УДК 517.956.3

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ С НИЛЬПОТЕНТНЫМ МАТРИЧНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Е. А. Максимова

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: katyuha_mak@mail.ru

Методом Римана получено решение задачи Коши для системы уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу с нильпотентным матричным коэффициентом степени m. Сформулирована теорема корректности решения задачи Коши по Адамару.

Ключевые слова: *метод Римана, задача Коши, система уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу, нильпотентная матрица.*

Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y}\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^\top$, G — действительная $(n \times n)$-нильпотентная матрица [1] степени m, $2 \leqslant m \leqslant n$.

Задача Коши. *Найти вектор-функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

1) $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, *где* $D = \{(x,y) : 0 < -y < x < y+1\}$;

2) $U(x,y)$ *удовлетворяет системе* (1);

3) *выполняются начальные условия*

$$U(x,0) = \tau(x), \quad x \in [0,1]; \qquad \lim_{y \to -0} K(y)\frac{\partial U}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

где $\tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x), \ldots, \tau_n(x))^\top$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \ldots, \nu_n(x))^\top$, $K(y) = (-y)^{2G}$.

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ область D переходит в область $H = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, матричное уравнение (1) редуцируется к системе уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу специального вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{G}{\eta - \xi}\Big(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Big) = 0, \tag{3}$$

а начальные условия (2) принимают вид

$$U(\xi,\xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in [0,1]; \quad \lim_{\eta \to \xi+0} K\Big(\frac{\xi - \eta}{2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\Big) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0,1). \tag{4}$$

Екатерина Алексеевна Максимова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Известно [1], что для любой нильпотентной матрицы G существует матрица перехода Q к жорданову базису такая, что

$$Q^{-1}GQ = J,$$

где J — жорданова форма матрицы G. Матрица J состоит из r клеток размером H_{l_k} $(l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n)$:

$$J = \begin{pmatrix} H_{l_1} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & H_{l_2} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & H_{l_r} \end{pmatrix}, \quad H_{l_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После преобразования $Q^{-1}GQ = J$ система уравнений (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{J}{\eta - \xi}\Big(\frac{\partial W}{\partial\xi} - \frac{\partial W}{\partial\eta}\Big) = 0, \tag{5}$$

где $W = Q^{-1}U$. Условия Коши (4) для системы (5) преобразуются к виду

$$W(\xi,\xi) = Q^{-1}\tau(\xi), \quad \xi \in [0,1],$$
$$\lim_{\eta\to\xi+0} \widetilde{K}\Big(\frac{\xi-\eta}{2}\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial\xi} - \frac{\partial W}{\partial\eta}\Big) = Q^{-1}\nu(\xi), \quad \xi \in (0,1),$$

где $\widetilde{K} = (-y)^{2J}$.

В работе [2] для системы (5) построена матрица Римана

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = f(J) = V^J {}_2F_1\Big(\begin{matrix} J, J \\ 1 \end{matrix}\ ;\sigma\Big),$$

где $\sigma = -(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)(\xi-\eta_0)^{-1}(\xi_0-\eta)^{-1}$, $V = (\eta-\xi)^2(\eta-\xi_0)^{-1}(\eta_0-\xi)^{-1}$.

Если $W(\xi,\eta)$ является решением системы уравнением (5), то, используя свойства её матрицы Римана $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ и векторный аналог тождества Грина [4], получаем, что

$$W(\xi_0,\eta_0) = \sum_{k=1}^{n} I(J,w_k)e_k, \tag{6}$$

где $e_k = (e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kn})^\top$, $e_{ki} = 0$, $i \neq k$, $e_{kk} = 1$; w_k — компоненты вектора W;

$$\begin{aligned} I(J,w_k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(&\frac{1}{2}f(J)w_k\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon \\ \eta=\eta_0}} + \frac{1}{2}f(J)w_k\Big|_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\xi_0+\varepsilon}} + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon} f(J)\Big[\frac{\partial w_k}{\partial\eta} - \frac{\partial w_k}{\partial\xi}\Big]_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi - \\ &- \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\Big(\frac{\partial f(J)}{\partial\eta} - \frac{\partial f(J)}{\partial\xi} + \frac{4f(J)J}{\xi-\eta}\Big)w_k\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi\Bigg). \end{aligned} \tag{7}$$

Известно [1], что если J — жорданова форма матрицы с одним собственным значением λ, то функция $I(J,w_k)$ может быть записана в виде блочно-диагональной матрицы:

$$I(J,w_k) = \mathrm{diag}\left\{I(H_{l_1},w_k), ..., I(H_{l_j},w_k), ..., I(H_{l_r},w_k)\right\}.$$

Здесь

$$I(H_{l_j}, w_k) = \begin{pmatrix} I(\lambda, w_k) & \frac{I'_\lambda(\lambda, w_k)}{1!} & \vdots & \frac{I_\lambda^{(l_j-1)}(\lambda, w_k)}{(l_j-1)!} \\ 0 & I(\lambda, w_k) & \vdots & \frac{I_\lambda^{(l_j-2)}(\lambda, w_k)}{(l_j-2)!} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I(\lambda, w_k) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а функция $I(\lambda, w_k)$ записывается в виде (7) после формальной замены J на λ.

