УДК 517.958:524.83

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФРИДМАНА ОБОБЩЁННЫМ РЯДОМ ДИРИХЛЕ

Э. А. Курьянович

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: kurianovich@mail.ru

Космологическое уравнение Фридмана для Вселенной, заполненной скалярным полем с квадратичным потенциалом, сводится к системе из двух уравнений первого порядка, одно из которых является уравнением с разделяющимися переменными. Для второго уравнения ставится задача с некоторым граничным условием на бесконечности. Решение этой задачи представляется в виде обобщённого ряда Дирихле. Доказано существование классического решения в этом виде в определённой окрестности бесконечности.

Ключевые слова: *уравнение Фридмана, скалярное поле с квадратичным потенциалом, глобальные решения, асимптотическое поведение решений.*

Введение. В современной космологии важную роль играет изучение уравнения Фридмана для гравитационного поля, взаимодействующего со скалярным полем. В рамках инфляционной теории проводился приближённый анализ уравнений Фридмана для свободного массивного скалярного поля, см., например [1, p. 236]. В работе [2] уравнение Фридмана с произвольным потенциалом было сведено к уравнению Абеля (обыкновенному дифференциальному первого порядка, третьей степени). Были исследованы различные свойства решения этого уравнения, найдены решения для некоторых потенциалов. Однако для квадратичного потенциала решение не было получено.

В настоящей работе проводится детальное математическое исследование уравнения Фридмана для скалярного поля с квадратичным потенциалом. Доказано существование глобальных решений, построено представление решений в виде обобщённых рядов Дирихле (теорию этих рядов см. например [3]), исследовано асимптотическое поведение решений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Фридмана для Вселенной, заполненной скалярным полем с квадратичным потенциалом:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m^2\phi = 0, \quad H^2 = \frac{1}{3M^2}\Big(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m^2\varphi^2}{2}\Big). \tag{1}$$

Здесь φ — скалярное поле, зависящее от времени, H — постоянная Хаббла, M и m — действительные положительные константы. Продифференцируем второе уравнение системы по φ:

$$HH'_{\phi} = \frac{1}{3M^2}\Big(\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + m^2\varphi\Big). \tag{2}$$

Далее выразим H из первого уравнения системы (1) и подставим в (2):

$$\dot{\varphi} = -2M^2H'_{\phi}. \tag{3}$$

Эдуард Анатольевич Курьянович, слушатель, научно-образовательный центр при МИАН.

И, наконец, подставив (3) во второе уравнение системы (1) и сделав замены $H = my/3$, $\varphi = M\sqrt{2/3}x$, $t = t_1/m$ (далее индекс 1 опускается для краткости), получим окончательно

$$y^2 = \dot{x}^2 + x^2, \quad {y'_x}^2 = y^2 - x^2. \tag{4}$$

Как следствие

$$y'_x = -\dot{x}, \quad \int_x^\infty \frac{dx}{y'_x} = t.$$

Таким образом, при условии решения второго уравнения системы (4) первое уравнение легко интегрируется. Займёмся теперь изучением второго уравнения. Будем изучать поведение решения этого уравнения при следующих условиях:

$$x > 0, \quad y > 0, \quad y' > 0.$$

Более точно будем полагать, что y принимает значения, много бо́льшие x.

Поставим следующую задачу:

$${y'_x}^2 = y^2 - x^2, \quad \lim_{x\to\infty} ye^{-x} = C. \tag{5}$$

Здесь C — положительная константа.

2. Теорема о существовании классического решения.

Теорема. *Решением задачи* (5) *при условии* $x \geqslant x_0 > \max\{\ln(4/C^2); 0\}$ *будет являться следующий обобщённый ряд Дирихле*:

$$y = Ce^x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \tag{6}$$

где

$$a_0(x) = \frac{e^{-x}}{2C}\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\Big), \tag{7}$$

$$a_k(x) = \frac{e^{-(2k+1)x}}{(2C)^{2k+1}} P_{2k+1}(x), \quad k \geqslant 1, \tag{8}$$

$P_{2k+1}(x) = -\frac{x^{2k+1}}{2k(k+1)} + \ldots$ — *многочлен степени* $2k+1$, $k \geqslant 1$;

$$a_k(x) = -\frac{e^x}{2C}\int_x^\infty \sum_{m=0}^{k-1}\big(a_{k-1-m}(x_1)a_m(x_1) - a'_{k-1-m}(x_1)a'_m(x_1)\big)e^{-2x_1}dx_1, \ k \geqslant 1. \tag{9}$$

Ряд (6) *и ряд, составленный из производных членов этого ряда, сходятся равномерно и абсолютно для* $x \geqslant x_0 > \max\{\ln(4/C^2); 0\}$.

