УДК 517.965:514.74

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет,
649000, Россия, Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.

E-mail: kfizika@gasu.ru

В работе рассматриваются специальные функционально-дифференциальные уравнения, возникающие в геометрии, для метрической функции. Доказана теорема о виде метрической функции.

Ключевые слова: *функционально-дифференциальное уравнение, метрическая функция, феноменологически симметричная геометрия, геометрия Гельмгольца.*

Введение. Цель данной работы — расширение специальных функционально-дифференциальных уравнений на метрическую функцию трёхмерной феноменологически симметричной геометрии:

$$f(ij) = f(\theta(x_i, x_j, y_i, y_j), z_i, z_j), \tag{1}$$

где

$$\theta(ij) = [(x_i - x_j)^2 + \varepsilon(y_i - y_j)^2] \exp\left[2\varPhi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)\right], \quad \varepsilon = +1, -1, 0; \tag{2}$$

$\varPhi_1(u) = \gamma \operatorname{arctg} u$; $\varPhi_{-1}(u) = \beta \operatorname{Ar(c)th} u$; $\varPhi_0(u) = u$; γ, $\beta = \mathrm{const} \neq 0$, $\beta \neq \pm 1$; (x_i, y_i) — координаты точки $i \in M$; $\theta(ij)$ — метрическая функция двумерной феноменологически симметричной геометрии Гельмгольца [1]. Вид метрической функции (1) следует из теоремы, доказанной В. Х. Львом в работе [2]: *метрическая функция любой трехмерной феноменологически симметричной геометрии содержит как аргумент метрическую функцию двумерной феноменологически симметричной геометрии.*

Функционально-дифференциальные уравнения, о которых здесь говорится, в явном виде записываются при доказательстве теоремы. Затем они сводятся к дифференциальным уравнениям. Во всех формулировках настоящей статьи предполагается существование подходящей локальной системы координат.

Основные определения. Рассмотрим многообразие M, $\dim M = m$. Пусть на M задана гладкая функция $f\colon M \times M \to \mathbb{R}$, называемая *метрической*, с открытой и плотной в $M \times M$ областью определения S_f. Локальные координаты в M обозначим через $(x^1, \ldots, x^m)$. Пусть выполняются следующие аксиомы [3].

Аксиома невырожденности. *Для любого упорядоченного набора $m + 1$ точек $\langle i, i_1, \ldots, i_m\rangle$ из открытого и плотного подмножества в M^{m+1} :*

Владимир Александрович Кыров (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. физики и методики преподавания физики.

$\langle ii_1\rangle, \ldots, \langle ii_m\rangle$, $\langle i_1 i\rangle, \ldots, \langle i_m i\rangle \in S_f$ *выполняются неравенства*

$$\frac{\partial(f(ii_1), \ldots, f(ii_m))}{\partial(x_i^1, \ldots, x_i^m)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1 i), \ldots, f(i_m i))}{\partial(x_i^1, \ldots, x_i^m)} \neq 0,$$

где $(x_i^1, \ldots, x_i^m)$ *— координаты точки* $i \in M$.

Аксиома феноменологической симметрии. *Для некоторой окрестности всякой последовательности точек* $\langle i_1, \ldots, i_{m+2}\rangle$ *из открытого и плотного подмножества прямого произведения* M^{m+2}, *таких что* $\langle i_p i_q\rangle \in S_f$, p, $q = 1, \ldots, m+2$, $p \neq q$, *существует достаточно гладкая функция* $\varPhi$: $\mathbb{R}^{(m+1)(m+2)/2} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{grad} \varPhi \neq 0$, *для которой имеет место тождество*:

$$\varPhi(f(i_1 i_2), \ldots, f(i_{m+1} i_{m+2})) = 0.$$

Определение 1. Говорят, что на многообразии M метрическая функция f задает феноменологически симметричную геометрию, если выполняются аксиомы *невырожденности* и *феноменологической симметрии.*

Определение 2. Гладкое локально инъективное отображение λ: $M \to M$ называется *локальным движением*, если для любой пары $\langle ij\rangle \in S_f$ такой, что $\langle \lambda(i), \lambda(j)\rangle \in S_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij).$$

Множество всех так определенных движений образует группу Ли преобразований. Можно показать, что размерность группы движений m-мерной феноменологически симметричной геометрии равна $m(m+1)/2$. Доказывается, что двухточечным инвариантом такой группы является метрическая функция, которая восстанавливается по данному инварианту [3].

