Функциональный анализ

УДК 517.984

СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С СИСТЕМОЙ ТРЁХ ЧАСТИЦ НА РЕШЁТКЕ

Т. Х. Расулов

Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 200100, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

E-mails: rth@mail.ru

Рассматривается модельный оператор H, ассоциированный с системой трёх частиц на трёхмерной решётке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. Найдены условия существования собственных значений соответствующей модели Фридрихса и изучена структура существенного спектра оператора H.

Ключевые слова: *модельный оператор, нелокальный потенциал, существенный спектр, модель Фридрихса, собственное значение, определитель Фредгольма.*

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой рассмотрен модельный оператор H, ассоциированный с системой трёх частиц на трёхмерной решётке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов, где роль двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера играет модель Фридрихса (см. например [2–4]). В [1] выделены двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра оператора H и доказано, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем трёх отрезков. В настоящей работе найдены условия существования собственных значений, соответствующих модели Фридрихса, и описана структура существенного спектра оператора H в терминах граничных значений определителя Фредгольма, при этом задача состоит в обосновании этих описаний.

Следует отметить, что двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра трёхчастичного непрерывного оператора Шрёдингера [5,6] представляют собой полубесконечные прямые и пересекаются. В данном случае, в отличие от непрерывного случая, такие ветви существенного спектра оператора H заполняют отрезки конечной длины и они могут не пересекаться, т. е. возникает лакуна. Поэтому необходимо изучать ветви существенного спектра по обе стороны трёхчастичной ветви, поскольку от этого зависит конечность или бесконечность частей дискретного спектра.

В работах [2–4,7,8] доказано, что рассматриваемые решётчатые операторы не имеют частей существенного и дискретного спектра правее трёхчастичной

Тулкин Хусенович Расулов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. алгебры и анализа.

ветви. В этих работах изучение расположения существенного спектра основано на монотонности определителя Фредгольма модели Фридрихса. В данном случае, в отличие от предыдущих работ, определитель Фредгольма немонотонен, метод исследования основан на числе собственных значений модели Фридрихса.

Пусть $\mathcal{T}^3 \equiv (-\pi, \pi]^3$ — трёхмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней; $L_2(\mathcal{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathcal{T}^3$, и $L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определённых на $(\mathcal{T}^3)^2$.

Рассмотрим модельный оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$ по формуле

$$(Hf)(p,q) = w(p,q)f(p,q) - \int v(s,q)f(p,s)ds - \int v(p,s)f(s,q)ds,$$

где функция $v(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ определена по формуле

$$v(p,q) = v_1(p)v_1(q) - v_2(p)v_2(q),$$

$v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2,$ — вещественнозначная, непрерывная функция на $\mathcal{T}^3$ и $w(\cdot,\cdot)$ — вещественнозначная симметричная непрерывная функция на $(\mathcal{T}^3)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

Можно легко проверить, что в этих предположениях модельный оператор H является ограниченным и самосопряжённым в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{s}}((\mathcal{T}^3)^2)$.

Приведём некоторые сведения о системах частиц, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. Обычно в физической литературе используются «локальные» потенциалы, т. е. операторы умножения на функцию. Однако потенциалы, которые строятся, например, в теории псевдопотенциала [9], оказываются нелокальными и представляют собой, в том числе — для периодического оператора, сумму локального и некоторого конечномерного потенциалов. Заметим, что в работах [10, 11] изучены нелокальные потенциалы с вырожденным ядром вида

$$\mathcal{V}(p,q) = -\sum_{i=1}^{n} f_i(p)g_i(q),$$

при этом эти операторы рассматриваются как модели, ассоциированные с системой нескольких частиц, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. Например, одним из нелокальных потенциалов является Гауссов потенциал, ядро которого для одночастичного случая имеет вид

$$\mathcal{V}(p,q) = -\mu e^{-\frac{\beta}{2}(p^2+q^2)}, \quad \mu, \beta > 0.$$

Так как двухчастичные уравнения Шрёдингера легко разрешимы для нелокальных взаимодействий, их часто используют в ядерной физике и в многочастичных проблемах. Они также используются систематически вместе с уравнениями Фаддеева для систем трёх частиц. Их основная характеристика [11] состоит в том, что частично-волновая t-матрица имеет ту же простую форму и может быть продолжена простым способом, который наиболее важен и хорошо известен в ядерной физике и в уравнениях Фаддеева.

