Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

ОДНА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю. О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: julia.yakovleva@mail.ru

В работе исследуется корректная по Адамару постановка характеристической задачи для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка общего вида с некратными характеристиками. Решение указанной задачи построено в явном виде. Приведён иллюстративный пример некорректности по Адамару классической постановки задачи Гурса для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка общего вида с некратными характеристиками.

Ключевые слова: *гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка, некратные характеристики, характеристическая задача, корректность по Адамару.*

Для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными второго и выше порядков в случае кратных характеристик изучены граничные задачи относительно корректной постановки их по Ж. Адамару [1–3]. Но характеристические задачи для систем и уравнений гиперболического типа в частных производных с некратными характеристиками изучены недостаточно.

В настоящей работе сформулирована и исследована характеристическая задача для гиперболического уравнения общего вида с некратными характеристиками. Установлены достаточные условия ее корректности.

Предварительные сведения. Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка общего вида с двумя независимыми переменными на плоскости:

$$a_0u_{xxx} + a_1u_{xxy} + a_2u_{xyy} + a_3u_{yyy} = 0, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 — некоторые действительные постоянные, $a_0 \neq 0$.

Уравнение

$$-a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0 \quad \bigl(\lambda = dy/dx\bigr) \tag{2}$$

является характеристическим для уравнения (1), а его интегралы — характеристиками.

Юлия Олеговна Яковлева, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Пусть характеристическое уравнение (2) имеет три различных корня: λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Тогда семейства линий

$$y - \lambda_1 x + C_1, \quad y - \lambda_2 x + C_2, \quad y - \lambda_3 x + C_3$$

являются решениями уравнения (2).

Как известно [4], общее решение уравнения (1) из класса $C^3(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде суммы:

$$u(x, y) = f_1(y - \lambda_1 x + C_1) + f_2(y - \lambda_2 x + C_2) + f_3(y - \lambda_3 x + C_3).$$

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = f_1(y - \lambda_1 x) + f_2(y - \lambda_2 x) + f_3(y - \lambda_3 x). \tag{3}$$

Пусть $x \in I_c$, $I_c = [a, b]$, $c = (a + b)/2$. Отрезок I_c имеет центральную симметрию: $\forall x \in I_c$, $2c - x \in I_c$, тогда для любой функции $f(x)$ справедливо

$$f(x) = f^c_{\text{н}} + f^c_{\text{ч}}, \quad f^c_{\text{н}} = \big(f(x) - f(2c - x)\big)/2, \quad f^c_{\text{ч}} = \big(f(x) + f(2c - x)\big)/2.$$

Функции $f^c_{\text{н}}$, $f^c_{\text{ч}}$ при $c = 0$ будем обозначать $f_{\text{н}}$, $f_{\text{ч}}$.

Характеристическая задача. В работе [5] был приведен пример, показывающий некорректность классической постановки задачи Гурса для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка при $a_0 = a_3 = 0$, $a_1 = -a_2 = 1$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса на плоскости независимых переменных x, y для уравнений гиперболического типа третьего порядка общего вида.

Пример. Однородное уравнение

$$u_{xxx} + p u_{xxy} + q u_{xyy} + r u_{yyy} = 0, \tag{4}$$

где $p = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $q = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, $r = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, удовлетворяющее однородным условиям на характеристиках:

$$u\,(x,\, \lambda_1 x) = 0, \quad u\,(x,\, \lambda_2 x) = 0, \quad u\,(x,\, \lambda_3 x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение

$$u(x, y) = (y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x)(y - \lambda_3 x), \tag{6}$$

где $u(x, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$ — нечётная функция.

Таким образом, нетривиальное решение (6) уравнения (4) удовлетворяет однородным граничным условиям (5) на трёх характеристиках из различных семейств. В приведённой постановке характеристическая задача является некорректной по Адамару.

Для уравнения (1) рассмотрим общую характеристическую задачу G.

Задача G. *Найти решение $u\,(x,\, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u\,(x,\, \lambda_1 x) = \alpha(x), \quad u\,(x,\, \lambda_2 x) = \beta(x), \quad u\,(x,\, \lambda_3 x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

Теорема. *Если*

$$\gamma_{\text{н}}(x) = \alpha_{\text{н}}(\sigma x) + \beta_{\text{н}}((1 - \sigma)x),$$

где $\sigma = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$, а $\alpha_{\text{н}}$, $\beta_{\text{н}}$, $\gamma_{\text{н}}$ — нечётные части функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ соответственно, то задача G корректна по Адамару.

