Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 2 (27). С. 93–102

УДК 519.246.2

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Е. Зотеев

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: `zoteev-ve@mail.ru`

Рассматривается проблема устойчивости вычисления параметров затухающих апериодических процессов второго порядка на основе результатов наблюдений. Описывается численный метод определения параметров апериодического процесса второго порядка, в основе которого лежит итерационная процедура вычисления коэффициентов разностного уравнения. Получены неравенства, позволяющие с учётом априорно известных границ изменения параметров исследуемого апериодического процесса обеспечить устойчивость разностного уравнения. Сформулирована и доказана теорема о достаточном условии устойчивости системы нормальных уравнений при решении задачи среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения. Полученные результаты имеют важное практическое значение и могут быть использованы при выборе периода дискретизации экспериментальной кривой, описывающей наблюдаемый апериодический процесс второго порядка на выходе системы.

Ключевые слова: *апериодические процессы второго порядка, разностные уравнения, итерационная процедура, среднеквадратичное приближение, устойчивость разностного уравнения второго порядка.*

Проблема достоверной оценки параметров исследуемой системы на основе экспериментальных данных является одной из основных проблем, возникающих при математическом моделировании объектов или процессов различной физической природы. Одним из эффективных методов решения этой проблемы является метод определения параметров нелинейных функциональных зависимостей на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты наблюдений [1, 2, 3 и др.]. Такой подход позволяет свести задачу определения параметров нелинейной модели к итерационной процедуре уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения. Рассмотрим данный подход на примере определения параметров апериодического процесса второго порядка по результатам эксперимента.

Затухающий апериодический процесс второго порядка описывается функцией

$$\tilde{y}(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

где $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ — динамические характеристики системы; $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — параметры, связанные с начальными условиями.

Соответствующая дискретная функция $\tilde{y}_k = \tilde{y}(t_k) = \tilde{y}(\tau k)$, описывающая мгновенные значения апериодического процесса в моменты времени $t_k = \tau k$,

Владимир Евгеньевич Зотеев (д.т.н., доц.), профессор, каф. прикладной математики и информатики.

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, где τ — период равномерной дискретизации, имеет вид

$$\tilde{y}_k = C_1 e^{-\alpha_1 \tau k} + C_2 e^{-\alpha_2 \tau k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

причём очевидно, что выполняется условие: $\tilde{y}_{k-1} > \tilde{y}_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

В соответствии с методикой, описанной в [2], на основе дискретной функции (1) построено разностное уравнение второго порядка, которое может быть представлено следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = \lambda_3; \qquad \tilde{y}_1 = \lambda_4; \\ \tilde{y}_k = \lambda_1 \tilde{y}_{k-1} - \lambda_2 \tilde{y}_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Коэффициенты в разностном уравнении (2) связаны с параметрами апериодического процесса соотношениями: $\lambda_1 = e^{-\alpha_1\tau} + e^{-\alpha_2\tau}$, $\lambda_2 = -e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}$, $\lambda_3 = C_1 + C_2$, $\lambda_4 = C_1 e^{-\alpha_1\tau} + C_2 e^{-\alpha_2\tau}$.

Для того чтобы выразить параметры α_1 и α_2 через коэффициенты разностного уравнения λ_1 и λ_2, следует решить характеристическое уравнение (квадратное алгебраическое уравнение) $\mu^2 - \lambda_1\mu - \lambda_2 = 0$, корни которого μ_1 и μ_2 $(0 < \mu_1 < 1,\ 0 < \mu_2 < 1)$ связаны с коэффициентами разностного уравнения и динамическими характеристиками апериодического процесса α_1, α_2 формулами

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2, \quad \lambda_2 = -\mu_1\mu_2 \quad \text{и} \quad \mu_1 = e^{-\alpha_1\tau}, \quad \mu_2 = e^{-\alpha_2\tau}.$$

Отсюда $\alpha_1 = -\tau^{-1}\ln\mu_1$ и $\alpha_2 = -\tau^{-1}\ln\mu_2$.

Разностное уравнение второго порядка (2) и формулы, связывающие его коэффициенты с параметрами дискретной функции (1), лежат в основе численного метода определения характеристик апериодического процесса второго порядка по результатам эксперимента.