Известно, что в импульсном представлении трёхчастичный дискретный оператор Шрёдингера $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathcal{T}^3)^3)$. После выделения полного квазиимпульса системы $K \in \mathcal{T}^3$ оператор $\hat{H}$ разлагается в прямой операторный интеграл (см. например [7, 8])

$$\hat{H} = \int \oplus \hat{H}(K) dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\hat{H}(K)$, $K \in \mathcal{T}^3$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_K)$ ($\Gamma_K \subset (\mathcal{T}^3)^2$ — некоторое многообразие). Отметим, что модельный оператор H обладает основными спектральными свойствами трёхчастичного дискретного оператора Шрёдингера $\hat{H}(0)$ (см. например [2–4]).

Учитывая вышеотмеченные факты оператора H, его можно рассматривать как модельный оператор, ассоциированный системой трёх частиц на решётке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряжённого оператора.

Наряду с H рассмотрим ещё ограниченный и самосопряжённый оператор модели Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$, действующий в $L_2(\mathcal{T}^3)$ по формуле

$$(h(p)f)(q) = w(p, q)f(q) - \int v(q, s)f(s)ds.$$

Из определения функции $v(\cdot\,,\,\cdot)$ вытекает, что оператор возмущения

$$(vf)(q) = \int v(q, s)f(s)ds$$

является самосопряжённым оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Вейля [5] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $h(p)$ совпадает с существенным спектром оператора $h(p) + v$, где $p \in \mathcal{T}^3$. Известно, что $\sigma_{\text{ess}}(h(p) + v) = [m(p), M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются так:

$$m(p) = \min_{q \in \mathcal{T}^3} w(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathcal{T}^3} w(p, q).$$

Поэтому $\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m(p), M(p)]$.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. При каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ функцию

$$\Delta(p\,; z) = \left(1 - \int \frac{v_1^2(s)ds}{w(p, s) - z}\right)\left(1 + \int \frac{v_2^2(s)ds}{w(p, s) - z}\right) + \left(\int \frac{v_1(s)v_2(s)ds}{w(p, s) - z}\right)^2$$

(определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$).

Установим [1] связь между собственными значениями оператора $h(p)$ и нулями функции $\Delta(p\,;\,\cdot\,)$, $p \in \mathcal{T}^3$.

Лемма 1. *При каждом фиксированным $p \in \mathcal{T}^3$ число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ является собственным значением оператора $h(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p\,;z) = 0$.*

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma_{\text{disc}}(h(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p)) : \Delta(p\,;z) = 0\}, \quad p \in \mathcal{T}^3.$$

Следующая лемма [1] играет ключевую роль при нахождении условия существования собственных значений оператора $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$.

Лемма 2. *Для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более одного простого собственного значения, лежащего левее $m(p)$ и правее $M(p)$.*

Положим

$$m = \min_{p,q \in \mathcal{T}^3} w(p,q), \quad M = \max_{p,q \in \mathcal{T}^3} w(p,q), \quad \sigma = \bigcup_{p \in \mathcal{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)).$$

Далее будет предполагаться, что функция $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ имеет невырожденный минимум (соответственно максимум) в точках $(p^{(i)}_{\text{min}},\, q^{(i)}_{\text{min}})$, $i = 1,2,\ldots,n$, $1 \leqslant n < \infty$ (соответственно $(p^{(j)}_{\text{max}},\, q^{(j)}_{\text{max}})$, $j = 1,2,\ldots,k$, $1 \leqslant k < \infty$) шестимерного тора. Тогда из непрерывности функции $v_\alpha(\,\cdot\,)$ на $\mathcal{T}^3$ вытекает, что существуют конечные интегралы

$$\int \frac{v_1(s)v_2(s)ds}{w(p,s) - m}, \quad \int \frac{v_1(s)v_2(s)ds}{w(p,s) - M}, \quad i,j = 1,2, \quad p \in \mathcal{T}^3.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что при каждом $p \in \mathcal{T}^3$ существуют конечные пределы

$$\lim_{z \to m-0} \Delta(p\,;z) = \Delta(p\,;m) \quad \text{и} \quad \lim_{z \to M+0} \Delta(p\,;z) = \Delta(p\,;M),$$

следовательно, функции $\Delta(\,\cdot\,;m)$ и $\Delta(\,\cdot\,;M)$ являются непрерывными на $\mathcal{T}^3$.

