

# Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

## К РАСЧЁТУ ПАРАМЕТРОВ РАВНОВЕСИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА КРУЧЕНИЯ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

*В. В. Стружанов, Е. А. Базарева*

Институт машиноведения УрО РАН,  
620049, Россия, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

E-mails: stru@imach.uran.ru, bahareva.e.a@mail.ru

*Рассмотрена задача о кручении стержня круглого поперечного сечения, изготовленного из материала, диаграмма деформирования которого при чистом сдвиге обладает падающей ветвью, характеризующей стадию разупрочнения. Показано, что в процессе деформирования у стержня возможно появление нескольких положений равновесия. Для определения напряжённо-деформированного состояния во всех положениях равновесия применяется метод Ньютона—Канторовича. Определение напряжений и деформаций в положениях устойчивого равновесия проводится методом простых итераций. Установлено, что начало расходимости метода простой итерации согласуется с моментом потери устойчивости процесса деформирования.*

**Ключевые слова:** *кручение, упрочнение, разупрочнение, полная диаграмма чистого сдвига, неединственность положений равновесия, метод Ньютона—Канторовича, метод простых итераций, устойчивость процесса деформирования.*

**Введение.** При деформировании элементов конструкций часть материала может переходить в неустойчивое состояние, когда деформации растут, а сопротивление материала падает (стадия разупрочнения) [1–3]. Это приводит к появлению таких эффектов, как неединственность и неустойчивость положений равновесия. Для определения параметров равновесия и их устойчивости требуется применение нетрадиционных для механики деформируемого тела математических методов.

Выбор методов и разработку соответствующих расчетных методик естественно начать с исследования простейших задач. В данной работе рассматривается кручение стержня с круглым поперечным сечением. При определенных величинах сдвиговой деформации материал поверхностных слоев переходит в стадию разупрочнения. Поэтому свойства материала описываются полной диаграммой одноосного сдвига, обладающей падающей до нуля ветвью, характеризующей разупрочнение при сдвиге. Расчет напряжённо-деформированного состояния для всех возможных положений равновесия осуществляется методом Ньютона—Канторовича. Продемонстрирована схема выбора

---

*Валерий Владимирович Стружанов (д.ф.-м.н., проф.), гл. научн. сотрудник, лаб. микромеханики материалов. Елена Александровна Базарева, аспирант, лаб. микромеханики материалов.*

начальных приближений, при которых метод сходится к искомым решениям. Применен также метод простой итерации, исследована его сходимость и показано, что начало расходимости метода отвечает моменту потери устойчивости процесса кручения.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим стержень длины  $L$  с круглым поперечным сечением радиуса  $R$ . Деформирование осуществляем квазистатически при неизменной температуре, либо монотонно задавая возрастающий крутящий момент  $M$  (мягкое нагружение), либо монотонно увеличивая угол закручивания стержня  $\varphi$  (жёсткое нагружение).

В случае кручения стержня единственной ненулевой компонентой тензора напряжений является касательное напряжение  $\tau$ , а деформации сдвига линейно распределены по радиусу сечения  $\gamma = \varphi r/L$  [4].

Свойства материала при чистом сдвиге будем описывать потенциальной функцией (потенциалом напряжений)  $\Pi(\gamma)$ , монотонно возрастающей от нуля на отрезке  $[0, \gamma^Z]$  и принимающей постоянное значение при  $\gamma \geq \gamma^Z$ , причем производная  $\Pi,_{\gamma}(\gamma = 0) = 0$ . Кроме того, на участке  $[0, \gamma^B]$  функция  $\Pi$  выпукла вниз (вторая производная  $\Pi,_{\gamma\gamma} > 0$ ), на участке  $(\gamma^B, \gamma^Z]$  — выпукла вверх ( $\Pi,_{\gamma\gamma} < 0$ ), а точка  $\gamma = \gamma^B$  есть точка перегиба ( $\Pi,_{\gamma\gamma}(\gamma = \gamma^B) = 0$ ). Здесь и далее запятой обозначена производная по соответствующему аргументу. Выпуклость вниз потенциальной функции отвечает устойчивым состояниям материала (упрочнение), выпуклость вверх — неустойчивым (разупрочнение), точка перегиба — пограничному состоянию [5].