Определяя функции f, g и h таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (7), и учитывая при этом условие согласования $\alpha(0) = f_1(0) + f_2(0) + f_3(0)$, получим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \beta\Big(\frac{x}{\lambda_2-\lambda_1}\Big) - f_3\Big(\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_1}x\Big) - f_2(0), \quad x\in\mathbb{R},\\ f_2(x) &= \alpha\Big(\frac{x}{\lambda_1-\lambda_2}\Big) - f_3\Big(\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2}x\Big) - f_1(0), \quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_3\Big(-\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}{\lambda_1-\lambda_2}x\Big) + f_3\Big(\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}{\lambda_1-\lambda_2}x\Big) &= \\ = \alpha\Big(\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x\Big) + \beta\Big(\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_2}x\Big) - \gamma(x) - \alpha(0) + 2f_3(0), &\quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{н}}(x) &= \alpha_{\text{н}}\Big(\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}x\Big) + \beta_{\text{н}}\left(\Big(1-\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\Big)x\right),\\ f_3(x) &= \frac{1}{2}\left(\alpha_{\text{ч}}\left(\frac{x}{\lambda_3-\lambda_1}\right) + \beta_{\text{ч}}\left(\frac{x}{\lambda_3-\lambda_2}\right) - \right.\\ &\qquad\left. - \gamma_{\text{ч}}\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}x\right) - \alpha(0) + 2f_3(0)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (8), (9) и (10) в (3), получим

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha\left(\frac{y-\lambda_2x}{\lambda_1-\lambda_2}\right) + \beta\left(\frac{y-\lambda_1x}{\lambda_2-\lambda_1}\right) - \frac{1}{2}\alpha(0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\alpha_{\text{ч}}\left(\frac{y-\lambda_3x}{\lambda_1-\lambda_3}\right) - \alpha_{\text{ч}}\left(\frac{y-\lambda_2x}{\lambda_1-\lambda_2}\right) - \alpha_{\text{ч}}\left(\frac{(y-\lambda_1x)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\beta_{\text{ч}}\left(\frac{y-\lambda_3x}{\lambda_2-\lambda_3}\right) - \beta_{\text{ч}}\left(\frac{y-\lambda_1x}{\lambda_1-\lambda_2}\right) - \beta_{\text{ч}}\left(\frac{(y-\lambda_2x)(\lambda_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\right)\right] - \\ &- \frac{1}{2}\left[\gamma_{\text{ч}}\left(\frac{(y-\lambda_3x)(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\right) - \gamma_{\text{ч}}\left(\frac{y-\lambda_1x}{\lambda_1-\lambda_3}\right) - \gamma_{\text{ч}}\left(\frac{y-\lambda_2x}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Формула (11) есть искомая функция, записанная в явном виде и являющаяся решением характеристической задачи G.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 448 pp.]
2. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528; англ. пер.: *Dzhokhadze O. M.* Influence of Lower Terms on the Well-Posedness of Characteristics Problems for Third-Order Hyperbolic Equations // *Math. Notes*, 2003. Vol. 74, no. 4. Pp. 491–501.
3. *Харибегашвили С. С.* О разрешимости одной характеристической задачи для вырождающихся систем второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1989. Т. 25, № 1. С. 154–162; англ. пер.: *Kharibegashvili S. S.* Solvability of a characteristic problem for second-order degenerate hyperbolic systems // *Differ. Equ.*, 1989. Vol. 25, no. 1. Pp. 123–131.

4. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ле Тхи Тху* Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // *Тр. Ин-та матем.*, 2010. Т. 18, № 2. С. 36–54. [*Korzyuk V. I., Cheb E. S., Le Thi Thu* Solution of the mixed problem for the biwave equation by the method of characteristics // *Tr. Inst. Mat.*, 2010. Vol. 18, no. 2. Pp. 36–54].
5. *Андреев А. А., Яковлева Ю. О.* Характеристическая задача на плоскости для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка / В сб.: *Современные проблемы теории функций и их приложения*: Материалы 16-й Сарат. зимней школы (27 января — 3 февраля 2012 года). Саратов: Научная книга, 2012. С. 7–8. [*Andreev A. A., Yakovleva J. O.* Characteristic problem for 2D hyperbolic differential equation of the third order / In: *Modern problems of function theory and their applications*. Saratov: Nauchnaya kniga, 2012. Pp. 7–8].

Поступила в редакцию 04/VII/2012;
в окончательном варианте — 27/VIII/2012.

MSC: 74E35, 74K20

ONE CHARACTERISTIC PROBLEM FOR THE GENERAL HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH NONMULTIPLE CHARACTERISTICS

J. O. Yakovleva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `julia.yakovleva@mail.ru`

In the paper we consider the well-posed characteristic problem for the general hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics. The solution of this problem is constructed in an explicit form. The illustrative example of the Hadamard ill-posedness of the Goursat problem for the hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics is given.

Key words: *hyperbolic differential equation of the third order, nonmultiple characteristics, characteristic problem, Hadamard well-posedness.*

Original article submitted 04/VII/2012;
revision submitted 27/VIII/2012.

Julia O. Yakovleva, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.