Следующая теорема описывает множество собственных значений оператора $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$, и играет важную роль при изучении структуры существенного спектра оператора H.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Пусть $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,;m) \geqslant 0$. Тогда для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих на $(-\infty, m)$.*
2) *Пусть $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,;m) < 0$ и $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,;m) \geqslant 0$. Тогда существует непустое открытое множество $G_1 \subset \mathcal{T}^3$ такое, что $G_1 \neq \mathcal{T}^3$ и при всех $p \in G_1$ оператор $h(p)$ имеет единственное простое собственное значение $E_1(p)$, лежащее левее m, а для любого $p \in \mathcal{T}^3 \setminus G_1$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее m.*

3) *Пусть* $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)<0$. *Тогда для любого* $p\in\mathcal{T}^3$ *оператор* $h(p)$ *имеет единственное простое собственное значение, лежащее на полуоси* $(-\infty,m)$.

Доказательство. Докажем утверждения в порядке следования.

1) Пусть $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)\geqslant 0$. Тогда для любого $p\in\mathcal{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta(p\,;m)\geqslant 0$. Из непрерывности функции $\Delta(p\,;\cdot)$ на $(-\infty,m]$ и равенства

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta(p\,;z)=1 \tag{1}$$

следует, что при каждом фиксированном $p\in\mathcal{T}^3$ функция $\Delta(p\,;\cdot)$ не имеет нулей на $(-\infty,m)$ или имеет по крайней мере два нуля (с учётом кратности) на $(-\infty,m)$. Во втором случае вместе с леммой 1 используем тот факт (см. [12]), что число $z_0\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(h(p))$ является n-кратным собственным значением оператора $h(p)$ тогда и только тогда, когда число z_0 является n-кратным нулем функции $\Delta(p\,;\,\cdot\,)$. Получим, что оператор $h(p)$ имеет по крайней мере два собственных значения (с учётом кратности) на $(-\infty,m)$. Это противоречит утверждению леммы 2. Таким образом, для любого $p\in\mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений на $(-\infty,m)$.

2) Пусть $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)<0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)\geqslant 0$. Тогда существуют точки $p_0,\,p_1\in\mathcal{T}^3$ такие, что

$$\min_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)=\Delta(p_0\,;m)<0,\qquad \max_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)=\Delta(p_1\,;m)\geqslant 0.$$

Положим $G_1=\{p\in\mathcal{T}^3:\Delta(p\,;m)<0\}$. Из непрерывности функции $\Delta(\,\cdot\,;m)$ на компактном множестве $\mathcal{T}^3$ и неравенства $\Delta(p_0\,;m)<0$, следует, что множество G_1 — непустое открытое множество, а из условия $\Delta(p_1\,;m)\geqslant 0$ вытекает, что $G_1\neq\mathcal{T}^3$.

Так как для любого $p\in\mathcal{T}^3$ функция $\Delta(p\,;\,\cdot\,)$ непрерывна на полуоси $(-\infty,m)$, из равенства (1) следует, что функция $\Delta(p\,;\,\cdot\,)$ имеет один простой нуль на $(-\infty,m)$ или имеет по крайней мере три нуля (с учётом кратности) на $(-\infty,m)$. Во втором случае, рассуждая так же как при доказательстве утверждения 1), получим, что оператор $h(p)$ имеет по крайней мере три собственных значения (с учётом кратности) на $(-\infty,m)$, что противоречит утверждению леммы 2. Таким образом, для любого $p\in G_1$ существует единственное число $E_1(p)\in(-\infty,m)$ такое, что $\Delta(p\,;E_1(p))=0$. В силу леммы 1 для любого $p\in G_1$ число $E_1(p)$ является единственным простым собственным значением оператора $h(p)$.

