

УДК 539.58:539.215

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК КВАЗИОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА ПО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

*А. А. Шваб*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090, Россия, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.

E-mail: schwab@ngs.ru

*Изучается возможность оценки механических характеристик материала на основе решения неклассических упругопластических задач для плоскости с отверстием. Предложенный экспериментально-аналитический метод определения характеристик материала основан на анализе перемещений контура кругового отверстия и размеров зон неупругих деформаций около него. Показано, что в зависимости от задания экспериментальных данных могут быть решены три задачи для оценки механических характеристик материала. Одна из таких задач рассмотрена применительно к механике горных пород. Проведён анализ решения этой задачи и приведены рамки его применимости. Показано, что подобный анализ может быть использован для определения характеристик как однородного, так и квазиоднородного материала.*

**Ключевые слова:** *экспериментально-аналитический метод, характеристики материала, упругопластическая задача, плоскость с круговым отверстием, механика горных пород.*

В работе изучается возможность оценки механических характеристик материала на основе решения неклассических упругопластических задач по натурным замерам на действующих объектах. Подобная постановка задачи подразумевает разработку экспериментально-аналитических методов для определения каких-либо механических характеристик и их величин для объектов или их моделей по некоторой экспериментальной информации. Возникновение такого подхода было связано с отсутствием необходимой достоверной информации для корректной постановки задачи механики деформированного твёрдого тела. Так, в механике горных пород при расчётах напряжённо-деформированного состояния около горных выработок или в подземных сооружениях зачастую отсутствуют данные о поведении материала при сложном напряжённом состоянии. Причина последнего, в частности, может касаться неоднородности изучаемых геоматериалов, т. е. материалов, содержащих трещины, включения и полости. Сложность исследования таких материалов классическими методами заключается в том, что размеры неоднородностей могут быть соизмеримы с размерами образцов. Поэтому экспериментальные данные имеют большой разброс и зависят от характера неоднородностей конкретного образца. Аналогичная проблема, а именно большой разброс, возникает, например, при определении механических характеристик крупнозернистого бетона. Это связано с отсутствием закономерности распределения составляющих элементов бетона, с одной стороны, и с размерами стандартного

---

*Альберт Александрович Шваб* (д.ф.-м.н., доцент), ведущий научный сотрудник, отдел механики деформируемого твёрдого тела.

образца (куб  $150 \times 150$  мм) с другой. Если же увеличить линейную базу измерений на два и более порядка по сравнению с размерами неоднородностей, то для описания поведения материала при деформировании можно использовать модель квазиоднородной среды [1]. Для определения её параметров необходимо или, как уже было отмечено, увеличить линейные размеры образца на два и более порядка по сравнению с размером неоднородностей, или сформулировать задачу о прочности всего объекта и провести соответствующие натурные измерения с целью определения механических характеристик квазиоднородного материала. Именно при решении таких задач и имеет смысл использовать экспериментально-аналитические методы.

В настоящей работе оцениваются характеристики материала на основе решения обратных упругопластических задач для плоскости с круговым отверстием по замерам перемещений на контуре отверстия и определению размеров зоны пластичности около него. Отметим, что на базе расчётных данных и экспериментальных замеров можно провести анализ, позволяющий оценить соответствие различных условий пластичности реальному поведению материала.

В рамках теории пластичности такая задача, когда на части поверхности заданы одновременно векторы нагрузки и перемещения, а на другой её части условия не определены, формулируется как неклассическая. Решение такой обратной задачи для плоскости с круговым отверстием, когда известны перемещения контура и нагрузки на нём, позволяет найти поле напряжений и деформаций в пластической области и, кроме того, восстановить упругопластическую границу. Зная на упругопластической границе перемещения и нагрузки, можно сформулировать подобную задачу для упругой области, что позволяет восстановить поле напряжений вне отверстия. Для определения упругопластических характеристик материала необходима дополнительная информация. В данном случае используются размеры зон неупругих деформаций около отверстия.

В настоящей работе для описания поведения материала применяется модель идеальной пластичности [2]: при достижении напряжениями критического значения соотношения между напряжениями и деформациями носят неупругий характер.

Сформулируем граничные условия на контуре отверстия ( $r = 1$ ):

$$u = u(\theta), \quad v = v(\theta), \quad \sigma_r = P, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad (1)$$

где  $u$ ,  $v$  — тангенциальная и касательная компоненты вектора перемещения. Здесь и в дальнейшем значения  $r$ ,  $u$  и  $v$  относятся к радиусу отверстия. При условии пластичности Треска распределение напряжений в пластической области описывается соотношениями [3]

$$\sigma_r = 2\tau_s \ln r + P, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 2\tau_s, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta - \sigma_r = 2\tau_s, \quad (2)$$

где  $\tau_s$  — предел пластичности. В этом случае задача статически определима.

