УДК 517.956.3

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ $n$-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ НА ПЛОСКОСТИ

***Е. А. Максимова***

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: katyuha_mak@mail.ru

*Рассмотрена система уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу. Получено решение задачи Коши для случая, когда матрица-коэффициент — действительная* $(n \times n)$*-матрица и имеет одно собственное значение кратности* $n$ *или пару комплексно-сопряжённых собственных значений кратности* $n/2$ *и действительная часть собственных значений принадлежит интервалу* $(-1/2, 1/2)$.

**Ключевые слова:** *метод Римана, задача Коши, дифференциальные уравнения в частных производных, система уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу.*

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующую систему $n$ дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y}\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^\top$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

В работе [1] построена матрица Римана и с её помощью получено решение задачи Коши для системы (1) в случае, когда $n = 2$ и спектр матрицы $G$ принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$. В [2, 3] получены решения задачи Коши для случаев, когда собственные значения матрицы $G \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ — комлексно-сопряжённые с действительной частью из интервала $(-1/2, 1/2)$.

Необходимо найти решение задачи Коши для системы (1) для случая, когда матрица $G$ имеет одно собственное значение $\lambda \in \mathbb{R}$ кратности $n$ и $\lambda \in (-1/2, 1/2)$ или пару комплексно-сопряжённых собственных значений $\lambda_1$, $\lambda_2$ кратности $n/2$:

$$\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \alpha \in (-1/2, 1/2).$$

Задача Коши. Найти вектор-функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, где $D = \{(x, y) : 0 < -y < x < y + 1\}$;
2) $U(x, y)$ удовлетворяет системе (1);
3) выполняются начальные условия

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1]; \tag{2}$$

$$\lim_{y\to -0} K(y)\frac{\partial U}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in (0, 1), \tag{3}$$

*Екатерина Алексеевна Максимова*, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

где $\tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x), \ldots, \tau_n(x))^\top$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \ldots, \nu_n(x))^\top$, $K(y) = = (-y)^{2G}$.

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ область $D$ переходит в область $H = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, матричное уравнение (1) редуцируется к системе уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу специального вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{G}{\eta - \xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{G}{\eta - \xi}\frac{\partial U}{\partial\eta} = 0, \tag{4}$$

а начальные условия (2), (3) примут следующий вид:

$$U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1]; \tag{5}$$

$$\lim_{\eta\to\xi+0} K\Big(\frac{\xi - \eta}{2}\Big)\Big(\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\Big) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \tag{6}$$

**Случай 1.** Известно [4], если $\lambda \in (-1/2, 1/2)$ и

$$\operatorname{rank}(G - \lambda E)^{n-1} - 2\operatorname{rank}(G - \lambda E)^n + \operatorname{rank}(G - \lambda E)^{n+1} = 1,$$

где $E$ — единичная матрица, то существует матрица перехода $Q$ к жорданову базису такая, что

$$Q^{-1}GQ = J(\lambda).$$

Здесь $J(\lambda)$ — жорданова клетка порядка $n$, соответствующая действительному собственному значению $\lambda$.

Тогда система уравнений (4) редуцируется к

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{J(\lambda)}{\eta - \xi}\frac{\partial W}{\partial\xi} - \frac{J(\lambda)}{\eta - \xi}\frac{\partial W}{\partial\eta} = 0, \tag{7}$$

где $W = Q^{-1}U$.

Условия Коши (5), (6) для системы (7) преобразуются к виду

$$W(\xi, \xi) = Q^{-1}\tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1]; \tag{8}$$

$$\lim_{\eta\to\xi+0} K\Big(\frac{\xi - \eta}{2}\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial\xi} - \frac{\partial W}{\partial\eta}\Big) = Q^{-1}\nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \tag{9}$$

В работе [1] построена матрица Римана для системы (7):

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = f(J) = V^J\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} J, J \\ 1 \end{matrix}; \sigma\right),$$

где

$$\sigma = -\frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi - \eta_0)(\xi_0 - \eta)}, \quad V = \frac{(\eta - \xi)^2}{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}.$$