Из определения множества G_1 видно, что для любых $p\in\mathcal{T}^3\setminus G_1$ выполняется неравенство $\Delta(p\,;m)\geqslant 0$. Рассуждая аналогично тому, как это сделано при доказательстве утверждения 1), можно показать, что для любого $p\in\mathcal{T}^3\setminus G_1$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений на $(-\infty,m)$.

3) Пусть $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)<0$. Тогда для любого $p\in\mathcal{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta(p\,;m)<0$. По определению множества G_1 это означает, что $G_1=\mathcal{T}^3$. Поэтому, как уже доказано, при всех $p\in G_1$ оператор $h(p)$ имеет единственное простое собственное значение на $(-\infty,m)$. $\square$

Множество собственных значений оператора $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$, на интервале $(M, +\infty)$ описывается следующей теоремой, которая доказывается аналогично теореме 1.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) \geqslant 0$, *то для любого* $p \in \mathcal{T}^3$ *оператор* $h(p)$ *не имеет собственных значений, лежащих на* (M, ∞).
2) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) < 0$ *и* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) \geqslant 0$, *то существует непустое открытое множество* $G_2 \subset \mathcal{T}^3$ *такое, что* $G_2 \neq \mathcal{T}^3$ *и при всех* $p \in G_2$ *оператор* $h(p)$ *имеет единственное простое собственное значение* $E_2(p)$, *лежащее правее* M, *а для любого* $p \in \mathcal{T}^3 \setminus G_2$ *оператор* $h(p)$ *не имеет собственных значений, лежащих правее* M.
3) *Если* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) < 0$, *то для любого* $p \in \mathcal{T}^3$ *оператор* $h(p)$ *имеет единственное простое собственное значение, лежащее на* (M, ∞).

Известно [1], что для существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ оператора H имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma \cup [m, M]$. Более того, множество $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем трёх отрезков. Теперь переходим к изучению расположения этих трёх отрезков.

Обозначим $a_1 = \min\{\sigma \cap (-\infty, m]\}$, $a_2 = \min\{\sigma \cap [M, +\infty)\}$, $b_1 = \max\{\sigma \cap (-\infty, m]\}$, $b_2 = \max\{\sigma \cap [M, +\infty)\}$ и сформулируем основной результат настоящей работы, который описывает структуру существенного спектра оператора H.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Пусть* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) \geqslant 0$.
   1.1) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) \geqslant 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [m, M]$.
   1.2) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$ *и* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) \geqslant 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [a_1, M]$, *причём* $a_1 < m$.
   1.3) *Если* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [a_1, b_1] \cup [m, M]$, *причём* $b_1 < m$.
2) *Пусть* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) < 0$ *и* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) \geqslant 0$.
   2.1) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) \geqslant 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [m, b_2]$, *причём* $b_2 > M$.
   2.2) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$ *и* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) \geqslant 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [a_1, b_2]$, *причём* $a_1 < m$ *и* $b_2 > M$.
   2.3) *Если* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [a_1, b_1] \cup [m, b_2]$, *причём* $b_1 < m$ *и* $b_2 > M$.
3) *Пусть* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; M) < 0$.
   3.1) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) \geqslant 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [m, M] \cup [a_2, b_2]$, *причём* $a_2 > M$.
   3.2) *Если* $\min\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$ *и* $\max\limits_{p \in \mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) \geqslant 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [a_1, M] \cup [a_2, b_2]$, *причём* $a_1 < m$ *и* $a_2 > M$.

3.3) *Если* $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m) < 0$, *то* $\sigma_{\rm ess}(H) = [a_1,b_1]\cup[m,M]\cup[a_2,b_2]$, *причём* $b_1 < m$ *и* $a_2 > M$.

Доказательство. Приведём доказательства утверждений группы 2).

Пусть $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;M) < 0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;M) \geqslant 0$. Тогда в силу теоремы 2 существует непустое открытое множество $G_2\subset\mathcal{T}^3$ такое, что $G_2\neq\mathcal{T}^3$ и для любого $p\in G_2$ оператор $h(p)$ имеет единственное простое собственное значение $E_2(p)$, лежащее правее M.