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида

$$X = X_1 \partial_{x^1} + \cdots + X_m \partial_{x^m},$$

причём $X_s = X_s(x^1, \ldots, x^m)$ — достаточно гладкие функции, $s = 1, 2, \ldots, m$, через которые записывается критерий локальной инвариантности метрической функции [4, с. 35]:

$$X(i)f(ij) + X(j)(ij) = 0. \tag{3}$$

Операторы, образующие базис алгебры Ли для $m = 3$, обозначим через X, Y, Z, U, V, W. Для геометрии Гельмгольца операторы алгебры Ли группы движений следующие [1, 5]:

$$U = \partial_x, \quad V = \partial_y, \quad W = (-\varepsilon y - \alpha_\varepsilon x)\partial_x + (x - \alpha_\varepsilon y)\partial_y.$$

Основная теорема работы и её доказательство.

Теорема. *Метрическая функция $f(ij)$ вида* (1) *трёхмерной феноменологически симметричной геометрии с точностью до локального диффеоморфизма $\psi(f) \to f$ и в подходящих локальных координатах имеет вид*

$$f(ij) = \left[(x_i - x_j)^2 + \varepsilon(y_i - y_j)^2\right] \exp\left[2\varPhi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right) + 2z_i + 2z_j\right], \qquad (4)$$

где $\varepsilon = +1,\ -1,\ 0$; $\varPhi_1(u) = \gamma \operatorname{arctg} u$; $\varPhi_{-1}(u) = \beta \operatorname{Ar(c)th} u$, $\varPhi_0(u) = u$; γ, $\beta = \mathrm{const} \neq 0$, $\beta \neq \pm 1$.

Доказательство. Метрическую функцию будем искать в виде

$$f(ij) = f\left(\left[(x_i - x_j)^2 + \varepsilon(y_i - y_j)^2\right] \exp\left[2\varPhi_\varepsilon\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\Big)\right], z_i, z_j\right) = \\ = f(\theta,\, z_i,\, z_j).$$

Она является двухточечным инвариантом шестимерной группы преобразований, поэтому критерий инвариантности (3) для базисных операторов X и Y алгебры Ли даёт функционально-дифференциальные уравнения

$$2[X]e^{2\varPhi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)}\frac{\partial f}{\partial \theta} + X_3(i)\frac{\partial f}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0, \qquad (5)$$

$$2[Y]e^{2\varPhi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)}\frac{\partial f}{\partial \theta} + Y_3(i)\frac{\partial f}{\partial z_i} + Y_3(j)\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0, \qquad (6)$$

где

$$[X] = \big((x_i - x_j) - \alpha_\varepsilon(y_i - y_j)\big)\big(X_1(i) - X_1(j)\big) + \big(\varepsilon(y_i - y_j) + \alpha_\varepsilon(x_i - x_j)\big)\big(X_2(i) - X_2(j)\big),$$

$$[Y] = \big((x_i - x_j) - \alpha_\varepsilon(y_i - y_j)\big)\big(Y_1(i) - Y_1(j)\big) + \big(\varepsilon(y_i - y_j) + \alpha_\varepsilon(x_i - x_j)\big)\big(Y_2(i) - Y_2(j)\big).$$

Отсюда

$$[X]\exp\left(2\varPhi_\varepsilon\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\Big)\right) = a(ij)\theta, \quad [Y]\exp\left(2\varPhi_\varepsilon\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\Big)\right) = b(ij)\theta, \qquad (7)$$

причём $a(ij)$ и $b(ij)$ не могут зависеть от θ.