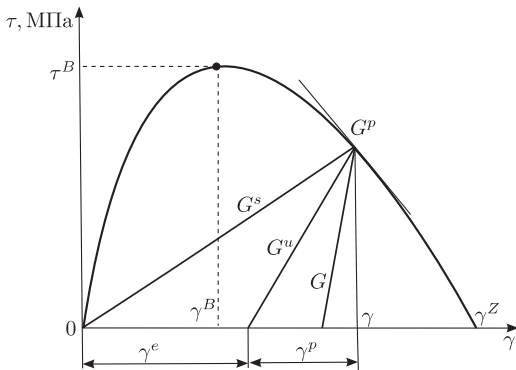


Рис. 1. Полная диаграмма деформирования и модули разгрузки для различных материалов:  $\gamma^B$  — сдвиговая деформация предела прочности,  $\gamma^Z$  — деформация разрушения

При сделанных предположениях зависимость между касательными напряжениями и сдвиговыми деформациями задает формула  $\tau(\gamma) = \Pi,_{\gamma}$ , которая определяет полную диаграмму деформирования в координатах «касательные напряжения — сдвиговые деформации», обладающую восходящей и ниспадающей (вообще говоря, до нуля) ветвями (рис. 1).

Наклон диаграммы характеризует четная функция  $G^p = \tau,_{\gamma} = \Pi,_{\gamma\gamma}$ , имеющая смысл касательного модуля сдвига (модуля тангенциальной жёсткости при кручении). Ясно, что при  $G^p > 0$  материал находится в состоянии упрочнения, если же  $G^p < 0$ , то в состоянии разупрочнения.

Выражение для касательного модуля сдвига определяет инкрементальное соотношение, связывающее приращения сдвиговых деформаций и касательных напряжений, а именно  $d\tau = G^p d\gamma$ . Откуда

$$\tau = \int_0^{\gamma} G^p d\gamma.$$

Физический смысл введенного потенциала вытекает из равенства

$$\Pi = \int_0^\gamma \tau d\gamma,$$

представляющего собой работу напряжения, затраченную на деформирование. Отсюда площадь под полной диаграммой численно равна работе, которую необходимо затратить на разрушение материала в условиях жёсткого кручения, когда равновесный характер деформирования сохраняется вплоть до разделения материального элемента на фрагменты.

Очевидно, что при любом распределении напряжений и деформаций по радиусу стержня, связанным с диаграммой  $\tau(\gamma)$ , тождественно удовлетворяются дифференциальные уравнения равновесия и условия совместности деформаций. Необходимо только выполнение граничных условий для жёсткого нагружения:

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=L} = \varphi r \quad (0 \leq r \leq R),$$

а при мягком нагружении

$$u|_{z=0} = 0, \quad 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = M. \quad (1)$$

Граничные условия записаны в цилиндрической системе координат, которая жёстко связана со стержнем. Здесь  $u$  — перемещение точек стержня в тангенциальном направлении. Второе из равенств (1) совпадает со статическим уравнением равновесия, а именно с равенством нулю главного момента сил, и должно удовлетворяться в каждом поперечном сечении стержня. Перепишем второе из равенств (1) в виде операторного уравнения

$$\Theta(\varphi, M) = 0, \quad (2)$$

где

$$\Theta(\varphi, M) = \vartheta(\varphi) - M = 2\pi \int_0^R \tau(\varphi r/L) r^2 dr - M.$$

Здесь  $\Theta$  — нелинейный оператор, заданный на множестве

$$\{\varphi, M : 0 \leq \varphi \leq \varphi^Z = \gamma^Z L/R, 0 \leq M \leq M_{\max}\}.$$

Максимальное значение крутящего момента совпадает с максимумом функции  $\vartheta(\varphi)$ , который достигается при значении  $\varphi = \varphi^m$ , удовлетворяющем уравнению  $\vartheta_{,\varphi} = 2\pi J^p = 0$ , где

$$\begin{aligned} J^p &= \frac{1}{L} \int_0^R G^p \left( \frac{\varphi r}{L} \right) r^3 dr = \frac{L^3}{\varphi^4} \int_0^\xi G^p(\gamma) \gamma^3 d\gamma = \\ &= \frac{L^3}{\varphi^4} (\xi^3 \tau(\xi)) - 3 \int_0^\xi \tau(\gamma) \gamma^2 d\gamma. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь  $\xi$  — деформация наиболее сдвинутых волокон,  $J^p$  имеет смысл, аналогичный мгновенной жёсткости стержня при кручении, интегрирование проведено по частям с учетом того, что

$$\tau = \int_0^\gamma G^p d\gamma.$$

Наличие в стержне областей разупрочненного материала, возникающих в ходе нагружения, приводит к тому, что у системы появляется несколько положений равновесия при заданных граничных условиях, то есть уравнение (2) может иметь несколько решений (устойчивых и неустойчивых). Отсюда возникает задача об определении параметров всех положений равновесия при заданной полной диаграмме  $\tau(\gamma)$ , описывающей стадии упрочнения и разупрочнения материала, и вычисления момента потери устойчивости процесса деформирования.