Для деформаций на основании модели Христиановича—Шемьякина [2] в пластической области будем иметь уравнения

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{1 - 2\nu}{2G}(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad (3)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль сдвига. Соотношения (3) для перемещений примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1 - 2\nu}{2G}(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0. \quad (4)$$

Система (4) относится к гиперболическому типу.

Так как соотношения (1), по сути, являются условием Коши, после определения напряжений в пластической области задача для перемещений является корректной. Из условия непрерывности компонент напряжений и деформаций на упругопластической границе  $L$  и выполнения закона Гука получим уравнение

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \frac{1}{2G}(\sigma_\theta - \sigma_r).$$

С учётом (3) для радиального смещения на  $L$  будем иметь

$$L(r, \theta) \equiv \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\nu\sigma_\theta + (1 - \nu)\sigma_r}{2G} = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем будем полагать, что на контуре отверстия  $r = 1$  известны  $v(\theta) = 0$ ,  $u(\theta) = u_0 = \text{const}$ . При таких условиях  $L(r, \theta)$  в (5) будет зависеть только от  $r$ , а упругопластическая граница — представлять собой круг. Из уравнений (2) и (4) для перемещения  $u$  в пластической области получим

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \frac{1 - 2\nu}{G}(2\tau_s \ln r + (P + \tau_s)). \quad (6)$$

Разрешая уравнение (6) относительно перемещения  $u$  с учётом условий на контуре, находим

$$u = \frac{\tau_s(1 - 2\nu)r \ln r}{G} + \frac{r(1 - 2\nu)P}{2G} + \frac{2Gu_0 - (1 - 2\nu)P}{2Gr}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), найдём радиус упругопластической границы:

$$r^* = \left( \frac{2u_0G - (1 - 2\nu)P}{2(1 - \nu)\tau_s} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Распределение напряжений вне упругопластической области описывается соотношениями Ламе, полученными при решении задачи для плоскости с отверстием [4]. Из этих соотношений следует, что  $\sigma_r + \sigma_\theta = 2\sigma_\infty = \text{const}$ , где  $\sigma_\infty$  — напряжения на бесконечности. Из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе для  $\sigma_\infty$  получим

$$\sigma_\infty = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \Big|_{r=r^*}.$$

Таким образом, из последнего соотношения с учётом (2) и (8) будем иметь

$$\sigma_\infty = \tau_s \ln \left( \frac{2u_0G - (1 - 2\nu)P}{2(1 - \nu)\tau_s} \right) + \tau_s + P. \quad (9)$$

Из приведённых соотношений видно, что если известны (замерены) перемещения  $u = u_0$ , то можно оценить размер зоны неупругих деформаций. Если дополнительно экспериментально известны размеры упругопластических границ, т. е. зависимость  $u_0 = u_0(r^*)$ , то соотношения (8), (11) позволяют оценить значения величин  $E$ ,  $\tau_s$ . Так, из (8) можно получить соотношение для  $\tau_s$ :

$$\tau_s = \frac{2u_0G - (1 - \nu)P}{2(1 - \nu)(r^*)^2}. \quad (10)$$

Аналогично можно выписать соотношение для модуля сдвига  $G$ :

$$G = \frac{1}{2u_0} ((r^*)^2(2 - 2\nu)\tau_s + (1 - \nu)P). \quad (11)$$

Допустим, что дополнительно известна величина  $\sigma_\infty$ . Тогда из (9) можно найти

$$\tau_s = \frac{\sigma_\infty - P}{\ln r^* + 1}.$$

Отметим, что здесь исходя из постановки задачи величина  $\sigma_\infty$  считается неизвестной и вычисляется по смещениям на контуре отверстия.

В зависимости от задания экспериментальных данных могут быть сформулированы нижеследующие задачи.