Если $W(\xi, \eta)$ является решением (7), а $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ — матрица Римана этой системы, то, используя свойства матрицы Римана и векторный аналог тождества Грина [5], получаем

$$W(\xi_0,\eta_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\frac{1}{2}(RU)\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+\frac{1}{2}(RU)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\xi_0+\varepsilon}}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}R\Big(\frac{\partial U}{\partial\eta}-\frac{\partial U}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi-\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\Big(\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\partial R}{\partial\xi}+\frac{4RJ}{\xi-\eta}\Big)U\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi\Bigg).$$

Очевидно, что $W(\xi_0,\eta_0)$ можно записать в виде

$$W(\xi_0,\eta_0)=\sum_{k=1}^{n}I(J,w_k)e_k, \tag{10}$$

где

$$I(J,w_k)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\frac{1}{2}(f(J)w_k)\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+\frac{1}{2}\big(f(J)w_k\big)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\xi_0+\varepsilon}}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}f(J)\Big(\frac{\partial w_k}{\partial\eta}-\frac{\partial w_k}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\Big(\frac{\partial f(J)}{\partial\eta}-\frac{\partial f(J)}{\partial\xi}+\frac{4f(J)J}{\xi-\eta}\Big)w_k\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi\Bigg);$$

$e_k=(e_{k1},e_{k2},\dots,e_{kn})^\top$, $e_{ki}=0$ если $i\neq k$, $e_{kk}=1$; $w_k$ — компоненты вектора $W$.

Известно [6], если $J$ — жорданова клетка, то функция $I(J,w_k)$ может быть записана в виде

$$I(J,w_k)=\begin{pmatrix} I(\lambda,w_k) & \dfrac{I'_\lambda(\lambda,w_k)}{1!} & \vdots & \dfrac{I_\lambda^{(n-1)}(\lambda,w_k)}{(n-1)!}\\ 0 & I(\lambda,w_k) & \vdots & \dfrac{I_\lambda^{(n-2)}(\lambda,w_k)}{(n-2)!}\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ 0 & 0 & \vdots & I(\lambda,w_k)\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$I(\lambda,w_k)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\frac{1}{2}\big(f(\lambda)w_k\big)\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+\frac{1}{2}\big(f(\lambda)w_k\big)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\xi_0+\varepsilon}}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}f(\lambda)\Big(\frac{\partial w_k}{\partial\eta}-\frac{\partial w_k}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\Big(\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\eta}-\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\xi}+\frac{4f(\lambda)\lambda}{\xi-\eta}\Big)w_k\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi\Bigg).$$

Подставляя (11) в (10), получаем

$$W(\xi_0,\eta_0)=\begin{pmatrix} I(\lambda,w_1)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{I_\lambda^{(k)}(\lambda,w_{k+1})}{k!} \\ I(\lambda,w_2)+\sum\limits_{k=1}^{n-2}\dfrac{I_\lambda^{(k)}(\lambda,w_{k+2})}{k!} \\ \vdots \\ I(\lambda,w_n) \end{pmatrix}=$$

$$=EI(\lambda,W)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^k}{k!}I_\lambda^{(k)}(\lambda,W), \quad (12)$$

где $H$ — $(n\times n)$-матрица вида

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Выполняя в выражении (12) замену $W=Q^{-1}U$, получим

$$U(\xi_0,\eta_0)=EI(\lambda,U)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{QH^kQ^{-1}}{k!}I_\lambda^{(k)}(\lambda,U)=$$

$$=EI(\lambda,U)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(G-\lambda E)^k}{k!}I_\lambda^{(k)}(\lambda,U).$$

Вид $I(\lambda,U)$ будет различным для $\lambda\in(0,1/2)$ и $\lambda\in(-1/2,0]$.

**Случай 1.1.** Пусть $\lambda\in(0,1/2)$. В этом случае, исходя из результатов [1], получим

$$I(\lambda,U)=K_1(\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\lambda}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)[\varphi(\xi)]^{\lambda-1}d\xi-$$

$$-K_2(\lambda)2^{2\lambda-1}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)[\varphi(\xi)]^{-\lambda}d\xi,$$

где $K_1(\lambda)=\Gamma(2\lambda)/\Gamma^2(\lambda)$, $K_2(\lambda)=\Gamma(1-2\lambda)/\Gamma^2(1-\lambda)$, $\varphi(\xi)=(\eta_0-\xi)(\xi-\xi_0)$.