Доказательство. Подставим ряд (6) в уравнение (5):

$$C^2e^{2x}+2Ce^x\sum_{k=0}^{\infty}a'_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}a'_{k-m}a'_m=$$
$$=C^2e^{2x}+2Ce^x\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}a_{k-m}a_m-x^2. \quad (10)$$

Приравняем нулевой член первого ряда слева к сумме нулевого члена первого ряда справа и последнего слагаемого справа:

$$a'_0=a_0-\frac{x^2e^{-x}}{2C}. \quad (11)$$

Решив (11) и приравняв константу интегрирования к нулю, получим (7). Теперь приравняем в (10) сумму первого члена первого ряда слева и нулевого члена по k второго ряда слева к аналогичной сумме справа:

$$a'_1=a_1+\frac{(a_0^2-{a'_0}^2)e^{-x}}{2C}. \quad (12)$$

Решим (12), положив константу интегрирования равной нулю:

$$a_1(x)=-\frac{e^{-3x}}{8C^3}\Big(\frac{x^3}{4}+\frac{5x^2}{16}+\frac{5x}{32}+\frac{5}{128}\Big).$$

Далее приравняем в (10) сумму k-того члена первого ряда слева и $(k-1)$-го члена второго ряда слева к аналогичной сумме справа:

$$a'_k(x)=a_k(x)+\frac{1}{2C}\sum_{m=0}^{k-1}\big(a_{k-1-m}(x)a_m(x)-a'_{k-1-m}(x)a'_m(x)\big)e^{-x},\ k\geqslant 1. \quad (13)$$

Решив (13), снова полагая константу интегрирования равной нулю, получим (9). Методом математической индукции из (7) и (9) легко получаем (8).

Пусть

$$P_1(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}.$$

Для $P_{2k+1}(x)$, $k\geqslant 1$, имеем

$$P_{2k+1}(x)=-e^{(2k+2)x}\int_x^{\infty}\sum_{m=0}^{k-1}\big(P_{2(k-m)-1}(x_1)P_{2m+1}(x_1)-$$
$$-P'_{2(k-m)-1}(x_1)P'_{2m+1}(x_1)\big)e^{-(2k+2)x_1}dx_1. \quad (14)$$

Пусть A_{2k+1} — коэффициент при старшем члене многочлена $P_{2k+1}(x)$, тогда из (12) и (14) следует

$$A_3=-\frac{1}{4},\quad A_{2k+1}=\frac{k-1}{k+1}A_{2k-1},\quad k\geqslant 2.$$

Далее методом математической индукции получаем

$$A_{2k+1} = -\frac{1}{2k(k+1)}.$$

Этим заканчивается построение формального решения задачи (5).

Займёмся теперь доказательством сходимости полученного ряда и ряда, составленного из производных членов этого ряда. Введём обозначение $\max\{|a_k|, |a'_k|\} = b_k$. Легко установить, что при $x > 0$ выполняется

$$b_0 < \frac{1}{2(2C)^1}.$$

Используя это неравенство, из (9) и (13) можно показать, что при $x > 0$

$$b_1 < \frac{e^{-x}}{2(2C)^3}\frac{3}{4}, \quad b_2 < \frac{e^{-2x}}{2(2C)^5}.$$

