Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 536.416:539.377

РЕШЕНИЕ НЕСВЯЗНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

И. С. Макарова

Самарский государственный университет путей сообщения,
443066, Россия, Самара, 1-й Безымянный пер., 18.

E-mail: makarova_is@mail.ru

Предложен метод расчёта термоупругого напряжённо-деформированного состояния однородного изотропного тела произвольной формы, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью. Поведение тела описывается несвязной квазистатической задачей термоупругости, в качестве граничных условий рассматриваются граничные условия первого рода. Предложенный метод позволяет получить аналитическое решение рассматриваемой задачи термоупругости и определить искомые компоненты вектора перемещений и температуру как функции координат точки тела и времени. Для получения решения рассматриваемая задача разбивается на начально-краевую задачу теплопроводности и краевую задачу линейной теории упругости. Решение задачи теплопроводности строится методом опорных функций. Неоднородная задача линейной теории упругости с помощью тензора Кельвина—Сомильяны сводится к однородной задаче, решение которой находится с помощью теории потенциала и преобразования Фурье.

Ключевые слова: *краевая задача термоупругости, граничные условия первого рода, задача теплопроводности, объёмный потенциал, преобразование Фурье.*

Теория термоупругости связана с решением множества прикладных задач, возникающих при исследовании элементов конструкций, работающих в условиях неравномерного нестационарного нагрева, при котором изменяются физико-механические свойства материалов и возникают градиенты температуры, сопровождающиеся неодинаковым тепловым расширением частей элементов конструкций. Неравномерное тепловое расширение в общем случае вызывает температурные напряжения. Знание величины и характера действия температурных напряжений, в свою очередь, необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции, так как температурные напряжения сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних нагрузок могут вызвать разрушение конструкции.

Целью данной работы является разработка метода решения несвязных краевых задач термоупругости в случае, когда материал тела является однородным, изотропным, обладающим линейными свойствами, а само тело — имеющим произвольную форму, конечные размеры и ограниченным кусочно-гладкой поверхностью. Поведение такого тела описывается несвязной квазистатической задачей термоупругости (в качестве краевых условий выберем условия первого рода):

$$\sigma_{ij,j}(\bar{r},t) + F_i(\bar{r},t) = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}(\bar{r},t) = \frac{1}{2}\big(u_{i,j}(\bar{r},t) + u_{j,i}(\bar{r},t)\big), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(\bar{r},t) = E_{ijpq}\varepsilon_{pq}(\bar{r},t) - c_{ij}\Theta(\bar{r},t), \tag{3}$$

Ирина Сергеевна Макарова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. информатики.

$$\Big(\Delta - \frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta(\bar r, t) = -\frac{1}{\chi}Q(\bar r, t), \tag{4}$$
$$u_i(\bar r, t)\big|_{\bar r\in S} = u_i^S(\bar r, t), \quad \Theta(\bar r, 0) = \Theta_0(\bar r), \quad \Theta(\bar r, t)\big|_{\bar r\in S} = \Theta_S(\bar r, t).$$

Здесь $\sigma_{ij}(\bar r, t)$, $\varepsilon_{ij}(\bar r, t)$ — компоненты тензоров напряжения и деформации; $F_i(\bar r, t)$ — составляющие массовой силы; $u_i(\bar r, t)$ — компоненты вектора перемещения; $u_i^S(\bar r, t)$ — его значения на поверхности тела S; E_{ijpq} — компоненты тензора упругих постоянных; c_{ij} — компоненты тензора термоупругих констант; $\Delta = \sum_{k=1}^3 \partial^2/\partial x_k^2$ — оператор Лапласа; $\bar r = \bar r(x_1, x_2, x_3)$; $\Theta = T - T_0$ — малое приращение температуры (T_0 и T — начальная и текущая температура тела); $\chi = K/\delta$ — коэффициент температуропроводности, K — коэффициент теплопроводности, δ — удельная теплоемкость единицы объёма тела; $Q(\bar r, t) = q(\bar r, t)/\delta$, $q(\bar r, t)$ — количество тепла, производимое в единице объёма за единицу времени; V — объём рассматриваемого тела; S — поверхность тела. Соотношение (1) является уравнением равновесия тела под действием массовых сил, соотношение (2) представляет собой формулы Коши, соотношение (3) — закон Дюамеля—Неймана, (4) — уравнение теплопроводности [1].