Производные $I(\lambda,U)$ по переменной $\lambda$ будут иметь такой вид:

$$I_\lambda^{(k)}(\lambda,U)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Bigg(K_1^{(j)}(\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{1-2\lambda}\times$$

$$\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)[\varphi(\xi)]^{\lambda-1}\left(\ln\frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0-\xi_0)^2}\right)^{k-j}d\xi-$$

$$- K_2^{(j)}(\lambda)2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi)[\varphi(\xi)]^{-\lambda}\Big(\ln \frac{4}{\varphi(\xi)}\Big)^{k-j} d\xi\Big).$$

Здесь производные $K_1^{(j)}(\lambda)$, $K_2^{(j)}(\lambda)$ выражаются через полигамма-фунцию $\Psi^{(k)}(z)$ [7, 8].

**Случай 1.2.** Пусть $\lambda \in (-1/2, 0]$. Исходя из результатов [1] получим

$$I(\lambda, U) = K_1(1+\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi)[\varphi(\xi)]^{\lambda} d\xi -$$
$$- \frac{1}{2} K_2(-\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi)[\varphi(\xi)]^{\lambda}(\eta_0+\xi_0-2\xi) d\xi -$$
$$- K_2(\lambda)2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi)[\varphi(\xi)]^{-\lambda} d\xi,$$

$$I_\lambda^{(k)}(\lambda, U) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Big( K_1^{(j)}(1+\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\lambda} \times$$
$$\times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi)[\varphi(\xi)]^{\lambda-1}\Big(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0-\xi_0)^2}\Big)^{k-j} d\xi -$$
$$- \frac{(-1)^j}{2} K_2^{(j)}(-\lambda)(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi)[\varphi(\xi)]^{\lambda}\Big(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0-\xi_0)^2}\Big)^{k-j} (\eta_0+\xi_0-2\xi) d\xi -$$
$$- K_2^{(j)}(\lambda)2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi)[\varphi(\xi)]^{-\lambda}\Big(\ln \frac{4}{(\eta_0-\xi_0)^2}\Big)^{k-j} d\xi\Big).$$

**Случай 2.** Рассмотрим случай, когда матрица $G$ имеет комплексно-сопряжённые собственные значения:

$$\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \alpha \in (-1/2, 1/2).$$

Из свойств функции от матрицы [9] следует, что вектор-функция $U(\xi, \eta)$ есть вещественная функция даже в том случае, когда характеристические числа матрицы $G$ комплексно-сопряжённые. Выполнение условия

$$\operatorname{rank}(G-\lambda E)^{n/2-1} - 2\operatorname{rank}(G-\lambda E)^{n/2} + \operatorname{rank}(G-\lambda E)^{n/2+1} = 1$$

означает, что существует матрица перехода $Q$ к жорданову базису такая, что

$$Q^{-1}GQ = J = P_n(\alpha, \beta),$$

при этом блочная матрица $P_n(\alpha, \beta)$ — вещественный аналог жордановой клетки порядка $n$ [4], соответствующий паре комплексно-сопряжённых собственных значений $\lambda$, $\bar{\lambda}$:

$$P_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \mathsf{P}(\alpha,\beta) & \mathsf{E} & \vdots & \mathsf{O} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{P}(\alpha,\beta) & \vdots & \mathsf{O} & \mathsf{O} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{P}(\alpha,\beta) & \mathsf{E} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O} & \mathsf{P}(\alpha,\beta) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathsf{P}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix},\quad \mathsf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathsf{O}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В этом случае система (4) преобразуется к виду (7) и начальные условия будут иметь вид (8), (9).