Пусть имеется выборка результатов наблюдений y_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, где $N \geqslant 4$ — объём выборки. Предполагая, что данная выборка соответствует апериодическому процессу второго порядка, для описания результатов эксперимента будем использовать дискретную модель вида (1):

$$\hat{y}_k = \hat{C}_1 e^{-\hat{\alpha}_1 \tau k} + \hat{C}_2 e^{-\hat{\alpha}_2 \tau k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Величину отклонения экспериментальных данных y_k от предсказанных по модели (3) значений $\hat{y}_k$: $\varepsilon_k = y_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$, будем называть *случайным возмущением* в результатах наблюдений. При этом оценки параметров модели (3) будем искать из условия минимизации функционала

$$\|\varepsilon_k\|^2 = \|y_k - \hat{y}_k\|^2 \to \min. \tag{4}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма соответствующего линейного пространства.

Очевидно, что в этом случае система стохастических разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений y_k, в соответствии с (2) примет вид

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_3 + \varepsilon_0; \qquad y_1 = \lambda_4 + \varepsilon_1; \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} - \lambda_2 y_{k-2} - \lambda_2\varepsilon_{k-2} - \lambda_1\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{5}$$

Используя математический аппарат матричной алгебры и вводя обозначения векторов и матриц:

$$b = (y_0,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{N-1})^\top, \quad \lambda = (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4)^\top,$$
$$\varepsilon = (\varepsilon_0,\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \ldots,\, \varepsilon_{N-1})^\top, \quad \eta = (\eta_1,\, \eta_2,\, \eta_3,\, \eta_4,\, \ldots,\, \eta_N)^\top =$$
$$= (\varepsilon_0, \varepsilon_1, -\lambda_2\varepsilon_0 - \lambda_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2, -\lambda_2\varepsilon_1 - \lambda_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \ldots, -\lambda_2\varepsilon_{N-3} - \lambda_1\varepsilon_{N-2} + \varepsilon_{N-1})^\top,$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_1 & y_0 & 0 & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

систему уравнений (5) можно представить в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Алгоритм численного метода определения параметров апериодического процесса второго порядка на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения можно разбить на несколько основных шагов [2]. На первом шаге из условия минимизации невязки

$$\|b - F\hat{\lambda}\|^2 = \|\eta\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \eta_k^2 \to \min$$

вычисляются первоначальные оценки коэффициентов разностного уравнения

$$\hat{\lambda}_0 = (F^\top F)^{-1} F^\top b.$$

На втором шаге используется итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения:

$$\hat{\lambda}^{(i)} = (F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} F)^{-1} F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} F, \quad \Omega_\lambda = P_\lambda P_\lambda^\top, \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,$$

цель которой — обеспечение выполнения условия (4) минимизации суммы квадратов отклонения используемой модели (3) от результатов наблюдений:

$$\|\varepsilon\|^2 = \|P^{-1}_{\hat{\lambda}} b - P^{-1}_{\hat{\lambda}} F\hat{\lambda}\|^2 \to \min.$$

На третьем, заключительном этапе на основе вычисленных среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения находятся оценки параметров апериодического процесса для динамических характеристик $\hat{\alpha}_1 = -\tau^{-1}\ln\hat{\mu}_1$, $\hat{\alpha}_2 = -\tau^{-1}\ln\hat{\mu}_2$, где $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ — корни характеристического уравнения $\hat{\mu}^2 - \hat{\lambda}_1\hat{\mu} - \hat{\lambda}_2 = 0$, и постоянных

$$\hat{C}_1 = \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}\hat{\lambda}_3 - \frac{1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}\hat{\lambda}_4, \quad \hat{C}_2 = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}\hat{\lambda}_3 - \frac{1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}\hat{\lambda}_4.$$

Здесь же производится оценка погрешности полученных результатов вычислений [2].