Рассматриваемая краевая задача несвязной термоупругости распадается на краевую задачу теплопроводности

$$\Big(\Delta - \frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Theta(\bar r, t) = -\frac{1}{\chi}Q(\bar r, t),$$
$$\Theta(\bar r, 0) = \Theta_0(\bar r), \quad \Theta(\bar r, t)\big|_{\bar r\in S} = \Theta_S(\bar r, t),$$

решение которой рассмотрено в работе [2], и краевую задачу линейной теории упругости

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,\,j}(\bar r, t) + F_i(\bar r, t) = 0,\\
&\varepsilon_{ij}(\bar r, t) = \frac{1}{2}\big(u_{i,j}(\bar r, t) + u_{j,i}(\bar r, t)\big),\\
&\sigma_{ij}(\bar r, t) = E_{ijpq}\varepsilon_{pq}(\bar r, t) - c_{ij}\Theta(\bar r, t),\\
&u_i(\bar r, t)\big|_{\bar r\in S} = u_i^S(\bar r, t).
\end{aligned} \tag{5}$$

Запишем краевую задачу (5)) в перемещениях:

$$L_{ip}u_p(\bar r, t) = -\Phi_i(\bar r, t), \quad u_i(\bar r, t)\big|_{\bar r\in S} = u_i^S(\bar r, t). \tag{6}$$

Здесь

$$L_{ip} = \frac{1}{2}\left(E_{ijpq} + E_{ijqp}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_q}$$

— компоненты оператора Ламе,

$$\Phi_i(\bar r, t) = c_{ij}\Theta_{,j}(\bar r, t) + F_i(\bar r, t) \tag{7}$$

— компоненты вектора обобщенных массовых сил.

Сведём решение неоднородной краевой задачи (6) к решению задачи однородной. Для этого решение задачи (6) представим в виде суммы двух составляющих:

$$u_i(\bar r, t) = u_i'(\bar r, t) + u_i''(\bar r, t).$$

Первую составляющую запишем в виде объёмного потенциала

$$u_i'(\bar r, t) = -\int_{\mathbb{R}^3} K_{ip}(\bar r, \bar\xi)\Phi_p(\bar\xi, t)d\bar\xi. \tag{8}$$

Здесь вектор обобщённых массовых сил $\Phi_p(\bar{\xi}, t)$ предполагается равным нулю вне объёма тела V, $K_{ip}(\bar{r}, \bar{\xi})$ — компоненты тензора Кельвина—Сомильяны.

Действуя на обе части соотношения (8) оператором Ламе, получим

$$L_{qi}u_i'(\bar{r}, t) = -\Phi_q(\bar{r}, t). \tag{9}$$

Учитывая (9), из соотношений (6) находим

$$L_{ip}u_p''(\bar{r}, t) = 0, \quad u_i''(\bar{r}, t)\big|_{\bar{r}\in S} = u_i^S(\bar{r}, t) - u_i'(\bar{r}, t)\big|_{\bar{r}\in S}. \tag{10}$$

Будем искать решение краевой задачи (10) в виде

$$u_i''(\bar{r}, t) = -\int_{V'} K_{ip}(\bar{r} - \bar{\xi})\Phi_p'(\bar{\xi}, t)d\bar{\xi}. \tag{11}$$

Здесь $\Phi_p'(\bar{\xi}, t)$ — компоненты вектора массовых сил, распределенных по объёму $V' = \mathbb{R}^3 - V$.

Подберём функцию $\Phi_p'(\bar{\xi}, t)$ таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия краевой задачи (10). Пусть в уравнении (11) $\bar{r} \in S$:

$$u_i''(\bar{r}_S,\, t) = -\int_{V'} K_{ip}(\bar{r}_S - \bar{\xi})\Phi_p'(\bar{\xi}, t)d\bar{\xi}. \tag{12}$$

Последнее соотношение можно записать в матрично-векторной форме:

$$\mathbf{u}''(\bar{r}_S,\, t) = -\int_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S - \bar{\xi}) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(\bar{\xi}, t)d\bar{\xi}.$$

С учётом граничных условий краевой задачи (10) последнее соотношение запишем в виде

$$\mathbf{u}^S(\bar{r}_S,\, t) - \mathbf{u}'(\bar{r}_S,\, t) = -\int_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S - \bar{\xi}) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(\bar{\xi}, t)d\bar{\xi}. \tag{13}$$