Можно показать, что функция от матрицы $P_n(\alpha,\beta)$ представима в виде блочной матрицы:

$$f(P_n(\alpha,\beta))=\begin{pmatrix}\mathsf{F} & \mathsf{F}_1 & \vdots & \mathsf{F}_{n/2-1}\\ \mathsf{O} & \mathsf{F} & \vdots & \mathsf{F}_{n/2-2}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{F}\end{pmatrix},$$

где

$$\mathsf{F}=\begin{pmatrix}\operatorname{Re}(f(\lambda)) & \operatorname{Im}(f(\lambda))\\ -\operatorname{Im}(f(\lambda)) & \operatorname{Re}(f(\lambda))\end{pmatrix},\quad \mathsf{F}_k=\begin{pmatrix}\dfrac{\operatorname{Re}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \dfrac{\operatorname{Im}(f^{(k)}(\lambda))}{k!}\\ -\dfrac{\operatorname{Im}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \dfrac{\operatorname{Re}(f^{(k)}(\lambda))}{k!}\end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично случаю 1, получим

$$W(\xi_0,\eta_0)=E\operatorname{Re}(I(\lambda,W))+B_1\operatorname{Im}(I(\lambda,W))+\\ +\sum_{k=1}^{n/2-1}\left(\frac{H^k}{k!}\operatorname{Re}\left(I_\lambda^{(k)}(\lambda,W)\right)+\frac{B_{k+1}}{k!}\operatorname{Im}\left(I_\lambda^{(k)}(\lambda,W)\right)\right).\quad (14)$$

Здесь $H$ — $(n\times n)$-матрица вида (13), $B_k$ — блочные $(n\times n)$-матрицы

$$B_1=\begin{pmatrix}\mathsf{N} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O}\\ \mathsf{O} & \mathsf{N} & \vdots & \mathsf{O}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{N}\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{N} & \mathsf{O} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O}\\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \mathsf{N} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \mathsf{O} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{N}\\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \mathsf{O} & \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O}\end{pmatrix},\ \ldots,$$

$$B_{n/2}=\begin{pmatrix}\mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O} & \mathsf{N}\\ \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O} & \mathsf{O}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathsf{O} & \vdots & \mathsf{O} & \mathsf{O}\end{pmatrix},\quad \mathsf{N}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Выполняя в (14) замену $W=Q^{-1}U$, получим

$$U(\xi_0,\eta_0)=E\operatorname{Re}(I(\lambda,U))+QB_1Q^{-1}\operatorname{Im}(I(\lambda,U))+$$

$$+\sum_{k=1}^{n/2-1}\left(\frac{QH^kQ^{-1}}{k!}\operatorname{Re}\left(I_\lambda^{(k)}(\lambda,U)\right)+\frac{QB_{k+1}Q^{-1}}{k!}\operatorname{Im}\left(I_\lambda^{(k)}(\lambda,U)\right)\right).$$

Вид $I(\lambda,U)$ и её производных будет различным для $\operatorname{Re}(\lambda)\in(0,1/2)$ и $\operatorname{Re}(\lambda)\in(-1/2,0]$.