Заметим, что в уравнении (5) $X_3 \neq 0$, иначе базисный оператор X, как доказано в работе [6], будет являться линейной комбинацией операторов из системы (2), что недопустимо. Аналогично, $Y_3 \neq 0$.

Пусть $[X] = [Y] = 0$. Тогда уравнения (5) и (6) принимают вид

$$X_3(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0,\ Y_3(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + Y_3(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0.$$

Разрешая первое уравнение относительно $\partial f(ij)/\partial z_i$ и результат подставляя во второе уравнение, получаем

$$(Y_3(i)X_3(j) - Y_3(j)X_3(i))\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0.$$

По аксиоме невырожденности $\partial f(ij)/\partial z_j \neq 0$, поэтому

$$Y_3(i)X_3(j) - Y_3(j)X_3(i) = 0.$$

Разделяя переменные, получаем $Y_3 = aX_3$, где $a = \mathrm{const}$. Тогда уравнения (5) и (6) линейно зависимы, что недопустимо.

Пусть теперь $[X] = 0$ и $[Y] \neq 0$. Тогда уравнение (5) принимает такой вид:

$$X_3(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_3(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0. \tag{8}$$

Здесь, как и в работе [6], доказывается, что $X_3 = a(z)$. Тогда, обозначая в (8) $\displaystyle\int \frac{dz}{a(z)} \to z$, имеем

$$f(ij) = f\left(\left[(x_i - x_j)^2 + \varepsilon(y_i - y_j)^2\right] \exp\left(2\varPhi_\varepsilon\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\Big)\right), z_i - z_j\right) = f(\theta, w),$$

где $w = z_i - z_j$. Подставляя найденную функцию в (6), получаем

$$[Y] \exp\left(2\varPhi_\varepsilon\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\Big)\right) \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + \big(Y_3(i) - Y_3(j)\big)\frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0. \tag{9}$$

В (9) $Y_3 \neq \mathrm{const}$, иначе $[Y] = 0$, что недопустимо. Тогда

$$\frac{[Y] \exp\left(2\varPhi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)\right)}{Y_3(i) - Y_3(j)} = \psi(\theta,\, w) \neq 0.$$

Из (7) следует, что $\psi(\theta,\, w) = p(w)\theta$. Возвращаясь с найденным в (9), получаем дифференциальное уравнение

$$p(w)\theta\frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, определяем метрическую функцию

$$f(ij) = \theta q(w) = [(x_i - x_j)^2 + \varepsilon(y_i - y_j)^2] \exp\left[2\varPhi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)\right] q(w).$$

Можно показать, что группа движений геометрии с найденной метрической функцией имеет размерность меньше 6, т. е. геометрия не является феноменологически симметричной.

Итак, $[X] \neq 0$ и $[Y] \neq 0$. Как и в работе [6], можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Если в уравнении* (5)

$$[X]_{w=0} = 0,$$

то метрическая функция имеет вид $f(ij) = f(\theta, w)$.

Метрические функции найденного вида рассмотрены выше и не задают феноменологически симметричную геометрию.

Итак, в уравнениях (5) и (6) $[X]_{w=0} \neq 0$ и $[Y]_{w=0} \neq 0$.

Уравнение (5) можно переписать в виде

$$2[X] \exp\left(2\Phi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)\right) + X_3(i)\psi_1(ij) + X_3(j)\psi_2(ij) = 0, \tag{10}$$

где $\psi_1(ij) = (\partial f(ij)/\partial z_i)/(\partial f(ij)/\partial\theta)$, $\psi_2(ij) = (\partial f(ij)/\partial z_j)/(\partial f(ij)/\partial\theta)$.