Умножим обе части равенства (13) скалярно на величину $\mathbf{n}_l(\bar{r})e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}$ и проинтегрируем по поверхности тела S (здесь $\mathbf{n}_l(\bar{r})$ является l-той компонентой вектора нормали к поверхности тела):

$$\int_S \left[\mathbf{u}^S(\bar{r}_S,\, t) - \mathbf{u}'(\bar{r}_S,\, t)\right]\mathbf{n}_l(\bar{r})e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}dS(\bar{r}) = \\ = -\int_S \left[\int_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S - \bar{\xi}) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(\bar{\xi}, t)d\bar{\xi}\right]\mathbf{n}_l(\bar{r})e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}dS(\bar{r}). \tag{14}$$

Введём обозначение для левой части соотношения (14):

$$u_l^*(\bar{k}, t) = \int_S \left[\mathbf{u}^S(\bar{r}_S,\, t) - \mathbf{u}'(\bar{r}_S,\, t)\right]\mathbf{n}_l(\bar{r})e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}dS(\bar{r}).$$

Тогда (14) можно записать в виде

$$u_l^*(\bar{k}, t) = -\int_S \left[\int_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S - \bar{\xi}) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(\bar{\xi}, t)d\bar{\xi}\right]\mathbf{n}_l(\bar{r})e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}dS(\bar{r}). \tag{15}$$

Перейдём в правой части равенства (15) от интеграла по поверхности к интегралу по объёму, используя теорему Гаусса—Остроградского:

$$u_l^*(\bar{k}, t) = -\int_V \mathrm{div}_l \left[e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \cdot \int_{V'} \mathbf{K}(\bar{r} - \bar{\xi}) \cdot \boldsymbol{\Phi}'(\bar{\xi}, t)d\bar{\xi}\right]d\bar{r},$$

и запишем полученное соотношение в компонентной форме:

$$u_l^*(\bar{k},t) = -\int_V \frac{\partial}{\partial x_l}\left[e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}} \cdot \int_{V'} K_{lj}(\bar{r}-\bar{\xi})\Phi_j'(\bar{\xi},t)d\bar{\xi}\right] d\bar{r}. \tag{16}$$

Выполнив в правой части (16) дифференцирование, получим соотношение

$$u_l^*(\bar{k},t) = -\int_V \int_{V'} \left[K_{lj,\,l}(\bar{r}-\bar{\xi}) - ik_l K_{lj}(\bar{r}-\bar{\xi})\right] e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\Phi_j'(\bar{\xi},t)d\bar{\xi}d\bar{r}.$$

Произведя в правой части замену переменных $\bar{w} = \bar{r} - \bar{\xi}$, $\bar{r} = \bar{w} + \bar{\xi}$ и применив теорему о свёртке по конечной области, получим

$$u_l^*(\bar{k},t) = -\int_W \left[K_{lj,l}(\bar{w}) - ik_l K_{lj}(\bar{w})\right] e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}d\bar{w} \cdot \int_{V'} \Phi_j'(\bar{\xi},t)e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}d\bar{\xi}. \tag{17}$$

Введём обозначения:

$$K_{lj}^*(\bar{k}) = \int_W K_{lj}(\bar{w}) \cdot e^{-i\bar{k}\cdot\bar{w}}d\bar{w}, \quad K_{lj,l}^*(\bar{k}) = \int_W \frac{\partial K_{lj}(\bar{w})}{\partial w_l} \cdot e^{-i\bar{k}\cdot\bar{w}}d\bar{w},$$
$$\Phi_j'^*(\bar{k},t) = \int_W \Phi_j'(\bar{\xi},t) \cdot e^{-i\bar{k}\cdot\bar{\xi}}d\bar{\xi}.$$

Здесь объём W определяется объёмами V, V' и равенством $\bar{w} = \bar{r} - \bar{\xi}$.

Уравнение (17) с учётом введённых обозначений можно представить в виде

$$u_l^*(\bar{k},t) = -\left[K_{lj,l}^*(\bar{k}) - ik_l K_{lj}^*(\bar{k})\right] \cdot \Phi_j'^*(\bar{k},t). \tag{18}$$

Соотношения (18) представляют собой систему трёх линейных уравнений, из которых определяются неизвестные компоненты Фурье-образа обобщённых массовых сил $\Phi_j'^*(\bar{k},t)$. Решение системы запишем в виде

$$\Phi_j'^*(\bar{k},t) = R_{jl}(\bar{k})u_l^*(\bar{k},t). \tag{19}$$

Здесь $R_{jl}(\bar{k})$ — матрица, обратная матрице $\left[ik_l K_{lj}^*(\bar{k}) - K_{lj,\,l}^*(\bar{k})\right]$, то есть удовлетворяющая уравнению

$$R_{jl} \cdot \left[ik_l K_{lm}^*(\bar{k}) - K_{lm,l}^*(\bar{k})\right] = \delta_{jm}.$$