Важнейшей проблемой при реализации алгоритмов численного метода является *проблема разрешимости* системы нормальных уравнений, лежащей в основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения. Действительно, невырожденность матриц $F^\top F$ и $F^\top \Omega_\lambda^{-1} F$ является необходимым условием практической реализации описанного выше метода. В данной работе рассматривается достаточное условие существования обратных матриц $(F^\top F)^{-1}$ и $(F^\top \Omega_\lambda^{-1} F)^{-1}$, выполнение которого обеспечивается соответствующим выбором периода дискретизации динамического процесса при формировании выборки результатов наблюдений.

Введём понятие устойчивости разностного уравнения второго порядка (2). Пусть разностное уравнение второго порядка (2) порождает систему линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{F}\lambda = \tilde{b},$$

где

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{y}_1 & \tilde{y}_0 & 0 & 0 \\ \tilde{y}_2 & \tilde{y}_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{y}_{N-2} & \tilde{y}_{N-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$
$$b = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_{N-1})^\top, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^\top.$$

Будем предполагать, что матрица $\tilde{F}$ размера $N \times 4$ — матрица полного ранга ($\operatorname{rang}\tilde{F} = 4$).

Пусть $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, где ε_k — некоторое случайное возмущение, величина которого удовлетворяет условию

$$\max_{k=0,1,\ldots,N-1} |\varepsilon_k| \leqslant \Delta. \tag{9}$$

Определение. Будем говорить, что разностное уравнение второго порядка устойчиво к данному возмущению Δ, если при любых ε_k, удовлетворяющих условию (9), матрица

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_1 & y_0 & 0 & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

размера $N \times 4$ является матрицей полного ранга ($\operatorname{rang} F = 4$).

Лемма 1. *Пусть матрица F размера $N \times 4$ имеет вид* (10)*. Тогда для того, чтобы матрица F была матрицей полного ранга* ($\operatorname{rang} F = 4$)*, достаточно, чтобы хотя бы одна из матриц*

$$W_k = \begin{pmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} \\ y_k & y_{k-1} \end{pmatrix}; \quad k = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-2,$$

была невырожденной ($\operatorname{rang} W_k = 2$).

Доказательство. Пусть при некотором значении k, где $k = 2, 3, \ldots, N-2$, матрица W_k невырожденная: $\det W_k \neq 0$. Рассмотрим минор четвёртого порядка M, составленный из элементов матрицы F, расположенных на пересечении всех четырёх её столбцов с первой, второй, $(k+1)$-й и $(k+2)$-й строками матрицы F:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_{k-1} & y_{k-2} & 0 & 0 \\ y_k & y_{k-1} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $M = \det W_k \neq 0$. Следовательно, ранг матрицы F равен четырём, и она является матрицей полного ранга, т. е. $\operatorname{rang} F = 4$. □

Лемма 2. *Пусть элементы матрицы*

$$\tilde{W}_k = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k-2} \\ \tilde{y}_k & \tilde{y}_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-2, \tag{11}$$

записываются так:

$$\tilde{y}_k = C_1 e^{-\alpha_1 \tau k} + C_2 e^{-\alpha_2 \tau k}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, N-1,$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 \geqslant 0$, $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $\tau > 0$. Тогда при любом k матрица $\tilde{W}_k$ невырожденная.

Доказательство. Очевидно, что для доказательства невырожденности квадратной матрицы (11) достаточно показать, что $\det \tilde{W}_k \neq 0$ при любом $k = 2,\, 3,\, \ldots,\, N-2$. Обозначим $\theta = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$. Имеем

$$\det \tilde{W}_k = \begin{vmatrix} \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k-2} \\ \tilde{y}_k & \tilde{y}_{k-1} \end{vmatrix} = -C_1 C_2 e^{-2\alpha_1 \tau (k-1)} e^{\theta \tau (k-2)} (e^{\theta\tau} - 1)^2. \tag{12}$$

По условию $\theta \neq 0$, $\tau \neq 0$ и $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, откуда следует, что $\det \tilde{W}_k < 0$, то есть определитель матрицы (11) не равен нулю ни при каких значениях k. □

Следствие 1. *Пусть матрица $\tilde{F}$ имеет вид* (8), *а её элементы $\tilde{y}_k$ удовлетворяют условиям леммы* 2. *Тогда квадратная матрица $\tilde{F}^\top \tilde{F}$ порядка* 4 — *невырожденная.*