**2. Определяющие соотношения.** Отклонение диаграммы деформирования от прямолинейного участка упругости объясняется диссипативными процессами, происходящими в материале. Обычно различают механическую диссипацию, осуществляемую пластической деформацией, и континуальное разрушение, характеризующее поврежденностью, вызванной нарушением сплошности.

Проводя рассуждения, приведенные в работе [6] при исследовании свойств материала в условиях одноосного растяжения, можно также выделить три основных типа материалов. Это — упругопластический материал, в котором диссипация происходит за счет образования только пластических деформаций сдвига ( $\gamma^p \neq 0$ ,  $\omega = 0$ , модуль разгрузки равен модулю сдвига  $G$ ); упругохрупкий материал, в котором диссипация происходит только за счет континуального разрушения ( $\gamma^p = 0$ ,  $\omega \neq 0$ , модуль разгрузки равен текущему модулю  $G^s = \tau/\gamma$ ); партипластический (частично пластический) материал, в котором имеют место оба вида диссипации ( $\gamma^p \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$ , модуль разгрузки равен  $G^u = \tau/\gamma^e = \tau/(\gamma - \gamma^p)$ ). Здесь  $\gamma^p$  — пластическая составляющая полной сдвиговой деформации  $\gamma$  ( $\gamma = \gamma^e + \gamma^p$ , где  $\gamma^e$  — упругая составляющая),  $\omega$  — параметр, характеризующий континуальное разрушение на микроуровне.

Далее, аналогично работе [6], получаем для партипластического материала следующее определяющее соотношение:

$$\tau = G(1 - \omega)(\gamma - \gamma^p), \quad (4)$$

где  $G(1 - \omega) = G^u$  и, следовательно,  $\omega = 1 - G^u/G$ . Из равенства (4) вытекает уравнение для определения пластической составляющей полной деформации, а именно

$$\gamma^p = \gamma - \frac{\tau}{G^u} = \gamma - \frac{\Pi, \gamma}{G^u} = \gamma - \frac{1}{G^u} \int_0^\gamma G^p d\gamma \quad \left( \tau = \Pi, \gamma = \int_0^\gamma \Pi, \gamma \gamma d\gamma \right). \quad (5)$$

Дифференцируя выражение (5) по переменной  $\gamma$  с учётом вида функции  $G^u = G(1 - \omega)$ , получаем дифференциальное уравнение

$$(\gamma - \gamma^p(\gamma))\omega, \gamma + \omega(\gamma) + (1 - \omega(\gamma))\gamma^p, \gamma = 1 - G^p(\gamma)/G \quad (G^p = \Pi, \gamma \gamma)$$

или

$$d(\gamma\omega) - d(\gamma^p\omega) + d\gamma^p = (1 - G^p(\gamma)/G)d\gamma,$$

которое связывает кинетику формирования диссипативных параметров материала с изменением потенциальной функции  $\Pi$ . Для упругопластического материала ( $G^u = G, \omega = 0$ ) имеем

$$\tau = G(\gamma - \gamma^p), \quad \gamma^p = \gamma - \frac{1}{G} \int_0^\gamma G^p d\gamma \quad (d\gamma^p = (1 - G^p(\gamma)/G) d\gamma), \quad (6)$$

а для упругохрупкого ( $G^u = G^s$ ) находим

$$\begin{aligned} \tau &= G^s\gamma = G(1 - \omega)\gamma, \quad \omega = 1 - G^s/G, \\ \gamma\omega, \gamma + \omega &= 1 - G^p/G \quad (d(\gamma\omega) = (1 - G^p/G) d\gamma). \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец, разрушение материала соответствует тому его состоянию, когда приращение энергии  $d\Pi = 0$ . Отсюда  $\Pi, \gamma = \tau = 0, \Pi, \gamma\gamma = G^p = 0, G^u = 0, G^s = 0, \gamma = \gamma^p, \gamma^e = 0, \omega = 1$ . Следовательно, разрушенный материал не способен накапливать и диссипировать ( $dg^s = 0, dg^p = 0$ ) подводимую энергию.

**3. Условия существования решения уравнения (2).** Уравнение (2) между переменными  $\varphi$  и  $M$  может определять одну из переменных, как неявную функцию другой. Эта неявная функция представляет собой решение данного уравнения [7]. Поэтому условия существования решения уравнения (2) задаются теоремой о неявной функции [7]. Здесь применимо следствие из теоремы о неявной функции, а именно теорема о существовании обратного оператора  $\vartheta^{-1}$  [7]. Пусть момент  $M$  — задаваемая величина (параметр управления), тогда, если функция  $\vartheta(\varphi)$  имеет отличную от нуля и сохраняющую знак производную в некоторой окрестности точки  $\varphi'$ , то для этой функции в данной окрестности существует обратная функция  $\varphi = \vartheta^{-1}(M)$  (решение уравнения (2)), определённая в некоторой окрестности точки  $M'$ , где  $M' = \vartheta(\varphi')$ . Таким образом, функция  $\vartheta(\varphi)$  в окрестности точки  $\varphi'$  устанавливает взаимно-однозначное соответствие между этой окрестности и множеством точек, образованных значениями функции  $\vartheta(\varphi)$ , принимаемыми в данной окрестности.