Предположим, что в (10) $X_3 = c(z)$. Тогда с учётом (9) это уравнение принимает вид

$$[X] \exp\left(2\Phi_\varepsilon\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)\right) = \big(a(z_i) + a(z_i)\big)\theta \neq 0. \tag{11}$$

Лемма 2. *Решением функционального уравнения* (11) *являются функции*

$$X_1 = p(\alpha_\varepsilon y - x) + q(\varepsilon\alpha_\varepsilon x - y) + c_1, \quad X_2 = p(\varepsilon\alpha_\varepsilon x - y) - \varepsilon q(\alpha_\varepsilon y - x) + c_2,$$

где p, q, c_1, c_2, $a = \mathrm{const}$.

Подставим найденное в (5) и, переобозначая $\displaystyle\int \frac{dz}{c(z)} \to z$, после интегрирования имеем

$$f(ij) = f(\theta e^{2z_i},\, \theta e^{2z_j}) = f(u, v).$$

Подставляя найденное в (6), получаем функциональное уравнение

$$[Y + \bar\theta Y_{3i}]e^{2z_i}\frac{\partial f}{\partial u} + [Y + \bar\theta Y_{3j}]e^{2z_j}\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{12}$$

где $\bar\theta = (x_i - x_j)^2 + \varepsilon(y_i - y_j)^2$. Так как (12) — дифференциальное уравнение, имеет место тождество

$$\frac{[Y] + \bar\theta Y_{3i}}{[Y] + \bar\theta Y_{3j}} = \varphi(u, v). \tag{13}$$

Лемма 3. *В тождестве* (13) $\varphi(u,\, v) = -1$.

Доказательство. Пусть в тождестве (13) $z_i = z_j = z$. Тогда оно принимает вид

$$2[Y] + \bar\theta(Y_{3i} + Y_{3j}) = 0.$$

Дифференцируя по x_i и x_j, по y_i и y_j, а также по x_i и y_j, будем иметь систему

$$\begin{aligned}
&-Y'_{1x_i} - Y'_{1x_j} - \alpha_\varepsilon Y'_{2x_i} - \alpha_\varepsilon Y'_{2x_j} - (Y_3(i) + Y_3(j)) + \\
&\qquad\qquad + (x_i - x_j)(Y'_{3x_j} - Y'_{3x_i}) = 0, \\
&\alpha_\varepsilon Y'_{1y_i} + \alpha_\varepsilon Y'_{1y_j} - \varepsilon Y'_{2y_i} - \varepsilon Y'_{2y_j} - \varepsilon(Y_3(i) + Y_3(j)) + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon(y_i - y_j)(Y'_{3y_j} - Y'_{3y_i}) = 0, \\
&\alpha_\varepsilon Y'_{1x_i} - Y'_{1y_j} - \varepsilon Y'_{2x_i} - \alpha_\varepsilon Y'_{2y_j} + (x_i - x_j)Y'_{3y_j} - \varepsilon(y_i - y_j)Y'_{3x_i} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Дифференцируя теперь первое уравнение системы (14) по x_i и x_j, а также по x_i и y_j, затем второе уравнение по y_i и y_j, будем иметь $Y''_{3xx} = Y''_{3xy} = Y''_{3yy} = 0$. Интегрируя, получаем

$$Y_3 = ax + by + c, \tag{15}$$

причём коэффициенты зависят от z. Подставим теперь найденное в (14):

$$\begin{aligned}
&-Y'_{1x_i} - Y'_{1x_j} - \alpha_\varepsilon Y'_{2x_i} - \alpha_\varepsilon Y'_{2x_j} - (ax_i + by_i + 2c + ax_j + by_j) = 0,\\
&\alpha_\varepsilon Y'_{1y_i} + \alpha_\varepsilon Y'_{1y_j} - \varepsilon Y'_{2y_i} - \varepsilon Y'_{2y_j} - \varepsilon(ax_i + by_i + 2c + ax_j + by_j) = 0,\\
&\alpha_\varepsilon Y'_{1x_i} - Y'_{1y_j} - \varepsilon Y'_{2x_i} - \alpha_\varepsilon Y'_{2y_j} + b(x_i - x_j) - \varepsilon a(y_i - y_j) = 0.
\end{aligned}$$

