упругой модели говорит тот факт, что решения аналогичных задач в теории упругости давали близкие к практическим результаты [4].

В процессе решения задачи о вдавливании штампа варьировались значения нагрузки  $N$  и эксцентриситета  $e_0$ . Были получены значения коэффициентов постели для оснований различной жёсткости.

Далее, подобно тому, как это делается в методе эквивалентного слоя основания (СНиП 2.02.01-83\* «Основания зданий и сооружений»), расчётную толщину сжимаемого слоя основания при моделировании системы «здание – фундамент – основание» возможно определить по результатам расчётов из условия равенства вертикальных перемещений под колонной в центре фундамента, полученной при моделировании основания линейно деформируемой средой, и вертикальных перемещений в том же месте, полученных на основе модели плиты на двухпараметрическом упругом основании [3].

Рассматриваемый подход был использован при конечно-элементном моделировании поведения многоэтажного здания на плитном фундаменте большой площади. Здание – каркасное, монолитное, состоит из трех секций, стоящих на отдельных плитных фундаментах. Фундамент секции здания – монолитная железобетонная плита на естественном основании под сетку колонн. Толщина фундаментной плиты в каждой секции 1 м, размеры секции в плане  $\approx 30 \times 30$  м. Сетка стоящих на плитах колонн неравномерная с шагом от 4 м до 6 м, нагрузка на колонны варьируется от 2000 кН до 7000 кН.

В ходе решения поставленной задачи на программном комплексе ANSYS была сформирована конечно-элементная модель системы «здание – фундамент – основание».

Модули упругости  $E_{oi}$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_{oi}$  оснований секций здания считаются постоянными в пределах сжимаемой толщи  $H_{ci}$ . Значения осредненных величин модулей упругости  $E_{oi}$ , коэффициентов Пуассона  $\nu_{oi}$  и мощности сжимаемой толщи  $H_c$  определяются согласно соответствующим формулам приложений 2 и 4 СНиП 2.02.01-83\* «Основания зданий и сооружений» и положений СП 50-101-2004 «Проектирование и устройство оснований и фундаментов зданий и сооружений».

При заданных коэффициентах постели  $C_1$  и  $C_2$  строго аналитически можно определить вертикальные перемещения  $w_0$  в центре штампа и его угол поворота относительно горизонтальной оси –  $\alpha_0$  [3]:

$$M = M_{шт} + M_{пл} = \frac{\pi r \alpha_0 s^3}{4} \left[ \xi_0^3 + \frac{4K_2(\xi_0)\xi_0^2}{K_1(\xi_0)} \right] C_1, \quad (3)$$

где  $s = \sqrt{C_1/C_2}$ ,  $\xi_0 = r/s$ ;  $K_0$  и  $K_1$  – модифицированные функции Бесселя второго рода. Из выражения (3) определяется угол поворота штампа и максимальное краевое напряжение в основании:

$$\sigma_{гр} = r \alpha_0 C_1 < M/W = 4M/(\pi r^3). \quad (4)$$

Выражения (3) и (4) дают возможность решить обратную задачу: по измеренным вертикальным перемещениям в основании штампа и углу поворота вследствие действия нагрузки, приложенной к нему

Полученные в расчётах методом конечных элементов системы «здание – фундамент – основание» вертикальные перемещения фундаментных плит здания составили  $w^{\max} = 6,1$  см (рис. 3).

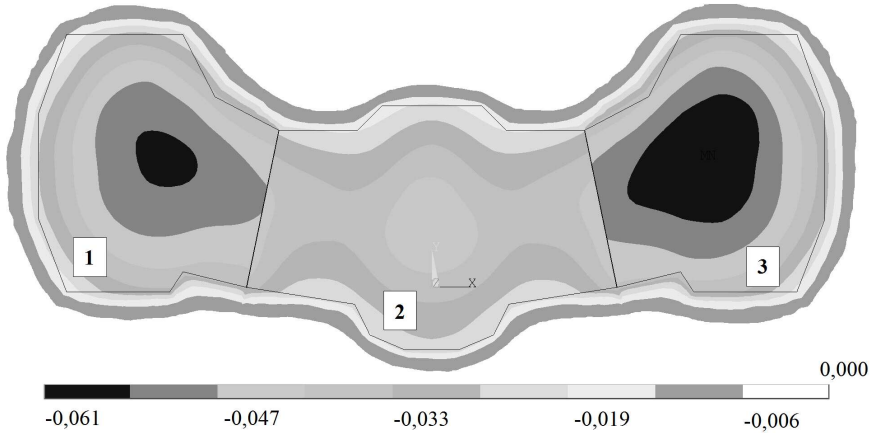


Рис. 3. Вертикальные перемещения (изополя) в основании фундаментной плиты, м. Цифрами обозначены секции фундаментной плиты  $U_{z \max} = 6,1$  см