В точке  $\varphi = \varphi^m$  имеем  $\vartheta, \varphi = 0$ , и уравнение (2) не определяет в окрестности точки  $\varphi^m$  переменную  $\varphi$  как неявную функцию от  $M$ . Однако в самой точке  $\varphi^m$  существует единственное решение  $\Theta(\varphi^m, M_{\max})$ . Для  $M > M_{\max}$  решение уравнения (2) не существует.

Если параметр  $\varphi$  — задаваемая величина, то  $\Theta, m \neq 0$  и уравнение (2) всегда определяет однозначную функцию  $M$  от  $\varphi$ , а именно  $M = \vartheta(\varphi)$ .

**4. Определение зависимости изгибающего момента от кривизны (итерационная схема Ньютона—Канторовича).** Для определения решений уравнения (2), которые задают зависимость крутящего момента от угла закручивания, применим итерационный метод Ньютона—Канторовича, в котором используется последовательная линеаризация нелинейных уравнений [8]. В данной задаче схема Ньютона—Канторовича реализуется следующим образом. Допустим, что приближение  $\varphi_n$  найдено. Тогда для отыскания последующего приближения  $\varphi_{n+1}$  уравнение (2) заменим линеаризованным в точке  $\varphi_n$  уравнением

$$\Theta(\varphi_n, M) + \Theta, \varphi(\varphi_n, M)(\varphi - \varphi_n) = 0.$$

Если существует линейный обратный оператор  $[\Theta_{,\varphi}(\varphi_n, M)]^{-1}$ , то приходим к следующему выражению для  $\varphi_{n+1}$ :

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - [\Theta_{,\varphi}(\varphi_n, M)]^{-1} \Theta(\varphi_n, M),$$

где  $\Theta_{,\varphi} = 2\pi J^p$ , и тогда

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \left( 2\pi \int_0^R \tau(\varphi_n r/L) r^2 dr - M \right) (2\pi J^p)^{-1}.$$

Очевидно, что метод нереализуем, если на некотором итерационном шаге величина  $J^p$  обращается в нуль. Здесь величина  $J^p$  задана равенством (3).

Кроме того, следует выбирать такие начальные приближения  $\varphi_0$ , начиная с которых метод Ньютона—Канторовича сходится [9]. Для этого, во-первых, необходимо, чтобы точка  $\varphi_0$  принадлежала отрезку, где выполняются следующие условия [10]: функция  $\Theta$  и её производные  $\Theta_{,\varphi}$  и  $\Theta_{,\varphi\varphi}$  непрерывны; значения функции  $\Theta$  на концах отрезка имеют разные знаки; обе производные внутри отрезка сохраняют знак. Во-вторых, начальное приближение  $\varphi_0$  в таком промежутке нужно брать в той его части, где выполняется неравенство  $\Theta(\varphi_0, M)\Theta_{,\varphi\varphi}(\varphi_0, M) > 0$ , то есть функция  $\Theta$  и её вторая производная имеют одинаковые знаки [10].

Отметим, что точки, разделяющие отрезок  $[0, \varphi^z]$  на указанные выше промежутки при фиксированной величине  $M$ , следует искать среди точек экстремумов функции  $\Theta$ , между которыми производная  $\Theta_{,\varphi}$  сохраняет знак, а также существует обратный оператор  $[\Theta_{,\varphi}]^{-1}$  ( $J^p \neq 0$ ), и среди точек перегиба, между которыми сохраняет знак вторая производная.

В качестве примера рассчитаем параметры равновесных состояний ( $M, \varphi$ ) при кручении стержня длиной  $L = 100$  мм с радиусом  $R = 10$  мм. Полная диаграмма в координатах «касательные напряжения — сдвиги» задана функцией  $\tau = 2G(-\gamma^2 + 2\gamma^B\gamma)$ , где  $G = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\gamma^B = 0,045$ ,  $\gamma^Z = 0,09$ . Точка

максимума функции  $\Theta(\varphi, M)$  здесь есть  $\varphi^m = 0,5625$  рад, а точка перегиба отсутствует в силу выбора функции  $\tau(\gamma)$ . В этом случае имеем только два интервала  $(0, \varphi^m)$  и  $(\varphi^m, \varphi^z)$ , на которых соответственно  $\Theta_{,\varphi} > 0$ ,  $\Theta_{,\varphi\varphi} < 0$  и  $\Theta_{,\varphi} < 0$ ,  $\Theta_{,\varphi\varphi} < 0$ . Применяя на полученных интервалах метод Ньютона—Канторовича, находим зависимость  $M(\varphi)$ , изображенную на рис. 2.