Дифференцируя первые два уравнения по координатам, а в последнем разделяя переменные, получаем систему уравнений, интегрируя которую до конца, будет иметь

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{2(\alpha_\varepsilon^2+\varepsilon)}\big(-(\alpha_\varepsilon b + \varepsilon a)(x^2 - \varepsilon y^2) - 2\varepsilon(b + \alpha_\varepsilon a)xy-\\
&\qquad -2(\varepsilon c - \alpha_\varepsilon d)x + 2(\varepsilon d - \alpha_\varepsilon c)y + \varepsilon k - \alpha_\varepsilon l\big),\\
Y_2 &= \frac{1}{2(\alpha_\varepsilon^2+\varepsilon)}\big(-(\alpha_\varepsilon a - b)(x^2 - \varepsilon y^2) - 2(\varepsilon a + \alpha_\varepsilon b)xy-\\
&\qquad -2(d + \alpha_\varepsilon c)x + 2(c + \alpha_\varepsilon d)y - l + \alpha_\varepsilon k\big),
\end{aligned}\tag{16}$$

причём коэффициенты зависят от z. Умножая результат на исходное выражение и учитывая формулы (15) и (16), получаем $a = b = c = d = k = l = \mathrm{const}$. Затем, подставляя (15) и (16) в (13), получаем $\varphi(u, v) = -1$. Лемма 3 доказана. □

Тогда, подставляя (15) и (16) в (12) и интегрируя, получаем метрическую функцию (4). Базисные операторы алгебры Ли группы геометрии с метрической функцией (4) фактически найдены при доказательстве этой леммы. Для их явной записи в формулах (16) и (15) коэффициентам необходимо придать значения 0 и 1.

Итак, в уравнении (10) имеем $\big[X_3(i) - X_3(j)\big]_{z_i=z_j=z} \neq 0$. Если его переписать для пары $\langle ji\rangle$, то, как и выше, получаем $\psi_1(ij) - \psi_2(ji) = 0$. Обозначим $\psi_1(ij) = \psi(ij)$, $\psi_2(ij) = \psi(ji)$. Тогда уравнение (10) переписывается так:

$$2[X]\exp\left(2\varPhi_\varepsilon\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\Big)\right) + X_3(i)\psi(ij) + X_3(j)\psi(ji) = 0. \tag{17}$$

Лемма 4. *В уравнении* (17)

$$\psi\big|_{w=0} = c(z)\theta \neq 0, \quad X_3 = p(z)x + q(z)y + d(z).$$

Доказательство. Введём в (17) подстановку $z = z_i = z_j$. Обозначим $X_{1,2,3}\big|_{w=0}(i) = X_{1,2,3}(x_i, y_i, z)$, $\psi\big|_{w=0}(ij) = \psi(\theta, z, z)$. Заметим, что $\bar\psi(ij) = \bar\psi(ji)$. Тогда из (7) следует, что $\psi\big|_{w=0} = c(z)\theta$. Подставляя найденное в уравнение (17) при $w = 0$ и учитывая результат предыдущей леммы, получаем $X_3 = p(z)x + q(z)y + d(z)$. Лемма 4 доказана. □

Как известно, базис алгебры Ли группы движений трёхмерной феноменологически симметричной геометрии состоит из шести операторов, три из которых — U, V, W — известны, а три — X, Y, Z — надо найти. Оператор X удовлетворяет уравнению (17), а Y и Z — уравнениям

$$2[Y]\exp\left(2\varPhi_\varepsilon\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\Big)\right) + Y_3(i)\psi(ij) + Y_3(j)\psi(ji) = 0, \tag{18}$$

$$2[Z]\exp\left(2\Phi_\varepsilon\Big(\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\Big)\right)+Z_3(i)\psi(ij)+Z_3(j)\psi(ji)=0, \tag{19}$$

причём $\big[Y_3(i)-Y_3(j)\big]_{z_i=z_j=z}\neq 0$, $\big[Z_3(i)-Z_3(j)\big]_{z_i=z_j=z}\neq 0$, иначе приходим к рассмотренному ранее случаю.

