Математическое моделирование

УДК 519.635.4:532.135

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА СТРУКТУРИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ЗАЗОРЕ

Н. А. Беляева, К. П. Кузнецов

Сыктывкарский государственный университет,
Россия, 167000, Сыктывкар, Октябрьский пр., 55.

E-mails: belyayevana@mail.ru, kuznetsovkp@sptrace.ru

Представлено исследование по параметру стационарного течения Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре. Определены условия бифуркации устойчивых неоднородных состояний из неустойчивых однородных в области немонотонности реологической кривой течения. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы. Отмечается качественное соответствие установившегося решения задачи с решением нестационарной задачи.

Ключевые слова: *структурированная жидкость, течение Куэтта, область немонотонности реологической кривой, исследование по параметру, бифуркация.*

Экспериментально факт существования области немонотонности реологической кривой течения неньютоновских жидкостей установлен достаточно давно [1] и подтвержден работами [2, 3]. Однако теоретических исследований указанной области проведено недостаточно.

В работах [4–6] исследовано течение Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре: построены реологические кривые течения в зависимости от характерного параметра жидкости, однородные стационарные течения в области немонотонности реологической кривой — области «сверханомалии вязкости», ответственной за процессы самоорганизации при течении структурированных жидкостей. Аналитически доказано, что вследствие потери устойчивости однородного стационарного состояния псевдопластической жидкости в указанной области должна формироваться диссипативная структура — устойчивое неоднородное состояние. В работах [7–9] продолжены эти исследования: численно построена диссипативная структура — монотонно возрастающее или монотонно убывающее устойчивое неоднородное состояние. Методом бифуркационного анализа аналогичная структура подтверждена работами [10–12]. Здесь же методом параметрического анализа предложено решение обратной задачи — определение значений параметров жидкости, отвечающих за возникновение области сверханомалии. В настоящей работе продолжены указанные исследования.

Надежда Александровна Беляева (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического моделирования и кибернетики. *Константин Петрович Кузнецов*, аспирант, каф. математического моделирования и кибернетики.

Пусть структурированная вязкая несжимаемая жидкость заполняет полосу между плоскостями $\xi = 0$ и $\xi = h$, а её течение происходит в направлении оси η и вызывается движением плоскости $\xi = h$. Обозначим через $\overrightarrow{u}$ — вектор скорости жидкости в произвольной точке полосы в момент времени t, тогда $\overrightarrow{u} = (0,\, u_\eta,\, 0)$, причём $u_\eta = u(\xi,\, t)$. Будем предполагать, что жидкость является смесью двух компонент A_1 и A_2, которые под действием приложенного механического поля, характеризуемого напряжением σ и скоростью деформации $\gamma = \partial u/\partial \xi$, могут взаимно превращаться друг в друга. Суммарная скорость превращения определяется соотношением:

$$\Phi(a,\, \gamma) = k_2(1-a) - ak_0 \exp\left(p_0\sigma + q_0\gamma^2\right), \tag{1}$$

где a — степень структурных превращений (доля A_1 в смеси A_1 и A_2); k_0, k_2, p, q — параметры жидкости. Будем предполагать, что жидкость подчиняется реологическому уравнению состояния вида

$$\sigma = \mu\gamma, \tag{2}$$

где вязкость $\mu = \mu(a)$ задаётся соотношением

$$\mu^{-1}(a) = \mu_1^{-1}a + \mu_2^{-1}(1-a).$$

Здесь μ_1, μ_2 — вязкости компонент A_1 и A_2 соответственно.