Таким образом, метод Ньютона—Канторовича позволяет найти все положения равновесия стержня, как устойчивые, так и неустойчивые, отвечающие падающей ветви диаграммы  $M(\varphi)$ .

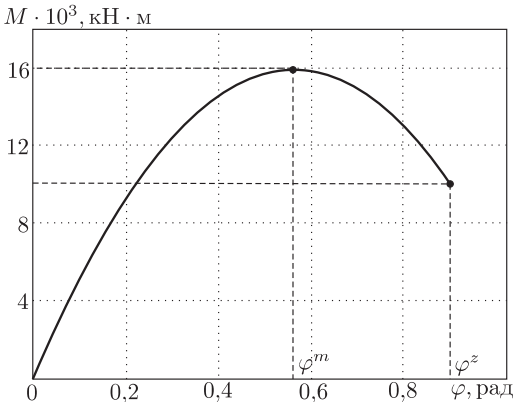


Рис. 2. Диаграмма  $M(\varphi)$ , отвечающая полной диаграмме  $\tau(\gamma)$

**5. Определение зависимости изгибающего момента от кривизны (схема простой итерации).** Перепишем уравнение (2), используя выражение для напряжений (4) (партипластический материал), в виде

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr &= 2\pi \int_0^R G^u (\gamma - \gamma^p) r^2 dr = \\ &= 2\pi \frac{\varphi}{L} \int_0^R G^u r^3 dr - 2\pi \int_0^R G^u \gamma^p r^2 dr = \varphi J^u / L - M^\Phi = M. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь выражение

$$J^u = 2\pi \int_0^R G^u r^3 dr$$

имеет смысл, аналогичный смыслу выражения жёсткости упругого неоднородного стержня при кручении, распределение модулей материала по сечению которого задаётся функцией  $G^u(\gamma)$ , определяемой с использованием диаграммы и прямых разгрузки;  $M^\Phi$  — фиктивный скручивающий момент:

$$M^\Phi = 2\pi \int_0^R G^u \gamma^p r^2 dr = 2\pi \int_0^R G^u \left( \frac{\varphi r}{L} - \frac{1}{G^u} \int_0^{\varphi r/L} G^p(e) de \right) r^2 dr,$$

определяемый псевдонапряжениями  $G^u \gamma^p$ , где пластические сдвиговые деформации рассчитываются по формуле (5). Равенство (8) преобразуем в операторное уравнение

$$\varphi = \mathbb{A}\varphi \quad (9)$$

с нелинейным оператором

$$\mathbb{A}\varphi = U(\varphi) + V(\varphi), \quad U(\varphi) = LM^\Phi / J^u(\varphi), \quad V(\varphi) = LM / J^u(\varphi).$$

Здесь  $V$  — угол закручивания упругого неоднородного стержня, возникающий под действием момента  $M$ , а  $U$  — угол закручивания такого же стержня при воздействии фиктивного момента  $M^\Phi$ .

Будем искать решение уравнения (9) методом последовательных приближений, применяя схему простой итерации [11], а именно

$$\varphi_{n+1} = \mathbb{A}\varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Приближения сходятся к решению уравнения (9), если на каждом итерационном шаге оператор  $\mathbb{A}$  является сжимающим оператором [9], то есть удовлетворяет условию Липшица

$$\|\mathbb{A}\varphi' - \mathbb{A}\varphi''\| \leq q \|\varphi' - \varphi''\|$$

с константой  $q < 1$  ( $q$  — коэффициент сжатия). Константа Липшица  $q = \sup_\varphi \|d\mathbb{A}/d\varphi\|$ , где  $d\mathbb{A}/d\varphi$  — в общем случае производная Фреше нелинейного оператора [11]. В данной задаче, используя равенство (8), имеем

$$\frac{d\mathbb{A}}{d\varphi} = L \frac{M_{,\varphi}^\Phi J^u - (M + M^\Phi) J_{,\varphi}^u}{(J^u)^2} = \frac{L}{J^u} \left( M_{,\varphi}^\Phi - \frac{\varphi}{L} J_{,\varphi}^u \right).$$