При оценке вертикальных перемещений описанным выше аналитическим методом, учитывая, что в соответствии с соотношением (2) перемещение обратно пропорционально площади ячейки, принята сетка колонн  $5 \times 4$  м. Наибольшие вертикальные перемещения основания по расчёту выявлены в центральной части фундаментной плиты третьей секции здания, под колонной, несущей нагрузку 6750 кН, и составляют  $w^{\max} = 5,5$  см, что весьма близко к полученному численным путем результату.

Различие величин наибольших вертикальных перемещений основания, полученных по схеме сжимаемого слоя численно на программном комплексе ANSYS и вычисленных по аналитическим формулам для модели плиты на упругом двухпараметрическом основании, составляет 10 %, что подтверждает правильность выбора расчётной толщины сжимаемого слоя при решении задачи методом конечных элементов.

Все выкладки, начиная с определения первого коэффициента постели основания  $C_1$ , проводились в сторону завышения возможных перемещений фундаментной плиты. Поэтому полученные значения являются оценками наибольших вертикальных перемещений при принятых усредненных значениях коэффициентов постели.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Береснев А. С., Большаков А. Ю., Гусев Г. Н., Коркодинов В. В., Пименов Б. Н. Расчёт осадок многоэтажных зданий на гибких плитных фундаментах большой площади // *Международный журнал по расчёту гражданских и строительных конструкций*, 2008. Т. 4, № 2. С. 34–34. [Beresnev A. S., Bol'shakov A. Yu., Gusev G. N., Korkodinov V. V., Pimenov B. N. Computation of settlements of high-rise building on a flexible large-area plate foundation // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2008. Vol. 4, no. 2. Pp. 34–34].
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. Т. 2. М.: Наука, 1966. 636 с. [Timoshenko S. P., Voynovsky-Krieger S. Plates and shells. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1966. 636 pp.]
3. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. 55 с. [Pasternak P. L. On a New Method of Analysis of

an Elastic Foundation by Means of two Foundation Constants. Moscow: Gosudarstvennoye izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu i arkhitekture, 1954. 55 pp.]

4. Манвелов Л. И., Бартошевич Э. С., Минеева Л. А. Экспериментальное исследование деформационных свойств грунтов в полевых условиях / В сб.: *Тр. НИИАИ ВВС*. Т. 81. М.: НИИАИ ВВС, 1958. С. 83. [Manvelov L. I., Bartoshevich E. S., Mineyeva L. A. Experimental study of soil deformation properties under field conditions / In: *Tr. NIAI VVS*. Vol. 81. Moscow: NIAI VVS, 1958. Pp. 83].
5. Манвелов Л. И. Расчёт балок на упругом основании с двумя коэффициентами постели и экспериментальное обоснование расчётной модели основания / В сб.: *Тр. НИИАИ ВВС*. Т. 56. М.: НИИАИ ВВС, 1958. С. 96. [Manvelov L. I. Analysis of beams on elastic foundation with two coefficients bed and experimental justification of the calculation model base / In: *Tr. NIAI VVS*. Vol. 56. Moscow: NIAI VVS, 1958. Pp. 96].

Поступила в редакцию 25/X/2012;  
в окончательном варианте — 19/XI/2012.

MSC: 74L10; 74S05

## MATHEMATICAL SIMULATION OF THE BUILDING – FOUNDATION – SOIL SYSTEMS

*G. N. Gusev, A. A. Tashkinov*

Perm State National Research Polytechnical University,  
29a, Komsomolskiy prospekt, Perm, Russia, 614990.

E-mails: gusev@project-center.ru, rector@pstu.ru

*This work addresses the problems of the deformed basis layer thickness assigning in the mathematical modeling of the building – foundation – soil systems on large foundation plates. It also contains the comparison of deformed soil layer thickness computation results for two methods: numerical and analytical.*

**Key words:** *linearly deformed half-space, two-parameter elastic base, numerical experiment, CAE ANSYS.*

Original article submitted 25/X/2012;  
revision submitted 19/XI/2012.