Замкнутая система уравнений, описывающая течение и превращение рассматриваемой жидкости, имеет вид [6, 9]:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\Big(\mu(a)\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\Big), \\ \dfrac{\partial a}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \Phi(a,\, \gamma). \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение системы (3) — уравнение движения, второе — диффузионно-кинетическое уравнение относительно степени структурных превращений a; ρ — плотность, D — коэффициент диффузии. Начальные и граничные условия рассматриваемой задачи:

$$t = 0: \quad a\big|_{0\leqslant\xi\leqslant h} = a^0, \quad u\big|_{0\leqslant\xi<h} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{\partial a}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=h} = 0, \quad u_{\xi=0} = 0, \quad u\big|_{\xi=h} = u_0, \quad u_0 > 0. \tag{5}$$

Рассмотрим стационарные решения модели (3)–(5). Выразим из первого уравнения системы (3) стационарную скорость деформации:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{c}{\mu(a)}, \quad c = \mathrm{const},$$

и подставим во второе уравнение с учётом выражений (1), (2). Получим одно дифференциальное уравнение второго порядка:

$$D\frac{d^2a}{d\xi^2} + k_2\left(1 - a - a\frac{k_0}{k_2}\exp\left(p_0c + q_0c^2\mu(a)^{-2}\right)\right) = 0. \tag{6}$$

Введём безразмерные переменные и параметры:

$$r = \frac{\xi}{h}, \quad L = \frac{k_2 h^2}{D}, \quad \chi = \frac{k_0}{k_2}, \quad y = p_0 c, \quad \delta = \frac{q_0}{\mu_2^2 p_0^2}, \quad \lambda = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1.$$

Тогда из соотношения (6) с учётом граничных условий (5) получим безразмерную краевую задачу относительно степени структурных превращений:

$$\frac{d^2 a}{dr^2} = -L\left[1 - a - a\chi \exp\left(y + \delta y^2 (1 + \lambda a)^2\right)\right], \tag{7}$$

$$\left.\frac{da}{dr}\right|_{r=0} = \left.\frac{da}{dr}\right|_{r=1} = 0. \tag{8}$$

Введём функцию

$$F(a,\, y,\, \delta,\, \chi) = 1 - a - a\chi \exp\left(y + \delta y^2 (1 + \lambda a)^2\right),$$

зависящую от параметров y, δ, χ. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{d^2 a}{dr^2} = -LF(a,\, y,\, \delta,\, \chi). \tag{9}$$

В работе [12] исследовано поведение однородных стационарных решений задачи в зависимости от параметра y: определены значения параметров, при которых существует две точки поворота, разделяющие области с одним и тремя однородными решениями задачи (7), (8). При этом множество значений параметра y, задающих три решения, соответствует области «сверханомалии вязкости» на реологической кривой. Отметим, что возникающие бифуркации по параметру y не нарушают пространственной однородности. Кроме того, они не зависят от параметра L. Таким образом, задача (7), (8) обладает несколькими тривиальными решениями (т. е. однородными решениями, не зависящими от параметра L). Исследуем поведение решений уравнения (9) в указанной области немонотонности реологической кривой в зависимости от значений параметра L.

В данной работе рассмотрены бифуркации тривиальных решений, нарушающие пространственную однородность, — первичные бифуркации. Вещественная бифуркация находится из условия обращения в ноль собственного значения оператора задачи (9), линеаризованного на постоянном решении a_0 при граничных условиях (8):

$$\mathfrak{L}(a_0,\, L)z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + Lf(a_0)z, \tag{10}$$

$$f(a_0) = \left.\frac{\partial F}{\partial a}\right|_{a=a_0}.$$

Уравнение

$$\mathfrak{L}(a_0,\, L)z = 0$$

имеет невырожденные решения только в случае, если $f(a_0) > 0$. Последнее условие выполняется, когда однородное решение a_0 является средним (из трёх) решением в области «сверханомалии»; оно лежит на убывающем участке кривой течения [6]. Получаем бифуркационную длину $L_*^{(n)} = \pi^2 n^2 / f(a_0)$. Величину $L_*^{(1)}$ называют элементарной бифуркационной длиной; остальные бифуркационные длины оказываются кратными элементарным бифуркационным длинам.