Действительно, при выполнении условий леммы 2 каждая из матриц $\tilde{W}_k$, $k = 2, 3, \ldots, N-2$, невырожденная. Тогда по лемме 1 матрица $\tilde{F}$ будет матрицей полного ранга ($\operatorname{rang} \tilde{F} = 4$). Но в этом случае квадратная матрица $\tilde{F}^\top \tilde{F}$ также будет иметь ранг, равный четырём ($\operatorname{rang}(\tilde{F}^\top \tilde{F}) = 4$). Следовательно, она будет невырожденной ($\det(\tilde{F}^\top \tilde{F}) \neq 0$).

Лемма 3. *Пусть квадратная матрица P_λ порядка N имеет вид* (7), *а матрица F удовлетворяет условиям леммы* 1. *Тогда матрица $Q = P_\lambda^{-1} F$ размера $N \times 4$ также является матрицей полного ранга* ($\operatorname{rang}(P_\lambda^{-1} F) = 4$).

Доказательство. Очевидно, что определитель матрицы P_λ отличен от нуля ($\det P_\lambda = 1 \neq 0$). Следовательно, матрица P_λ невырожденная и существует обратная матрица P_λ^{-1}, определитель которой также отличен от нуля. Известно, что от умножения слева или справа на матрицу, определитель которой отличен от нуля, ранг не меняется [4]. Следовательно, ранг матрицы $P_\lambda^{-1} F$ равен рангу матрицы F и равен четырём ($\operatorname{rang} P_\lambda^{-1} F = \operatorname{rang} F = 4$). Другими словами, матрица $Q = P_\lambda^{-1} F$ — матрица полного ранга. □

Следствие 2. *Если матрица F — матрица полного ранга* ($\operatorname{rang} F = 4$), *а квадратная матрица P_λ удовлетворяет условиям леммы* 3, *то квадратная матрица $Q^\top Q = F^\top \Omega_\lambda^{-1} F$ порядка* 4, *где $\Omega_\lambda = P_\lambda P_\lambda^\top$, — невырожденная.*

Лемма 4. *Пусть матрица W_k удовлетворяет условиям леммы* 1, *а её элементы описываются так*:

$$y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| \leqslant \Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

причём $\tilde{y}_k$ удовлетворяют условиям леммы 2. *Тогда для того, чтобы матрица W_k была невырожденной, достаточно выполнения неравенства*

$$\|\Delta W_k\| < \frac{1}{\|\tilde{W}_k^{-1}\|}, \tag{13}$$

где матрица $\tilde{W}_k$ имеет вид (11) *а*

$$\Delta W_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_{k-1} & \varepsilon_{k-2} \\ \varepsilon_k & \varepsilon_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Представим матрицу W_k в виде

$$W_k = \tilde{W}_k + \Delta W_k.$$

По лемме 2 матрица $\tilde{W}_k$ — невырожденная, следовательно, существует обратная матрица $\tilde{W}_k^{-1}$. Тогда матрицу W_k можно представить в виде

$$W_k = \tilde{W}_k + \Delta W_k = \tilde{W}_k (E + \tilde{W}_k^{-1} \Delta W_k),$$

где E — единичная матрица. Очевидно, что для существования обратной матрицы W_k^{-1} достаточно, чтобы каждая из матриц $\tilde{W}_k$ и $E + \tilde{W}_k^{-1}\Delta W_k$ была невырожденной. Матрица $\tilde{W}_k$ невырожденная по лемме 2. Известно [4], что для невырожденности матрицы $E + \tilde{W}_k^{-1}\Delta W_k$ достаточно выполнения условия $\|\tilde{W}_k^{-1}\Delta W_k\| < 1$. Из (13) следует, что $\|\tilde{W}_k^{-1}\| \cdot \|\Delta W_k\| < 1$. Так как $\|\tilde{W}_k^{-1}\Delta W_k\| \leqslant \|\tilde{W}_k^{-1}\| \cdot \|\Delta W_k\|$, очевидно, что при выполнении неравенства (13) выполняется неравенство $\|\tilde{W}_k^{-1}\Delta W_k\| < 1$. Следовательно, матрица $E + \tilde{W}_k^{-1}\Delta W_k$ будет невырожденной. Тогда матрица W_k будет также невырожденной. □