Так как функции $v_\alpha(\,\cdot\,)$ и $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — непрерывные в своих областях определения, функция $E_2 : p\in G_2\to E_2(p)$ — также непрерывная в G_2.

Так как для любого $p\in\mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ ограничен и $\mathcal{T}^3$ компактное множество, существует положительное число C такое, что $\sup\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\|h(p)\|\leqslant C$, следовательно, для любого $p\in\mathcal{T}^3$ имеем

$$\sigma(h(p))\subset[-C,C]. \tag{2}$$

Для любого $p\in\partial G_2=\{p\in\mathcal{T}^3 : \Delta(p\,;M)=0\}$ существует последовательность $\{p_n\}\subset G_2$ такая, что $p_n\to p$ при $n\to\infty$. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и $E_2^{(n)}=E_2(p_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда по теореме 2 для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство $E_2^{(n)}>M$ и из включения (2) получим, что $\{E_2^{(n)}\}\subset(M,C]$. Не нарушая общности (в противном случае возьмем подпоследовательность), предположим, что существует точка $E_2^{(0)}\in[M,C]$ такая, что $E_2^{(n)}\to E_2^{(0)}$ при $n\to\infty$.

Из непрерывности функции $\Delta(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ на $\mathcal{T}^3\times[M,+\infty)$, а также из соотношении $p_n\to p$, $E_2^{(n)}\to E_2^{(0)}$ при $n\to\infty$ следует, что

$$0=\lim_{n\to\infty}\Delta(p_n\,;E_2^{(n)})=\Delta(p\,;E_2^{(0)}).$$

С другой стороны, по определению множества ∂G_2 имеем, что при $p\in\partial G_2$ равенство $\Delta(p\,;E_2^{(0)})=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $E_2^{(0)}=M$.

Для любого $p\in\partial G_2$ определим

$$E_2(p)=\lim_{p'\to p,\,p'\in G_2}E_2(p')=M.$$

Так как функция $E_2(\,\cdot\,)$ непрерывна на компактном множестве $G_2\cup\partial G_2$ и имеет место равенство $E_2(p)=M$ при всех $p\in\partial G_2$, множество значений $\operatorname{Im}E_2$ функции $E_2(\,\cdot\,)$ совпадает с отрезком $[M,b_2]$, причём $b_2>M$. Следовательно, множество $\{z\in\sigma : z\geqslant M\}$ совпадает с множеством $\operatorname{Im}E_2$.

Таким образом, если $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;M)\leqslant 0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta_2(p\,;M)>0$, то

$$\sigma_{\rm ess}(H)\cap[M,+\infty)=[M,b_2]. \tag{3}$$

2.1) Пусть $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3}\Delta(p\,;m)\geqslant 0$. Тогда из теоремы 1 вытекает, что для любого $p\in\mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее

m. Поэтому в силу определения множества σ имеем, что $\sigma \cap (-\infty, m) = \emptyset$. Теперь последний факт с равенством (3) завершает доказательство утверждения 2.1).

2.2) Если $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) \geqslant 0$, то аналогично можно получить факт

$$\sigma_{\rm ess}(H) \cap (-\infty, m] = [a_1, m],$$

который с равенством (3) завершает доказательство утверждения 2.2).

2.3) Пусть $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; m) < 0$. В силу теоремы 1 для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет единственное простое собственное значение $E_1(p) < m$. Так как функции $v_\alpha(\,\cdot\,)$. $\alpha = 1, 2$, и $w(\,\cdot\,, \,\cdot\,)$ непрерывны в своих областях определения, функция $E_1(\,\cdot\,)$, ставящая в соответствие элементу $p \in \mathcal{T}^3$ собственное значение $E_1(p)$, также непрерывна на компактном множестве $\mathcal{T}^3$. Отсюда вытекает, что множество значений $\mathrm{Im}E_1$ функции $E_1(\,\cdot\,)$ есть замкнутое множество в $(-\infty, m)$, т. е. $\mathrm{Im}\, E_1 = [a_1, b_1]$, где $a_1 < m$. Следовательно,

$$\sigma \cap (-\infty, m) = [a_1, b_1], \quad b_1 < m.$$

Теперь, учитывая равенство (3), получим доказательство утверждения 2.3).