Рассмотрим устойчивость тривиального решения a_0 в зависимости от величины параметра L. Если все собственные числа линейного оператора (10) лежат в левой (комплексной) полуплоскости, то тривиальное решение устойчиво, что достигается в случае $L < \pi^2/f(a_0)$. Таким образом, при переходе через $L_* = \pi^2/f(a_0)$ положение равновесия a_0 теряет устойчивость, и вследствие бифуркации возникают неоднородные решения. В [12] показано, что бифуркация в точке L_* суперкритическая: неоднородное решение вблизи точки бифуркации существует для значений $L > L_*$.

Для построения фазовой диаграммы — зависимости решений от параметра L, воспользуемся методом отображения параметра [13]. Построим зависимость решения задачи (7), (8) от параметра $l : l^2 = L$. Введём новую независимую переменную $z = rl$. Тогда дифференциальное уравнение (7) запишется так:

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = -1 + a + a\chi \exp(y + \delta y^2 (1 + \lambda a)^2) \tag{11}$$

и оно не будет содержать параметр L. Граничные условия (8) приобретут вид

$$\left.\frac{da}{dz}\right|_{z=0} = 0; \quad \left.\frac{da}{dz}\right|_{z=l} = 0.$$

Выберем недостающее начальное условие следующим образом:

$$a(0) = \eta, \quad 0 < \eta < 1, \tag{12}$$

и проинтегрируем полученную задачу Коши (11), (12), используя метод Рунге—Кутта четвёртого порядка [14], от $z = 0$ до точки $z = z_1$, в которой

$$\left.\frac{da}{dz}\right|_{z=z_1} = 0.$$

Значение z_1 определяет значение параметра l, соответствующее выбранному начальному условию (12) (и найденному решению $a(z)$):

$$z_1 = l. \tag{13}$$

Для выполнения равенства (13) воспользуемся итерационным методом последовательных приближений: если в процессе интегрирования знак производной $a'(z_i)$ меняется на противоположный, возвращаемся на один шаг назад и продолжаем интегрирование с шагом, уменьшенным вдвое. По достижении заданной точности решения, т. е. $|a'(z_i)| \leqslant 0{,}0001$, процесс прекращается. Полученные таким образом значения l для последовательности значений η приведены в таблице. Из этих данных видно, что при значении $y = 7$ для определённого интервала значений l (например, для $l = 0{,}4$) существует два решения (неоднородных) исходной краевой задачи (7), (8).

η	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
$y = 6{,}5$	4,62	4	4,36	*	*	*	*	*	*	*
$y = 7$	*	*	*	4,79	3,34	4	5,19	6,15	7,51	13,25
$y = 7{,}5$	*	*	*	*	*	*	14,13	12,96	15,28	*

Примечание: (*) отмечены случаи расхождения итерационного процесса

Если продолжить полученные координаты точек поворота L_* в зависимости от параметра y, то получим соответствующую бифуркационную диаграмму (рис. 1). Заметим, что кривая $L(y)$ ограничена асимптотами, соответствующими точкам поворота по параметру y.

Варьируя параметр y и учитывая возникающие бифуркации, можно описать следующую бифуркационную картину для рассматриваемой задачи. При пересечении параметром y критических значений, соответствующих точкам поворота, происходит жесткая бифуркация — скачкообразный переход с одной ветви решения на другую — тривиального решения с появлением (или исчезновением) пары нетривиальных однородных решений, причём все решения устойчивы. Для случая существования трех решений, если значение параметра L превышает элементарную бифуркационную длину L_*, наблюдается мягкая бифуркация — суперкритическая «вилка» [15]: одно из положения равновесия (среднее решение $a = a_2$) теряет устойчивость и из него рождается одно неустойчивое и пара расходящихся устойчивых нетривиальных пространственно-неоднородных решений (рис. 2), переход к которым от однородного решения осуществляется плавно и непрерывно.