*Задача 1. На контуре кругового отверстия ( $r = 1$ ) известны условия*

$$u = u_0, \quad v = 0, \quad \sigma_r = P, \quad \sigma_{r\theta} = 0. \quad (12)$$

*В этом случае можно определить размер  $r^*$  области неупругих деформаций и значения величины  $\sigma_\infty$ .*

*Задача 2. На контуре кругового отверстия ( $r = 1$ ) известны условия (12) и величина  $r^*$ . В этом случае из соотношений (10), (11) можно оценить одну из постоянных материала.*

*Задача 3. Пусть к известным данным задачи 2 дополнительно задана величина  $\sigma_\infty$ . В этом случае могут быть уточнены характеристики материала.*

На базе приведённого экспериментально-аналитического метода была рассмотрена задача 2. С этой целью было проведено сопоставление расчётных и экспериментальных данных. За основу были взяты смещение (конвергенция) контура выработки, отпор крепи и размеры  $r^*$  зон неупругих деформаций вокруг выработок в Кузнецком угольном бассейне на пластах «Мощный», «Горелый» и «IV Внутренний» [3]. По существу, конвергенция контура выработки соответствует величине  $u_0$ , а отпор крепи — величине  $P$ . При сравнительном анализе ставилось целью не обсуждение количественного совпадения расчёта с экспериментальными данными, а их качественное соответствие с учётом возможного разброса натурных замеров. Надо отметить, что данные о перемещениях на контуре выработки и размеры соответствующих им зон неупругих деформаций имеют определённый разброс. Кроме этого, механические характеристики массива, определённые из экспериментов на образцах, также имеют разброс. Так, для пласта «Мощный» величина  $E$  изменяется от 1100 до 3100 МПа, величина  $\tau_s$  — от 10 до 20 МПа, величина  $\nu$  полагалась

равной 0,3. Поэтому все расчёты проводились при различных значениях экспериментальных данных.

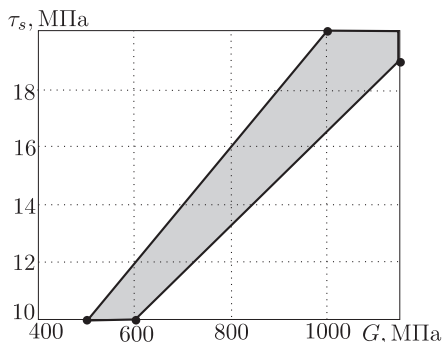
Для пласта «Мощный» в таблице приведены соответствующие результаты расчёта для условия пластичности Треска при  $25 < G/\tau_s < 80$ . Из данных таблицы следует, что при  $50 < G/\tau_s < 60$  наблюдается удовлетворительное совпадение расчётных  $r^*$  и экспериментальных  $r_{\text{эксп}}^*$  значений в достаточно широком диапазоне изменения величины  $u_0$ , а при  $G/\tau_s = 80$  расчётные значения  $r^*$  явно завышены. Следовательно, при использовании условия Треска при значении  $\tau_s = 10$  МПа модуль упругости  $E$  целесообразно выбирать в пределах от 1300 до 1600 МПа.

$u_0$	$r_{\text{эксп}}^*$	$r^*$					
		$G/\tau_s = 25$	$G/\tau_s = 40$	$G/\tau_s = 50$	$G/\tau_s = 60$	$G/\tau_s = 70$	$G/\tau_s = 80$
0,01	1,0–1,3	—	—	—	—	1,00	1,06
0,033	1,4–1,6	1,08	1,37	1,53	1,38	1,81	1,94
0,066	1,8–2,0	1,53	1,94	2,17	2,37	2,37	2,74
0,1	2,6–3,0	1,88	2,39	2,67	2,92	3,16	3,38

На рисунке площадь всего квадрата соответствует возможным значениям  $\tau_s$  и  $G$ , найденным из экспериментов на образцах. В результате анализа получено, что реальному поведению массива соответствуют только значения  $\tau_s$  и  $G$ , находящиеся в заштрихованной области (приблизительно 26 % от всей площади).

Поскольку величина  $u_0$  принимала значения от 0,01 до 0,1, т.е. была достаточно большой, естественно возникает вопрос о правомерности использования предлагаемых соотношений, полученных по теории малых деформаций. Для этого были проведены расчёты с учётом изменения геометрии контура в предположении, что скорость смещения точек контура мала. Полученные результаты практически не отличаются от приведённых выше.

Из таблицы видно, что разброс значений  $G/\tau_s$  существенно влияет на вычисление величины  $\sigma_\infty$ . Поэтому количественная оценка величины  $\sigma_\infty$  возможна, с одной стороны, при правильном выборе условия пластичности, а с другой — при более точном определении величин  $E$  и  $\tau_s$ . Если из-за недостатка экспериментальных данных подобный анализ невозможен, то по данным о конвергенции контура выработки можно оценить лишь характер изменения величины  $\sigma_\infty$ . В самом деле, возрастание величины  $u_0$  от 0,033 до 0,1 вызвано увеличением напряжений в массиве пласта в 1,53–1,74 раза, т.е. коэффициент роста величины  $\sigma_\infty$  можно определить с точностью до 26%. Преимущество такого подхода к оценке величины  $\sigma_\infty$  заключается в его принадлежности к макродеформационным методам оценки напряжений.