Итак, для (17) имеем

$$[X]_{w=0}\exp\left(2\Phi_\varepsilon\Big(\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\Big)\right)+(p_1(x_i+x_j)+q_1(y_i+y_j)+d_1)\bar\theta=0.$$

Аналогичный результат получаем для уравнений (18) и (19):

$$[Y]_{w=0}\exp\left(2\Phi_\varepsilon\Big(\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\Big)\right)+(p_2(x_i+x_j)+q_2(y_i+y_j)+d_2)\bar\theta=0,$$
$$[Z]_{w=0}\exp\left(2\Phi_\varepsilon\Big(\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\Big)\right)+(p_3(x_i+x_j)+q_3(y_i+y_j)+d_3)\bar\theta=0.$$

Комбинируя эти уравнения, приходим к ранее рассмотренному случаю (лемма 4), который приводит к метрической функции (4). Теорема доказана полностью. □

Выражаю благодарность профессору Геннадию Григорьевичу Михайличенко за поддержку темы исследования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кыров В. А.* Гельмгольцевы пространства размерности два // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 6. С. 1341–1359; англ. пер.: *Kyrov V. A.* Two-Dimensional Helmholtz Spaces // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 6. Pp. 1082–1096.
2. *Лев В. Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур / В сб.: *Вычислительные системы.* Вып. 125. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С. 90–103. [*Lev V. Kh.* Three-Dimensional Geometries in Physical Structures Theory / In: *Vychislitel'nye Sistemy.* Issue 125. Novosibirsk: IM SOAN SSSR, 1988. Pp. 90–103].
3. *Михайличенко Г. Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // *Докл. АН СССР*, 1983. Т. 269, № 2. С. 284–288; англ. пер.: *Mikhailichenko G. G.* On Group and Phenomenological Symmetries in Geometry // *Dokl. Soviet. Math*, 1983. Vol. 27, no. 2. Pp. 325–329.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с. [*Ovsjannikov L. V.* Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1978. 399 pp.]
5. *Кыров В. А.* Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий: приложение к книге Г. Г. Михайличенко *“Полиметрические геометрии”* . Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. С. 116–143. [*Kyrov V. A.* Six-dimensional Lie algebras of movements groups three-dimensional phenomenologically symmetric geometries. Appendix to the book G. G. Mikhailichenko *“Polymetric Geometries”*. Novosibirsk: Novosib. Gos. Un-t, 2001. Pp. 116–143].
6. *Кыров В. А.* Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2010. Т. 13, № 4. С. 38–51. [*Kyrov V. A.* Functional equations in pseudo-Euclidean geometry // *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2010. Vol. 13, no. 4. Pp. 38–51].

Поступила в редакцию 24/III/2011;
в окончательном варианте — 12/II/2012.

MSC: 34K05

ON SOME CLASS OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. A. Kyrov

Gorny Altai State University,
1, Lenkin st., Gorno-Altaisk, 649000, Russia.

E-mail: `kfizika@gasu.ru`

In this paper we consider special functional-differential equations arising in geometry for the metric functions. We prove a theorem on the form of the metric functions.

Key words: *functional-differential equation, metric function, phenomenologically symmetric geometry, Helmholtz's geometry.*

Original article submitted 24/III/2011;
revision submitted 12/II/2012.

Vladimir A. Kyrov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Physics and Teaching Methodology of Physics.