**Случай 2.1** Пусть $\operatorname{Re}(\lambda)\in(0,1/2)$. Используя результаты, опубликованные в работе [2], получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(I(\lambda,U)) = {}&\big(\operatorname{Re}(M_1(\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))+\operatorname{Im}(M_1(\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times\\ &\times(\eta_0-\xi_0)^{1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^{\alpha-1}(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi+\\ &+\big(\operatorname{Re}(M_1(\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))-\operatorname{Im}(M_1(\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times\\ &\times(\eta_0-\xi_0)^{1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^{\alpha-1}(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-\\ &-2^{2\alpha-1}\big(\operatorname{Re}(M_2(\lambda))\cos(\beta\ln 4)-\operatorname{Im}(M_2(\lambda))\sin(\beta\ln 4)\big)\times\\ &\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-\\ &-2^{2\alpha-1}\big(\operatorname{Re}(M_2(\lambda))\sin(\beta\ln 4)+\operatorname{Im}(M_2(\lambda))\cos(\beta\ln 4)\big)\times\\ &\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(I(\lambda,U)) = {}&\big(\operatorname{Im}(M_1(\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))-\operatorname{Re}(M_1(\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times\\ &\times(\eta_0-\xi_0)^{1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^{\alpha-1}(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi+\\ &+\big(\operatorname{Re}(M_1(\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))+\operatorname{Im}(M_1(\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times\\ &\times(\eta_0-\xi_0)^{1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^{\alpha-1}(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-\\ &-2^{2\alpha-1}\big(\operatorname{Re}(M_2(\lambda))\sin(\beta\ln 4)+\operatorname{Im}(M_2(\lambda))\cos(\beta\ln 4)\big)\times\\ &\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-\\ &-2^{2\alpha-1}\big(\operatorname{Re}(M_2(\lambda))\cos(\beta\ln 4)-\operatorname{Im}(M_2(\lambda))\sin(\beta\ln 4)\big)\times\\ &\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(M_1(\lambda))&=(2\alpha-1)\operatorname{Re}(M_2(1-\lambda))-2\beta\operatorname{Im}(M_2(1-\lambda)),\\ \operatorname{Im}(M_1(\lambda))&=(2\alpha-1)\operatorname{Im}(M_2(1-\lambda))+2\beta\operatorname{Re}(M_2(1-\lambda)),\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(M_2(\lambda)) = \frac{\sin(\pi\alpha)\operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\cos\Big(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\Big)dt-$$
$$-\frac{\cos(\pi\alpha)\operatorname{sh}(\pi\beta)}{\pi}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\sin\Big(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\Big)dt,$$

$$\operatorname{Im}(M_2(\lambda)) = \frac{\sin(\pi\alpha)\operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\sin\Big(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\Big)dt-$$
$$-\frac{\cos(\pi\alpha)\operatorname{sh}(\pi\beta)}{\pi}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-2\alpha}\cos\Big(\beta\ln\frac{t}{(1-t)^2}\Big)dt.$$

**Случай 2.2** Пусть $\operatorname{Re}(\lambda) \in (-1/2, 0]$. Используя результаты, полученные в работе [3], получим

$$\operatorname{Re}(I(\lambda,U)) = \big(\operatorname{Re}(M_1(\lambda+1))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0)) + \operatorname{Im}(M_1(\lambda+1))\times$$
$$\times\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^\alpha(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi+$$
$$+\big(\operatorname{Re}(M_1(\lambda+1))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0)) - \operatorname{Im}(M_1(\lambda+1))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times$$
$$\times(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^\alpha(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\big(\operatorname{Re}(M_2(-\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0)) + \operatorname{Im}(M_2(-\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times$$
$$\times(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau'(\xi)\varphi^\alpha(\xi)(\eta_0+\xi_0-2\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\big(\operatorname{Re}(M_2(-\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0)) - \operatorname{Im}(M_2(-\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times$$
$$\times(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau'(\xi)\varphi^\alpha(\xi)(\eta_0+\xi_0-2\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-$$
$$-2^{2\alpha-1}\big(\operatorname{Re}(M_3(\lambda))\cos(\beta\ln 4) - \operatorname{Im}(M_3(\lambda))\sin(\beta\ln 4)\big)\times$$
$$\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-$$
$$-2^{2\alpha-1}\big(\operatorname{Re}(M_3(\lambda))\sin(\beta\ln 4) + \operatorname{Im}(M_3(\lambda))\cos(\beta\ln 4)\big)\times$$
$$\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi,$$

$$\operatorname{Im}(I(\lambda,U)) = \big(\operatorname{Im}(M_1(\lambda+1))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0)) - \operatorname{Re}(M_1(\lambda+1))\times$$
$$\times\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^\alpha(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi+$$
$$+\big(\operatorname{Re}(M_1(\lambda+1))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0)) + \operatorname{Im}(M_1(\lambda+1))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times$$
$$\times(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\varphi^\alpha(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-$$

$$
-\frac{1}{2}\big(\mathrm{Im}(M_2(-\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))-\mathrm{Re}(M_2(-\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times
$$

$$
\times(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau'(\xi)\varphi^{\alpha}(\xi)(\eta_0+\xi_0-2\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-
$$

$$
-\frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}(M_2(-\lambda))\cos(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))+\mathrm{Im}(M_2(-\lambda))\sin(2\beta\ln(\eta_0-\xi_0))\big)\times
$$