С одной стороны, как отмечается в [5], такие факторы, как неравномерный отпор крепи, отличие формы выработки от круговой слабо влияют на форму зоны неупругих деформаций. С другой стороны, анизотропия пород может существенно влиять как на характер разрушения, так и на образование неупругой зоны. Очевидно, что для общего случая анизотропии проведённый анализ является неприемлемым, но его можно использовать при описании поведения трансверсально изотропных пород с плоскостью изотропии, перпендикулярной оси  $Oz$ .

Резюмируя вышеизложенное, можно отметить следующее:

- 1) при условии пластичности Треска с учётом разброса экспериментальных значений модуля сдвига  $G$  и предела текучести  $\tau_s$  предложенный экспериментально-аналитический метод позволяет удовлетворительно описать эксперимент при  $50 < G/\tau_s < 60$ ;
- 2) рассмотренный метод позволяет оценивать коэффициент роста напряжений в среде с погрешностью до 26 %;
- 3) рассмотренный метод, основанный на решении неклассических задач механики, позволяет оценивать упругопластические характеристики материала как для однородной, так и для квазиоднородной среды;
- 4) применительно к механике горных пород рассмотренный метод является макродеформационным методом.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Турчанинов И. А., Марков Г. А., Иванов В. И., Козырев А. А. Тектонические напряжения в земной коре и устойчивость горных выработок. Л.: Наука, 1978. 256 с. [Turchaninov I. A., Markov G. A., Ivanov V. I., Kozыrev A. A. Tectonic Stresses in the Earth's Crust and Stability of Mine Workings. Leningrad: Nauka, 1978. 256 pp.]
2. Шемякин Е. И. О закономерности неупругого деформирования пород в окрестности подготовительной выработки / В сб.: *Горное давление в капитальных и подготовительных выработках*. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1975. С. 3–17. [Shemyakin E. I. On the laws of inelastic deformation of rocks in the neighborhood of development workings / In: *Rock Pressure in Capital and Development Workings*. Novosibirsk: IGD SO AN SSSR, 1975. Pp. 3–17].
3. Грицко Г. И., Цыцаркин В. Н. Горное давление в подготовительных выработках мощных крутых пластах. Новосибирск: Наука, СО, 1982. 88 с. [Gritsko G. I., Tsytsarkin V. N. Rock Pressure in Development Workings of Thick Steep Seams. Novosibirsk: Nauka, SO, 1982. 88 pp.]
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с. [Novackiy V. Theory of Elasticity. Moscow: Mir, 1975. 872 pp.]
5. Литвинский Г. Г. Закономерности влияния неосесимметричных факторов на формирование зоны неупругих деформаций в горных выработках / В сб.: *Крепление, поддержание и охрана горных выработок*. Новосибирск: СО АН СССР, 1979. С. 22–27. [Litvinskiy G. G. Laws of influence factors on inelastic deformations zone formation in mine workings / In: *Mounting, Maintenance, and Protection of Mine Workings*. Novosibirsk: SO AN SSSR, 1979. Pp. 22–27].

Поступила в редакцию 23/V/2011;  
в окончательном варианте — 10/IV/2012.

MSC: 74L10; 74C05, 74G75

## EXPERIMENTAL ANALYTICAL METHOD FOR QUASI-HOMOGENEOUS MATERIAL CHARACTERISTICS DETERMINATION BASED ON ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF EXPERIMENTAL DATA

**A. A. Shvab**

M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,  
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russia.

E-mail: [schwab@ngs.ru](mailto:schwab@ngs.ru)

*The possibility of material mechanical characteristics estimation based on solving of the elasto-plastic problems for plane with a hole is studied. The proposed experimental-analytical method for the material characteristics determination depends on the analysis of circular hole contour displacement and the sizes of inelastic strains zones near it. It is shown, that three problems can be solved for the material mechanical characteristics estimation according to the assignment of experimental data. One of such problems is considered relating to the rock mechanics. The analysis of this problem solution is made and the scope of its applicability is noted. The validity of similar analysis using for the characteristics determination both of homogeneous and quasihomogeneous material is presented.*

**Key words:** *experimental analytical method, characteristics of material, elasto-plastic problem, plane with a circular hole, rock mechanics.*

Original article submitted 23/V/2011;  
revision submitted 10/IV/2012.