Расписывая производные и делая затем замену  $r = \gamma L / \varphi$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{J^u}{L} \frac{d\Delta}{d\varphi} &= 2\pi \int_0^R (G_{,\gamma}^u \gamma \varphi \gamma^p + G^u \gamma_{,\gamma}^p \gamma \varphi) r^2 dr - \frac{2\pi\varphi}{L} \int_0^R G_{,\gamma}^u \gamma \varphi r^3 dr = \\ &= 2\pi \int_0^R \left( G_{,\gamma}^u \gamma \varphi \frac{r^3}{L} + G^u \gamma_{,\gamma}^p \frac{r^3}{L} \right) dr - \frac{2\pi\varphi}{L} \int_0^R G_{,\gamma}^u \frac{r^4}{L} dr = \\ &= \frac{2\pi}{L} \int_0^{\varphi r/L} \left( G_{,\gamma}^u \gamma^p \left( \frac{\gamma L}{r} \right)^3 + G^u \gamma_{,\gamma}^p \left( \frac{\gamma L}{r} \right)^3 - \frac{\varphi}{L} G_{,\gamma}^u \left( \frac{\gamma L}{r} \right)^4 \right) \frac{L}{\varphi} d\gamma = \\ &= \frac{2\pi L^3}{\varphi^4} \int_0^{\varphi r/L} (G_{,\gamma}^u \gamma^p + G^u \gamma_{,\gamma}^p - G_{,\gamma}^u \gamma) \gamma^3 d\gamma. \end{aligned}$$

После преобразований, учитывая соотношение между напряжениями и деформациями и формулу для касательного модуля, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^4 J^u}{2\pi L^4} \frac{d\Delta}{d\varphi} &= \int_0^{\varphi r/L} ((G_{,\gamma}^u \gamma^p + G^u \gamma_{,\gamma}^p - G_{,\gamma}^u \gamma - G^u) + G^u) \gamma^3 d\gamma = \\ &= \int_0^{\varphi r/L} (- (G^u (\gamma - \gamma^p))_{,\gamma} + G^u) \gamma^3 d\gamma = \\ &= \int_0^{\varphi r/L} (G^u - \tau_{,\gamma}) \gamma^3 d\gamma = \int_0^{\varphi r/L} (G^u - G^p) \gamma^3 d\gamma. \end{aligned}$$

Делая обратную замену, окончательно находим

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = (J^u - 2\pi J^p) / J^u = 1 - 2\pi J^p / J^u. \quad (11)$$

Величина  $J^u > 0$ . Тогда константа Липшица меньше единицы при  $J^p > 0$ , а при  $J^p < 0$  — больше единицы. Таким образом, если на каждом шаге величина  $J^p > 0$ , то процесс (10) сходится. Когда, начиная с некоторого шага, величина  $J^p$  становится меньше нуля, то процесс (10) начинает расходиться.

Обращение интеграла  $J^p$  в нуль является необходимым условием для начала расходимости итерационного процесса. Покажем, что это и достаточное условие. Действительно, знак производной  $J_{,\gamma}^p = \varphi^{-4} L^4 \gamma^3 G^p(\gamma)$  зависит только от знака модуля  $G^p$ . При  $G^p > 0$  производная положительна и, следовательно, функция  $J^p$  монотонно возрастает, при  $G^p < 0$  функция  $J^p$  монотонно убывает. Это убывание естественно продолжается и после обращения интеграла  $J^p$  в нуль. Отсюда на всех последующих итерациях  $J^p < 0$ , константа Липшица больше единицы, и процесс становится расходящимся.

Пусть стержень изготовлен из упругопластического материала (6), который отличается от рассмотренного партияпластического материала только тем, что имеет постоянный модуль разгрузки, равный модулю Юнга для сдвига  $G$ , то  $J^u = \pi R^4 G / 2$ . Тогда, подставляя это значение в формулу (11), находим, что процесс расходится с того момента, когда интеграл  $J^p = 0$ .

Для упругохрупкого материала (7) в уравнении (9) имеем  $M^{\Phi} = 0$  ( $\gamma^p = 0$ ),  $J^u = J^s$ , где

$$J^s(\varphi) = 2\pi \int_0^R G^s(\varphi r / L) r^3 dr$$



имеет смысл жёсткости упругого неоднородного стержня, распределение секующих модулей по сечению которого задано функцией  $G^s(\varphi r/L)$ . Тогда в формуле (11) следует заменить параметр  $J^u$  на величину  $J^s$ . Отсюда получаем, что и в данном случае итерационный процесс будет расходиться с того момента, когда интеграл  $J^P$  обратится в нуль.

Таким образом, используя схему простой итерации (10), можно получить только восходящую ветвь диаграммы  $M \sim \varphi$  (рис. 2).

При жёстком нагружении, когда задаётся величина угла закручивания  $\varphi$ , уравнение (8) определяет закручивающий момент как однозначную функцию  $\vartheta(\varphi) = \varphi J^u(\varphi)/L - M^{\Phi}$  и, следовательно, эта функция полностью описывает диаграмму  $M \sim \varphi$ , изображённую на рис. 2.