Применяя к соотношению (19) обратное преобразование Фурье, получим выражение для компонент вектора массовых сил:

$$\Phi_j'(\bar{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} R_{jl}(\bar{k})u_l^*(\bar{k},t)e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}d\bar{k}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (12), находим

$$u_i''(\bar{r},t) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V'}\int_{\mathbb{R}^3} K_{ip}(\bar{r}-\bar{\xi})R_{pl}(\bar{k})u_l^*(\bar{k},t)e^{i\bar{k}\cdot\bar{\xi}}d\bar{k}d\bar{\xi}.$$

Окончательно соотношение для нахождения решения краевой задачи (6) при заданных начальных и граничных условиях записывается так:

$$u_i(\bar{r},t) = -\int_{\mathbb{R}^3} K_{ip}(\bar{r}-\bar{\xi})\Phi_p(\bar{\xi},t)d\bar{\xi} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V'}\int_{\mathbb{R}^3} K_{ip}(\bar{r}-\bar{\xi})R_{pl}(\bar{k})u_l^*(\bar{k},t)e^{i\bar{k}\cdot\bar{\xi}}d\bar{k}d\bar{\xi},$$

или, учитывая выражение для обобщённых массовых сил (7), так:

$$u_i(\bar r, t) = -\int_{\mathbb{R}^3} K_{ip}(\bar r, \bar\xi)\left(c_{pj}\Theta,_j(\bar\xi,\ t) + F_p(\bar\xi,\ t)\right) d\bar\xi -\\ - \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V'}\int_{\mathbb{R}^3} K_{ip}(\bar r_S - \bar\xi) R_{pq}(\bar k) u^*_q(\bar k, t) e^{i\bar k\cdot\bar\xi} d\bar k d\bar\xi.$$

Таким образом, получено решение несвязной задачи термоупругости с граничными условиями первого рода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / ред. В. Д. Купрадзе. М.: Наука, 1976. 662 с.; англ. пер.: Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity / North-Holland Series in Applied Mathematics & Mechanics. Vol. 25 / ed. V. D. Kupradze. Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co., 1979. 929 pp.
2. *Глущенков В. С., Ермоленко Г. Ю., Макарова И. С.* Построение решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом опорных функций // *Вестник транспорта Поволжья*, 2012. №1(31). С. 95–99. [*Glushenkov V. S., Ermolenko G. Yu., Makarova I. S.* The construction of first boundary value problem for heat equation of support functions method // *Vestnik Transporta Povolzhiya*, 2012. no. 1(31). Pp. 95–99].

Поступила в редакцию 22/V/2012;
в окончательном варианте — 31/VII/2012.

MSC: 35Q74; 74F05

THE SOLUTION OF UNCOUPLED THERMOELASTIC PROBLEM WITH FIRST KIND BOUNDARY CONDITIONS

I. S. Makarova

Samara State Transport University,
18, First Bezimyanniy per., Samara, 443066, Russia.

E-mail: makarova_is@mail.ru

In this paper the method of calculation of the stress strain state of a homogeneous isotropic body of arbitrary shape with a piecewise smooth surface is offered. The behavior of the body is described by an uncoupled quasistatic thermoelastic problem, boundary conditions of the first kind are considered. The offered method allows to find the analytical solution of a considered problem of thermoelasticity and to define components of a displacement vector and temperature as functions of body point's coordinates and time. In order to obtain the solution the considered problem decomposed to an initial boundary value problem of heat conductivity and a boundary value problem of the linear theory of elasticity. The solution of a heat conductivity problem is built by support functions method. The non-uniform problem of the linear theory of elasticity is reduced to the homogeneous problem by means of Kelvin–Somigliana's tensor; its solution is obtained by means of the theory of potential and Fourier's transformation.

Key words: *boundary thermoelastic problem, first kind boundary conditions, heat conduction problem, volume potential, Fourier transform.*

Original article submitted 22/V/2012;
revision submitted 31/VII/2012.

Irina S. Makarova (Ph. D. (Phys. & Math.))positionAssociate Professor , Dept. of Computer Science.