Для нахождения данных решений воспользуемся методом стрельбы [13], который заключается в сведении исходной краевой задачи к задаче Коши. Для этого необходимо в некоторой точке задать два начальных условия. Воспользуемся тем, что в точке $r = 0$ уже имеется одно условие, а именно —

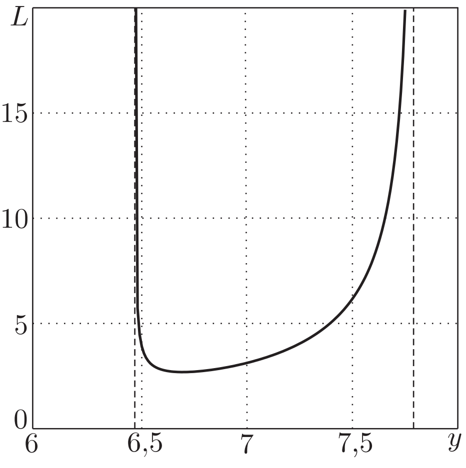

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма. Сплошной линией отмечена кривая кратности; штриховой — асимптоты: $y_1 = 6{,}468$, $y_2 = 7{,}794$ ($\lambda = -0{,}7$, $\chi = 10^{-5}$)

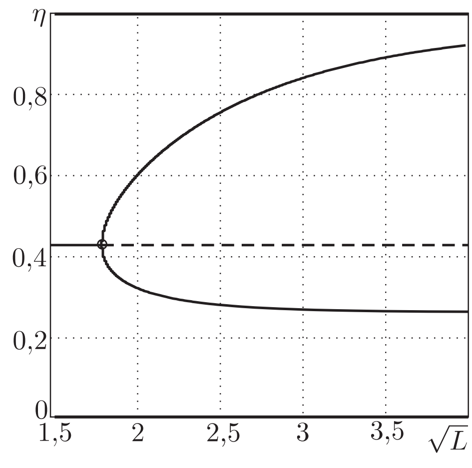

Рис. 2. Диаграмма стационарных решений. Сплошной линией отмечены устойчивые решения, штриховой — неустойчивые; кружком отмечена точка бифуркации $l = \sqrt{L_*}$ ($y = 7$, $\lambda = -0{,}7$, $\chi = 10^{-5}$)

условие (8), и выберем дополнительное условие вида

$$a(0) = \eta. \tag{14}$$

Полученную задачу Коши на промежутке от $r = 0$ до $r = 1$ будем решать с помощью метода Рунге—Кутта четвертого порядка, предварительно преобразовав (7) в систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} w' = -LF(a), \\ a' = w. \end{cases}$$

Начальные условия (8) и (14) преобразуются к виду $a(0) = \eta$, $w(0) = 0$. По окончании интегрирования, т. е. в точке $r = 1$, получаем значения решения, зависящие от выбора условия (14): $a(1, \eta)$, $w(1, \eta)$. Для того чтобы найденное решение задачи Коши было одновременно и решением исходной краевой задачи, необходимо удовлетворить условиям (8):

$$F_1(\eta) = a'(1, \eta) = 0. \tag{15}$$

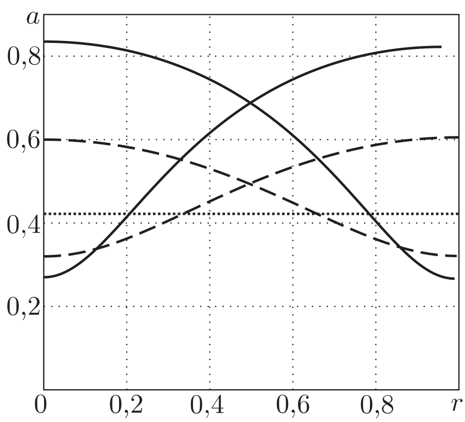

Рис. 3. Пары неоднородных стационарных решений при различных значениях параметра L. Сплошная линия соответствует $L = 9$; штриховая — $L = 4$; пунктирная — неустойчивое однородное тривиальное решение $a_2 = 0{,}422$ ($\lambda = -0{,}7$, $\chi = 10^{-5}$)