Остальные утверждения теоремы 3 доказываются аналогично. □

В заключение докажем ещё одно утверждение, которое показывает, что класс функций $v_\alpha(\cdot)$ и $w(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющих условиям теорем 1–3, непуст.

Лемма 3. *Пусть $\mu_\alpha > 0$ — некоторые числа, $v_\alpha(p) = \sqrt{\mu_\alpha}\sin p_\alpha$, $\alpha = 1, 2$; $w(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q)$, $\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1 - \cos p_i)$, $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{T}^3$. Положим*

$$\widetilde{\mu}_1 = \left(\int \frac{\sin^2 s_1 ds}{\varepsilon(s)}\right)^{-1}, \quad \widehat{\mu}_1 = \left(\int \frac{\sin^2 s_1 ds}{6 + \varepsilon(s)}\right)^{-1},$$

$$\widetilde{\mu}_2 = \left(\int \frac{\sin^2 s_2 ds}{6 - \varepsilon(s)}\right)^{-1}, \quad \widehat{\mu}_2 = \left(\int \frac{\sin^2 s_2 ds}{12 - \varepsilon(s)}\right)^{-1}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) *Если $\mu_1 \in (0, \widetilde{\mu}_1]$ (соответственно $\mu_2 \in (0, \widetilde{\mu}_2]$), то $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 0) \geqslant 0$ (соответственно $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 12) \geqslant 0$).*
2) *Если $\mu_1 \in (\widetilde{\mu}_1, \widehat{\mu}_1]$ (соответственно $\mu_2 \in (\widetilde{\mu}_2, \widehat{\mu}_2]$), то $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 0) < 0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 0) \geqslant 0$ (соответственно $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 12) < 0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 12) \geqslant 0$).*
3) *Если $\mu_1 \in (\widehat{\mu}_1, \infty)$ (соответственно $\mu_2 \in (\widehat{\mu}_2, \infty)$), то $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 0) < 0$ (соответственно $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,; 12) < 0$).*

Доказательство. Отметим, что функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0, 0) \in \mathcal{T}^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $(\pi, \pi, \pi) \in \mathcal{T}^3$, причём $m = 0$, $M = 12$, а также при всех

$p \in \mathcal{T}^3$ и $z \in (\infty, 0] \cup [12, \infty)$ имеет место равенство $\Delta(p\,;z) = \Delta_1(p\,;z)\Delta_2(p\,;z)$, где

$$\Delta_1(p\,;z) = 1 - \mu_1 \int \frac{\sin^2 s_1\, ds}{\varepsilon(p) + \varepsilon(s) - z}, \quad \Delta_2(p\,;z) = 1 + \mu_2 \int \frac{\sin^2 s_2\, ds}{\varepsilon(p) + \varepsilon(s) - z}.$$

Докажем утверждение 2), а остальные утверждения доказываются аналогично. Из определения функции $\Delta(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ следует, что

$$\min_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,;0) \leqslant \min_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta_1(p\,;0) \max_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta_2(p\,;0) = (1 - \mu_1 \widetilde{\mu}_1^{-1}) \left(1 + \mu_2 \int \frac{\sin^2 s_2\, ds}{\varepsilon(s)}\right);$$

$$\max_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,;0) \geqslant \max_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta_1(p\,;0) \min_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta_2(p\,;0) = (1 - \mu_1 \widehat{\mu}_1^{-1}) \left(1 + \mu_2 \int \frac{\sin^2 s_2\, ds}{6 + \varepsilon(s)}\right).$$

Очевидно, что

$$1 - \mu_1 \widetilde{\mu}_1^{-1} < 0, \quad 1 - \mu_1 \widehat{\mu}_1^{-1} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \mu_1 \in (\widetilde{\mu}_1, \widehat{\mu}_1];$$

$$1 + \mu_2 \int \frac{\sin^2 s_2\, ds}{\varepsilon(s)} > 0, \quad 1 + \mu_2 \int \frac{\sin^2 s_2\, ds}{6 + \varepsilon(s)} > 0 \quad \text{при} \quad \mu_2 > 0,$$