$$
\times(\eta_0-\xi_0)^{-1-2\alpha}\int_{\xi_0}^{\eta_0}\tau'(\xi)\varphi^{\alpha}(\xi)(\eta_0+\xi_0-2\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi-
$$

$$
-2^{2\alpha-1}\big(\mathrm{Re}(M_3(\lambda))\sin(\beta\ln 4)+\mathrm{Im}(M_3(\lambda))\cos(\beta\ln 4)\big)\times
$$

$$
\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\cos(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi+
$$

$$
+2^{2\alpha-1}\big(\mathrm{Re}(M_3(\lambda))\cos(\beta\ln 4)-\mathrm{Im}(M_3(\lambda))\sin(\beta\ln 4)\big)\times
$$

$$
\times\int_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(\xi)\varphi^{-\alpha}(\xi)\sin(\beta\ln\varphi(\xi))d\xi,
$$

где

$$
\mathrm{Re}(M_3(\lambda))=\mathrm{Re}(M_2(\lambda+1))\Big(\frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+4\Big)-\mathrm{Im}(M_2(\lambda))\frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2},
$$

$$
\mathrm{Im}(M_3(\lambda))=\mathrm{Im}(M_2(\lambda+1))\Big(\frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+4\Big)+\mathrm{Re}(M_2(\lambda))\frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2}.
$$

Используя выражения для $U(\xi_0,\eta_0)$, можно записать решение $U(x,y)$ в области $D$. Таким образом, если $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и $\nu(x)\in C^2(0,1)$, то задача Коши (2), (3) для уравнения (1) корректна по Адамару.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Андреев А. А.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа / В сб.: *Дифференциальные уравнения в частных производных*: Сб. тр. мат. кафедр désinститутов РСФСР. Вып. 16. Рязань: Рязан. гос. пед. инст., 1980. С. 9–14. [*Andreev A. A.* On a class of systems of differential equations of hyperbolic type / In: *Partial differential equations.* Ryazan: Ryazan. Gos. Ped. Inst., 1980. Pp. 9–14].
2. *Андреев А. А., Максимова Е. А.* Решение задачи Коши для одной системы гиперболического типа с сингулярными характеристиками / В сб.: *Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием.* Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Математическое моделирование и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2011. С. 11–17. [*Andreev A. A, Maksimova E. A.* The solution of the Cauchy problem for one hyperbolic system with singular characteristics / In: *Proceedings of the Eighth All-Russian Scientific Conference with international participation.* Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2011. Pp. 11–17].
3. *Максимова Е. А.* Решение задачи Коши для системы уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 167–170. [*Maksimova E. A.* Solution of the Cauchy problem for system of the Euler–Poisson–Darboux equations // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 3(24). Pp. 167–170].
4. *Тыртышников Е. Е.* Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 480 с. [*Tyrtyshnikov E. E.*. Moscow: Fizmatlit, 2007. 480 pp.]
5. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1966. 164 с.; англ. пер.: *Bitsadze A. V.* Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964. 160 pp.

6. *Lancaster P.* Theory of Matrices. New York: Academic Press, 1969. 316 pp.; русск. пер.: *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
7. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York: Dover, 1972. 824 pp.; русск. пер.: Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*Gantmakher F. R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka. 549 pp.]

Поступила в редакцию 22/I/2011;
в окончательном варианте — 24/II/2012.

**MSC: 35L45**

## ON CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEM OF $n$ EULER–POISSON–DARBOUX EQUATIONS IN THE PLANE

***E. A. Maksimova***

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: katyuha_mak@mail.ru

*The system of Euler–Poisson–Darboux equations is considered, the Cauchy problem is solved for the case of real $n \times n$ matrix-coefficient with one real eigenvalue or two complex conjugate eigenvalues with real part in the interval $(-1/2, 1/2)$.*

**Key words:** *Riemann method, Cauchy problem, partial differential equation, system of Euler–Poisson–Darboux equations.*

Original article submitted 22/I/2011;
revision submitted 24/II/2012.

*Ekaterina A. Maksimova*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.