**6. Механический смысл схемы простой итерации.** При кручении часть материала, прилегающая к поверхности, приобретает остаточную (неупругую) деформацию, которая входит в формулировку исходной краевой задачи и заранее неизвестна. Поэтому исходную задачу разбиваем на две задачи, а именно основную и корректирующую. Основная задача — задача об определении напряжённо-деформированного состояния в абсолютно упругом стержне при кручении заданным моментом. Корректирующая задача — задача об определении напряжённо-деформированного состояния в упругом стержне при заданной остаточной деформации и отсутствии внешних воздействий (задача вычисления остаточных самоуравновешенных напряжений).

Сначала решаем основную задачу и по найденным полным деформациям, используя кинетические соотношения, приведенные выше (пункт 2), находим ее неупругую составляющую. Затем эта неупругая деформация подставляется в корректирующую задачу, решение которой складывается с решением основной задачи (первая корректировка). Для суммарных совместных деформаций снова определяется неупругая составляющая и производится следующая корректировка. И так далее. Подробно данная схема и исследование сходимости итераций приведены в работах [12, 13].

**7. Устойчивость процесса деформирования.** Для определения устойчивости процесса деформирования стержня используем методы математической теории катастроф [14], опираясь на то, что каждый элемент находится в состоянии активного деформирования. В этом случае материал неотличим от нелинейно упругого материала, и поэтому существует потенциал напряжений в виде работы деформаций материального элемента, а именно

$$\Pi = \int_0^{\gamma} \tau(\chi) d\chi.$$

Далее, считая крутящий момент  $M$  параметром управления, а угол закручивания стержня  $\varphi$  — параметром состояния, запишем выражение для потенциальной энергии системы:

$$W(M, \varphi) = 2\pi L \int_0^R \left( \int_0^{\varphi r/L} \tau(\chi) d\chi \right) r dr - \int_0^{\varphi} M d\varphi.$$

Критические точки функции  $\Pi$  определяет уравнение

$$W_{,\varphi} = 2\pi L \int_0^R \tau(\varphi r/L) r^2 L^{-1} dr - M = 0.$$

Это уравнение совпадает со статическим уравнением равновесия (1) и связывает параметры управления и состояния в положениях всех равновесий стержня (устойчивых или неустойчивых). Вырожденные критические точки, в которых происходит смена типа равновесия, находятся из совместного решения уравнения (1) и уравнения

$$W_{,\varphi\varphi} = 2\pi \int_0^R \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} r^2 dr = \frac{2\pi}{L} \int_0^R G^p r^3 dr = 2\pi J^p / L = 0,$$

которое представляет собой равенство нулю определителя матрицы устойчивости [14], где ненулевая только одна компонента  $W_{,\varphi\varphi}$ .

Если величина  $J^p > 0$ , то функция  $W$  выпукла вниз ( $W_{,\varphi\varphi} > 0$ ) и состояние стержня устойчиво [5, 14]. Когда  $J^p < 0$ , функция  $W$  выпукла вверх (неустойчивость). Равенство  $W_{,\varphi\varphi} = 0$  определяет точку перегиба (пограничное состояние). При постепенном возрастании закручивающего момента сначала  $J^p > 0$  и согласно принципу максимального промедления [14] стержень сохраняет устойчивое равновесие до тех пор, пока интеграл  $J^p$  не обратится в нуль. В этот момент критическая точка, отвечающая данному положению равновесия, становится вырожденной, и стержень попадает в пограничное состояние. Отсюда любое малейшее возмущение приводит к потере устойчивости процесса нагружения, сопровождающейся появлением видимых трещин на поверхности стержня, что соответствует его разрушению.

Очевидно, что момент потери устойчивости процесса закручивания стержня совпадает с началом расходимости итерационного процесса по схеме простой итерации.

**Заключение.** На примере задачи о кручении стержня круглого сечения из материала с падающей диаграммой показана возможность и методика применения итерационных методов решения нелинейных уравнений, которые описывают напряжённо-деформированное состояние тел с разупрочняющимися элементами. Это метод простой итерации для определения параметров устойчивых положений равновесия и метод Ньютона—Канторовича, позволяющий найти параметры системы для всевозможных равновесий, в том числе и неустойчивых.