Соотношение (15) представляет собой нелинейное уравнение относительно неизвестной η, которое будем решать, используя метод Ньютона. Для вычисления производной $dF_1/d\eta$ воспользуемся уравнением в вариациях относительно переменной

$$p_a = \frac{\partial a}{\partial \eta},$$

которое получается посредством дифференцирования исходного уравнения (9) по η и перестановки дифференцирования по r и η:

$$p_a'' + L\frac{\partial F}{\partial a}p_a = 0. \tag{16}$$

Начальные условия для варьируемой переменной получаются в результате дифференцирования исходных начальных условий (8), (14) по η:

$$p_a(0) = 1, \quad p_a'(0) = 0. \tag{17}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (16) вместе с уравнением (8) и начальными условиями (8), (14), (17), в точке $r = 1$ получим

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta} = p_a'(1).$$

Как видно из рис. 3, пространственные профили полученных решений (при фиксированных значениях параметров) являются взаимно симметричными, т.е. при произвольном $r \in [0, 1]$ выполняется $a^1(r) = a^2(1 - r)$, где верхний индекс определяет ветвь решений. Проведенное в [9, 12] численное моделирование исходной задачи (3)–(5) и последующий анализ пространственно-временного распределения показали установление пространственно-неоднородного течения жидкости — диссипативной структуры вне зависимости от начального условия. Установившиеся решения качественно не отличаются от решений стационарной задачи: они представляют собой монотонно убывающую или возрастающую зависимость $a = a(\xi)$. Кроме того, они также являются симметричными друг относительно друга.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (гос. контракт № 02.740.11.0618).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bulgin D., Wratten R.* Measurements of steady flow characteristics of rubber at high rates of shear / In: *Proceedings of the Second international Congress of Rheology*; ed. V. Q. W. Harrison. London, 1954.
2. *Белкин И. М., Виноградов Г. В., Леонов А. И.* Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов. М.: Машиностроение, 1968. 272 с. [*Belkin I. M., Vinogradov G. V., Leonov A. I.* Rotary Instruments. Measurement of Viscosity and Physicomechanical Characteristics of Materials. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 272 pp.]
3. *Лифшиц А. Е., Рыбников Г. Л.* Диссипативные структуры и течение Куэтта неньютоновской жидкости // *ДАН СССР*, 1985. Т. 281, № 5. С. 1088–1093. [*Lifshits A. E., Rybnikov G. L.* Dissipative structures and Couette flow of a non-Newtonian fluid // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985. Vol. 281, no. 5. Pp. 1088–1093].
4. *Бучацкий Л. М., Манелис Г. Б., Столин А. М., Худяев С. И.* К теории процессов структурных превращений в текучих системах // *Инж.-физ. ж.*, 1981. Т. 41, № 6. С. 1032–1039; англ. пер.: *Buchatskii L. M., Manelis G. B., Stolin A. M., Khudyaev S. I.* Theory of structural transformations in flowing systems // *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 1981. Vol. 41, no. 6. Pp. 1321–1327.
5. *Столин А. М., Худяев С. И.* Образование пространственно-неоднородных состояний структурированной жидкости в области сверханомалии вязкости // *ДАН СССР*, 1981. Т. 260, № 5. С. 1180–1184. [*Stolin A. M., Khudyaev S. I.* Formation of spatially inhomogeneous states of a structured fluid accompanying a superanomaly in the viscosity // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1981. Vol. 260, no. 5. Pp. 1180–1184].
6. *Худяев С. И., Ушаковский О. В.* Пространственная неоднородность и автоколебания при течении структурированной жидкости // *Матем. моделирование*, 2002. Т. 14, № 7. С. 53–73. [*Khudyaev S. I., Ushakovskiy O. V.* Space nonuniformity and auto-oscillations in the structured liquid flow // *Matem. Mod.*, 2002. Vol. 14, no. 7. Pp. 53–73].
7. *Беляева Н. А.* Пространственно-неоднородные течения структурированной жидкости в плоском зазоре / В сб.: *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела*: Тр. научн. школы акад. В. В. Новожилова. Вып. 8. СПб.: СПбГУ, 2005. С. 151–156. [*Belyaeva N. A.* Spatially inhomogeneous flow of structured liquid in a flat gap / In: *Nonlinear Problems in Mechanics and Physics of Deformable Solid Body.* Issue 8. St. Petersburg: SPbGU, 2005. Pp. 151–156].
8. *Беляева Н. А., Худяев С. И., Горст Д. Л.* Неоднородное течение Куэтта структурированной жидкости // *Вестн. Сыктывк. ун-та. Сер. 1*, 2003. № 5. С. 43–48. [*Belyaeva N. A., Khudyaev S. I., Gorst. D. L.* The inhomogeneous Couette flow of structured liquid // *Vestn. Syktyvk. Un-ta. Ser. 1*, 2003. no. 5. Pp. 43–48].
9. *Belyaeva N. A.* Deformation of viscoelastic structured systems (Russian). Germany: Lambert Academic Publishing, 2011. 200 pp.
10. *Беляева Н. А., Кузнецов К. П.* Бифуркационный анализ куэттовского течения структурированной жидкости в области сверханомалии / В сб.: *Вторая Второй междуна-*