Теорема (достаточное условие устойчивости). *Пусть функция* $\tilde{y}(t) : D(\tilde{y}) = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$ *описывается выражением*

$$\tilde{y}(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 \geqslant 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, *причём* $\alpha_1 - \alpha_2 = \theta > 0$, $C_1 = \gamma C_2$, $0 < \gamma < \infty$. *Тогда для устойчивости разностного уравнения второго порядка*

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = \lambda_3; \quad \tilde{y}_1 = \lambda_4; \\ \tilde{y}_k = \lambda_1 \tilde{y}_{k-1} - \lambda_2 \tilde{y}_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1, \end{cases}$$

к возмущению $|\varepsilon_k| \leqslant \Delta$ *достаточно выполнения условия*

$$\tau > \theta^{-1} \ln \left[1 + 2(1+\gamma)\sqrt{\delta e^{\alpha_1 T_N} \gamma^{-1}} \right]. \tag{14}$$

Здесь $\tilde{y}_k = \tilde{y}(\tau k)$, $\tau > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$; $\delta = \Delta / \tilde{y}_0$ — *предельная величина возмущения в относительных единицах*; $T_N = (N-1)\tau$ — *период формирования результатов наблюдений.*

Доказательство. В соответствии с определением устойчивости разностного уравнения второго порядка докажем, что матрица вида (6) с элементами $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$ является матрицей полного ранга $\forall \varepsilon_k : |\varepsilon_k| \leqslant \Delta$.

Очевидно, что с учётом лемм 1 и 4 доказательство теоремы сводится к доказательству выполнения условия (13). Покажем, что для выполнения условия (13) достаточно выполнения неравенства (14).

Заметим, что $\tilde{y}'(t) = -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t} < 0$ при всех $t \in [0, \infty)$, так как по условию теоремы $\alpha_1 > \alpha_2 \geqslant 0$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$. Следовательно, имеют место неравенства

$$\tilde{y}_{k-2} > \tilde{y}_{k-1} > \tilde{y}_k, \quad k = 3, 4, \ldots, N-1. \tag{15}$$

Очевидно, что

$$\|\Delta W_k\| = \sqrt{\varepsilon_{k-2}^2 + 2\varepsilon_{k-1}^2 + \varepsilon_k^2} \leqslant \sqrt{4\Delta^2} = 2\Delta.$$

Так как

$$\tilde{W}_k^{-1} = \frac{1}{\det \tilde{W}_k} \begin{pmatrix} \tilde{y}_{k-1} & -\tilde{y}_{k-2} \\ -\tilde{y}_k & \tilde{y}_{k-1} \end{pmatrix},$$

с учётом неравенств (15) имеем

$$\frac{1}{\|\tilde{W}_k^{-1}\|} = \frac{|\det \tilde{W}_k|}{\sqrt{\tilde{y}_{k-2}^2 + 2\tilde{y}_{k-1}^2 + \tilde{y}_k^2}} > \frac{|\det \tilde{W}_k|}{\sqrt{4\tilde{y}_{k-2}^2}} = \frac{|\det \tilde{W}_k|}{2\tilde{y}_{k-2}}.$$

Таким образом,

$$\|\Delta W_k\| \leqslant 2\Delta, \qquad \frac{|\det \tilde{W}_k|}{2\tilde{y}_{k-2}} < \frac{1}{\|\tilde{W}_k^{-1}\|}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что для выполнения условия (13) достаточно выполнения неравенства

$$\Delta \leqslant \left|\det \tilde{W}_k\right| (4\tilde{y}_{k-2})^{-1}. \tag{17}$$

Покажем, что для выполнения соотношения (17) достаточно выполнения условия (14). Действительно, пусть выполняется (14), тогда с учётом (12) правую часть неравенства (17) можно преобразовать к виду

$$\frac{|\det \tilde{W}_k|}{4\tilde{y}_{k-2}} = \frac{C_1 e^{\theta\tau(k-2)}(e^{\theta\tau}-1)^2}{4e^{\alpha_1\tau k}(\gamma + e^{\theta\tau(k-2)})}.$$