После подстановки (8) в (6) имеем

$$W(\xi_0, \eta_0) = EI(\lambda, W) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, W). \tag{9}$$

Выполняя в выражении (9) замену $W = Q^{-1}U$, получим[1]

$$U(\xi_0, \eta_0) = EI(\lambda, U) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{QJ^kQ^{-1}}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U) =$$

$$= EI(\lambda, U) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(G-\lambda E)^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U). \tag{10}$$

После подстановки $\lambda = 0$ в (10) получим

$$U(\xi_0, \eta_0) = EI(0, U) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{G^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(0, U).$$

Воспользовавшись выражениями для $I(\lambda, U)$, полученными в [3] для случая $\lambda \in (-1/2, 0]$, найдём

$$I(0, U) = \frac{1}{\eta_0 - \xi_0} \left(\int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi)(\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) d\xi \right) - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) d\xi,$$

$$I^{(k)}(0, U) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(K_1^{(j)}(1)(\eta_0 - \xi_0)^{-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \Big(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \Big)^{k-j} d\xi - \right.$$

$$- \frac{(-1)^j}{2} K_2^{(j)}(0)(\eta_0 - \xi_0)^{-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) \Big(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \Big)^{k-j} (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) d\xi -$$

$$\left. - \frac{1}{2} K_2^{(j)}(0) \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) [\varphi(\xi)]^0 \Big(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \Big)^{k-j} d\xi \right),$$

где $K_1^{(j)}(1) = 2j\Phi_{j-1}(0) - \Phi_j(0)$, $K_2^{(j)}(0) = \Phi_j(0)$. Здесь $\Phi_j(\lambda)$ определяются рекуррентно:

$$\Phi_1(\lambda) = \psi(1 - 2\lambda) - \psi(1 - \lambda), \quad \Phi_n(\lambda) = \Phi_{n-1}(\lambda)\Phi_1(\lambda) + \Phi'_{n-1}(\lambda),$$

где $\psi(\lambda)$ — дигамма-функция [5].

[1] Этот же результат может быть получен с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестера [1].

Используя выражения для $U(\xi_0, \eta_0)$, можно записать решение $U(x, y)$ задачи Коши (1), (2) в области D.

Теорема. *Если функции $\tau(x) \in C^3[0,1]$ и $\nu(x) \in C^2(0,1)$, то задача Коши* (1), (2) *в области D корректна по Адамару.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Lankaster P.* Theory of Matrices. New York, London: Academic Press, 1969. 316 pp.; русск. пер.: *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 280 с.
2. *Андреев А.А.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа / В сб.: *Дифференц. уравнения.* Вып. 16: Сб. науч. тр. пед. ин-тов РСФСР. Рязан. гос. пед. ин-т, 1980. С. 9–14. [*Andreev A. A.* On a class of systems of differential equations of hyperbolic type / In: *Partial differential equations.* Issue 16. Ryazan: Ryazan. Gos. Ped. Inst., 1980. Pp. 9–14].
3. *Максимова Е. А.* О задаче Коши для n-мерной системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 21–30. [*Maksimova E. A.* On Cauchy Problem for system of n Euler–Poisson–Darboux equations in the plane // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 1(26). Pp. 21–30].
4. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1966. 203 с.; англ. пер.: *Bitsadze A. V.* Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964. 160 pp.
5. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York: Dover, 1972. 824 pp.; русск. пер.: Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Поступила в редакцию 13/VI/2012;
в окончательном варианте — 13/VIII/2012.

MSC: 35L45

ON CAUCHY PROBLEM FOR EULER–POISSON–DARBOUX SYSTEM WITH NILPOTENT MATRIX COEFFICIENT

Maksimova E. A.

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: katyuha_mak@mail.ru

The solution of Cauchy problem for the system of Euler–Poisson–Darboux equations with nilpotent matrix coefficient of power m is obtained by the Riemann method. The Hadamard well-posedness theorem for the Cauchy problem solution is formulated.

Key words: *Riemann method, Cauchy problem, Euler–Poisson–Darboux system, nilpotent matrix.*

Original article submitted 13/VI/2012;
revision submitted 13/VIII/2012.

Ekaterina A. Maksimova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.