Работа выполнена по совместному проекту УрО РАН и СО РАН (проект № 12–С–1–1024).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 190 с. [Struzhanov V. V., Mironov V. I. Deformational Softening of Material in Structural Elements. Ekaterinburg: UrO RAN, 1995. 190 pp.]
2. Радченко В. П., Небогина Е. В., Басов М. В. Структурная модель сверхкритического упругопластического деформирования материалов в условиях одноосного растяжения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2000. №9. С. 55–65. [Radchenko V. P., Nebogina E. V., Basov M. V. Structural model of supercritical elastoplastic deformation of materials under uniaxial tension // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2000. no. 9. Pp. 55–65].
3. Горев Б. В., Банщицкова И. А. К описанию ниспадающего участка кривой деформирования «напряжение–деформация» по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2008.

- № 2(17). С. 110–117. [Gorev B. V., Bانشchikova I. A. To the description of softening stage of “stress–strain” diagram with scalar damage parameter kinetic equations // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 2(17). Pp. 110–117].
4. Gere J. M., Timoshenko S. P. *Mechanics of Materials*. Boston, MA: PWS Publishing Co., 1997. 912 pp.
  5. Horn R. A., Johnson C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 575 pp.; русск. пер.: Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
  6. Стружанов В. В. Свойства разупрочняющихся материалов и определяющие соотношения при одноосном напряженном состоянии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 2(15). С. 69–78. [Struzhanov V. V. The properties of softening materials and constitutive relations under uniaxial stress state // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007. no. 2(15). Pp. 69–78].
  7. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. М.: Велби, Проспект, 2004. 655 с. [Ilyin V. A. Sadovnichiy V. A. Sendov Bl. H. *Mathematical Analysis*. Vol. 1. Moscow: Velbi, Prospekt, 2004. 655 pp.]
  8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.; англ. пер.: Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional Analysis*. Oxford: Pergamon Press, 1982. 600 pp.
  9. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунцицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.; англ. пер.: Krasnoselskii M. A., Vaynikko G. M. Zabreyko P. P., Rutitskiy Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Approximate solution of operator equations*. Groningen: Wolters-Noordhoff Pub., 1972. 484 pp.
  10. Фиктенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 607 с. [Fikhtengol'ts G. M. *A Course of Differential and Integral Calculus*. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1970. 607 pp.]
  11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.; англ. пер.: [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis Kolmogorov A. N., Fomin S. V.. Moscow: Nauka, 1989. 624 pp.]
  12. Стружанов В. В., Жижерин С. В. Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчета напряженного состояния при кручении // *Вычисл. технol.*, 2000. Т. 5, № 2. С. 92–104. [Struzhanov V. V., Zhizherin S. V. Model of a damaged material and iterative methods for calculating stresses due to torsion // *Vychisl. Tekhnol.*, 2000. Vol. 5, no. 2. Pp. 92–104].
  13. Жижерин С. В., Стружанов В. В. Итерационные методы и устойчивость в задаче о равномерном деформировании шара с центральной зоной из повреждающегося материала // *Изв. РАН. МТТ*, 2004. Т. 39, № 2. С. 114–125; англ. пер.: Zhizherin S. V., Struzhanov V. V. Iteration methods and stability in the problem of uniform deformation of a sphere whose central zone is made of a material subject to damage // *Mech. Solids*, 2004. Vol. 39, no. 2. Pp. 89–98.
  14. Poston T., Stewart I. *Catastrophe Theory and Its Applications / Surveys and Reference Works in Mathematics*. London, San Francisco, Melbourne: Pitman, 1978. 491 pp.; русск. пер.: Постон Т, Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.

Поступила в редакцию 2/II/2012;  
в окончательном варианте — 17/V/2012.

MSC: 74E05, 74K10

## TO THE CALCULATION OF EQUILIBRIUM PARAMETERS AND STABILITY OF TORSION PROCESS OF CIRCULAR BARS MADE OF WEAKENING MATERIAL

*V. V. Struzhanov, E. A. Bakhareva*

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,  
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russia.

E-mails: [stru@imach.uran.ru](mailto:stru@imach.uran.ru), [bahareva.e.a@mail.ru](mailto:bahareva.e.a@mail.ru)

*The problem of torsion of a bar with circular cross-section is considered. The bar is made of the material with a stress-strain diagram having the falling branch describing the softening state. It is shown that the bar has several possible equilibrium positions during the deformation process. The Newton–Kantorovich method is employed to define the stress-strain state in all equilibriums positions. The definition of stress and strain in both steady and unsteady equilibrium is carried out using the method of simple iterations. It is established that the divergence of simple iterations corresponds to the moment of stability loss.*

**Key words:** *torsion, hardening, weakening, full diagram of pure shear, nonuniqueness of equilibrium positions, Newton–Kantorovich method, method of simple iterations, stability of deformation process.*

Original article submitted 2/II/2012;  
revision submitted 17/V/2012.

---

*Valery V. Struzhanov* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Chief researcher, Lab. of Material Micromechanics. *Elena A. Bakhareva*, Postgraduate Student, Lab. of Material Micromechanics.