родная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы Межд. конф.; ред. И. В. Волович, Ю. Н. Радаев. Самара: Книга, 2010. С. 51–52. [*Belyaeva N. A., Kuznetsov K. P.* Bifurcation analysis of Couette flow of structured liquid accompanying a superanomaly / In: *The 2nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*: Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich and Yu. N. Radayev. Samara: Kniga, 2010. Pp. 51–52].

11. *Кузнецов К. П.* Бифуркация стационарных неоднородных структур в области сверханомалии куэттовского течения структурированной жидкости в плоском зазоре: `http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/1175/7525_0b4f.pdf`. [*Kuznetsov K. P.* Bifurcation of stationary inhomogeneous structures in a superanomaly domain of Couette flow of structured liquid in a flat gap].
12. *Кузнецов К. П., Беляева Н. А.* Диссипативная структура и область сверханомалии куэттовского течения структурированной жидкости в плоском зазоре // *Вестн. Сыктывк. ун-та. Сер. 1*, 2011. №13. С. 61–74. [*Kuznetsov K. P., Belyaeva N. A.* The dissipative structure and superanomaly domain of of Couette flow of structured liquid in a flat gap // *Vestn. Syktyvk. Un-ta. Ser. 1*, 2011. no. 13. Pp. 61–74].
13. *Holodniok M., Klíč A., Kubíček M., Marek M.* Methods of Analysis of Nonlinear Dynamical Models (Czech). Prague: Academia, 1986; русск. пер.: *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 386 с.
14. *Moler C., Kahaner D., Nash S.* Numerical Methods and Software. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988. 384 pp.; русск. пер.: *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 575 с.
15. *Iooss G., Joseph D. D.* Elementary Stability and Bifurcation Theory, second ed. New York: Springer-Verlag. 356 pp.; русск. пер.: *Йосс Ж., Дэкозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 301 с.

MSC: 76A05; 76T99,76M25

ANALYSIS OF A NONLINEAR DYNAMIC MODEL OF THE COUETTE FLOW FOR STRUCTURED LIQUID IN A FLAT GAP

N. A. Belyayeva, K. P. Kuznetsov

Syktyvrar State University,
55, Oktyabr'skiy prospekt, Syktyvkar, 167000, Russia.

E-mails: `belyayevana@mail.ru, kuznetsovkp@sptrace.ru`

Parametric investigation of structured liquid Couette flow in a plain gap is presented. Bifurcation conditions of steady non-uniform solutions are defined from unsteady uniform ones in the nonmonotonic region of rheological curve. Relevant bifurcation diagrams are plotted. The coincidence between the steady-state solution and the solution of unstable problem is noted.

Key words: *Couette flow, structed liquid, bifurcation, nonmonotonic region of rheological curve, parametric investigation.*

Original article submitted 16/XI/2011;
revision submitted 17/IV/2012.

Nadezhda A. Belyayeva (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Math Modeling & Cybernetics. *Konstantin P. Kuznetsov*, Postgraduate Student, Dept. of Math Modeling & Cybernetics.