Сделаем предположение индукции: пусть для любого $n < k$

$$b_n \leqslant \frac{e^{-nx}s^n}{2(2C)^{2n+1}(n+1)^2}. \tag{15}$$

Здесь s — положительная константа, подлежащая определению. Очевидно, что b_0, b_1, b_2 удовлетворяют (15) при $s \geqslant 3$. Используя гипотезу (15), из (9) и (13) получаем

$$b_k \leqslant \frac{e^{-kx}s^{k-1}(k+2)}{2(2C)^{2k+1}(k+1)} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(k-m)^2(m+1)^2}. \tag{16}$$

Оценим сумму из (16) при $k \geqslant 3$:

$$\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(k-m)^2(m+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} + \int_1^{k-1} \frac{dx}{x^2(k-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{k^2} + \frac{4\ln(k-1)}{k^3} + \frac{2(k-2)}{k^2(k-1} \leqslant \frac{7}{k^2}.$$

Следовательно,

$$b_k \leqslant \frac{e^{-kx}s^{k-1}(k+2)}{2(2C)^{2k+1}(k+1)}\frac{7}{k^2}. \tag{17}$$

Для того чтобы гипотеза индукции была справедлива и при $n = k$, необходимо

$$b_k \leqslant \frac{e^{-kx}s^k}{2(2C)^{2k+1}(k+1)^2}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) при $k \geqslant 3$ получаем

$$s \geqslant 7\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\Big(1 + \frac{2}{k}\Big) \leqslant 16.$$

Итак, для любого k выполняется

$$b_k \leqslant \frac{e^{-kx}16^k}{2(2C)^{2k+1}(k+1)^2}. \tag{19}$$

Для сходимости ряда необходимо

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} \leqslant \frac{4e^{-x}}{C^2} < 1.$$

Следовательно,

$$x > \ln\frac{4}{C^2},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание. *Решение задачи* (5) *при* $x \geqslant x_0 > \max\{\ln(4/C^2); 0\}$ *можно представить следующим образом*:

$$y = Ce^x + \sum_{k=0}^{n} a_k(x) + o\left(\left(\frac{4e^{-x}}{C^2}\right)^n\right), \quad n \to \infty.$$

Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, из (19) получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)\right| \leqslant \frac{|a_{n+1}(x)|}{1-\frac{4e^{-x}}{C^2}} \leqslant \frac{e^{-(n+1)x}4^n}{C^{2n+3}(n+2)^2(1-\frac{4e^{-x_0}}{C^2})}.$$

Работа была начата на спецсеминаре НОЦ МИАН. Выражаю благодарность всем участникам семинара за активное обсуждение работы. Особую благодарность хочется выразить Игорю Васильевичу Воловичу за постановку задачи и ряд ценных советов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *V. Mukhanov*, Physical foundations of cosmology. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. xx+421 pp.
2. *A. V. Yurov, V. A. Yurov*, "Friedman versus Abel equations: A connection unraveled" // *J. Math. Phys.*, 2010. Vol. 51, no. 8, 082503. 17 pp., arXiv: 0809.1216 [hep-th].
3. *А. Ф. Леонтьев*, "Представление функций обобщенными рядами Дирихле" // *УМН*, 1969. Т. 24, № 2(146). С. 97–164; англ. пер.: *A. F. Leont'ev*, "Representation of functions by generalized Dirichlet series" // *Russian Math. Surveys*, 1969. Vol. 24, no. 2. Pp. 101–178.

Поступила в редакцию 01/IV/2013;
в окончательном варианте — 01/V/2013.

MSC: 83F05; 30B50, 30D10, 58J32

REPRESENTATION OF FRIEDMANN EQUATION SOLUTION IN FORM OF GENERALIZED DIRICHLET SERIES

É. A. Kuryanovich

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: `kurianovich@mail.ru`

The cosmological Friedmann equation for the Universe, filled by scalar field with the quadratic potential, is reduced to the system of two first-order equations, one having the separable variables. The boundary-value problem with data at infinity is formulated for the second equation. The solution of this problem is represented in form of generalized Dirichlet series. The existence of classical solution in this form at the neighborhood of infinity is proved.

Key words: *Friedmann equation, scalar field with the quadratic potential, global solutions, asymptotic behavior of solutions.*

Original article submitted 01/IV/2013;
revision submitted 01/V/2013.

Éduard A. Kuryanovich, Listener, Research and Education Center.