следовательно, если $\mu_1 \in (\widetilde{\mu}_1, \widehat{\mu}_1]$ и $\mu_2 > 0$, то $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,;0) < 0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,;0) \geqslant 0$. Точно так же показывается, что при любых $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 \in (\widetilde{\mu}_2, \widehat{\mu}_2]$ имеет место $\min\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,;12) < 0$ и $\max\limits_{p\in\mathcal{T}^3} \Delta(p\,;12) \geqslant 0$. $\square$

Работа поддержана грантом Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), № TR368/6-2. Автор приносит благодарность Математическому Институту Университета Берна (Берн, Швейцария) за гостеприимство и поддержку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Расулов Т. Х.* О существенном спектре одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 42–51. [*Rasulov T. Kh.* On the essential spectrum of a model operator associated with the system of three particles on a lattice // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 3(24). Pp. 42–51].
2. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices // *Russ. J. Math. Phys.*, 2007. Vol. 14, no. 4. Pp. 377–387.
3. *Расулов Т. Х.* Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке // *ТМФ*, 2010. Т. 163, № 1. С. 34–44; англ. пер.: *Rasulov T. Kh.* Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 163, no. 1. Pp. 429–437.
4. *Albeverio S., Lakaev S. N., Djumanova R. Kh.* The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles // *Rep. Math. Phys.*, 2009. Vol. 63, no. 3. Pp. 359–380.
5. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. T. IV: Analysis of operators. New York–London: Academic Press, 1978. 396 с.; русск. пер.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 430 с.

6. *Жислин Г. М.* Исследование спектра оператора Шрёдингера для системы многих частиц // *Труды Моск. матем. об-ва*, 1960. Т. 9. С. 81–120. [*Zhislin G. M.* Discussion of the spectrum of the Schrödinger operator for systems of many particles // *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, 1960. Vol. 9. Pp. 81–120].
7. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics // *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 2004. Vol. 5, no. 4. Pp. 743–772.
8. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices // *Math. Nachr.*, 2007. Vol. 280, no. 7. Pp. 699–716.
9. *Хейне В., Коэн М., Уэйр Д.* Теория псевдопотенциала. М.: Мир, 1973. 557 с. [*Heine V., Cohen M., Weir D.* Pseudopotential Theory. Moscow: Mir, 1973. 557 pp.]
10. *Hall R. L.* Exact solutions for semi-relativistic problems with non-local potentials // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2006. Vol. 39, no. 4. Pp. 903–912.
11. *Chadan K., Kobayashi R.* The absence of positive energy bound states for a class of nonlocal potentials // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2005. Vol. 38, no. 5. Pp. 1133–1145.
12. *Абдуллаев Ж. И.* О кратности собственных значений обобщенной модели Фридрихса // *Узбек. матем. ж.*, 1996. №1. С. 3–10. [*Abdullaev Zh. I.* On the multiplicity of the eigenvalues of the generalized Friedrichs model // *Uzbek. Mat. Zh.*, 1996. no. 1. Pp. 3–10].

Поступила в редакцию 13/VII/2011;
в окончательном варианте — 27/III/2012.

MSC: 81Q10; 35P20, 47N50

STRUCTURE OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A MODEL OPERATOR ASSOCIATED TO A SYSTEM OF THREE PARTICLES ON A LATTICE

T. Kh. Rasulov

Bukhara State University,
11, Muhammad Ikbol, Bukhara, 200100, Uzbekistan.

E-mails: `rth@mail.ru`

We consider a model operator H associated to a system of three particles interacting via nonlocal pair potentials on a three dimensional lattice. The existence conditions of the eigenvalues of a corresponding Friedrichs model are found and the structure of the essential spectrum of H is studied.

Key words: *model operator, nonlocal potential, essential spectrum, Friedrichs model, eigenvalue, Fredholm determinant.*

Original article submitted 13/VII/2011;
revision submitted 27/III/2012.

Tulkin Kh. Rasulov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Algebra and Analysis.