Из системы $C_1 + C_2 = \tilde{y}_0$, $C_1 = \gamma C_2$ получаем $C_1 = \gamma\tilde{y}_0(1+\gamma)^{-1}$. Тогда

$$\frac{|\det \tilde{W}_k|}{4\tilde{y}_{k-2}} = \frac{\gamma\tilde{y}_0 e^{\theta\tau(k-2)}(e^{\theta\tau}-1)^2}{4e^{\alpha_1\tau k}(1+\gamma)(\gamma + e^{\theta\tau(k-2)})} = \frac{\gamma\tilde{y}_0(e^{\theta\tau}-1)^2}{4e^{\alpha_1\tau k}(1+\gamma)(\gamma + e^{-\theta\tau(k-2)})},$$

где $k = 2, 3, 4, \ldots, N-1$.

Так как при условиях теоремы $e^{-\theta\tau(k-2)} \leqslant 1$ и $e^{\alpha_1\tau k} \leqslant e^{\lambda_1\tau(N-1)} = e^{\lambda_1 T_N}$, причём одновременно оба равенства выполняться не могут, получаем неравенство

$$\frac{|\det \tilde{W}_k|}{4\tilde{y}_{k-2}} > \frac{\gamma\tilde{y}_0(e^{\theta\tau}-1)^2}{4(1+\gamma)^2 e^{\alpha_1 T_N}},$$

правая часть которого при $e^{\theta\tau} \geqslant 1$ (или $\tau \geqslant 0$) является монотонно возрастающей функцией от переменной τ. Поэтому при значениях

$$\tau > \theta^{-1}\ln\left[1 + 2(1+\gamma)\sqrt{\delta e^{\alpha_1 T_N}\gamma^{-1}}\right] \geqslant 0$$

имеем

$$\frac{|\det \tilde{W}_k|}{4\tilde{y}_{k-2}} > \frac{\gamma\tilde{y}_0(e^{\theta\tau}-1)^2}{4(1+\gamma)^2 e^{\alpha_1 T_N}} > \frac{\gamma\tilde{y}_0\left[1 + 2(1+\gamma)\sqrt{\delta e^{\alpha_1 T_N}\gamma^{-1}} - 1\right]^2}{4(1+\gamma)^2 e^{\alpha_1 T_N}} =$$

$$= \frac{\gamma\tilde{y}_0 4(1+\gamma)^2 \Delta e^{\alpha_1 T_N}(\tilde{y}_0\gamma)^{-1}}{4(1+\gamma)^2 e^{\alpha_1 T_N}} = \Delta.$$

Отсюда с учётом неравенств (16) делаем вывод, что неравенство (13) выполняется. □

Анализ неравенства (14) позволяет сделать вывод о характере влияния основных параметров апериодического процесса на устойчивость разностного уравнения к случайному возмущению в результатах наблюдений. Из неравенства (14) следует, что нижняя граница промежутка допустимых значений периода дискретизации τ зависит, во-первых, от степени близости (величины $\lambda_1 - \lambda_2 = \theta > 0$) динамических характеристик и, во-вторых, от соотношения между постоянными C_1 и C_2 ($\gamma = C_1/C_2$). Очевидно, что в обоих случаях в пределе, когда $\lambda_2 \to \lambda_1$ ($\theta \to 0$) или когда $C_1 \to 0$ или $C_2 \to 0$ ($\gamma \to 0$ или $\gamma \to \infty$), апериодический процесс второго порядка вырождается в апериодический процесс первого порядка, и, следовательно, разностное уравнение вида (2) в этих случаях использовать нельзя.

Полученное неравенство (14) имеет также важное практическое значение и может быть использовано при выборе периода дискретизации экспериментальной кривой, описывающей наблюдаемый апериодический процесс второго порядка на выходе системы.

Пусть имеется некоторая априорная информация о предельных значениях параметров процесса, например, $\alpha_1 \leqslant \alpha_M$, $\theta \geqslant \theta_m$, $0 < \gamma_m \leqslant \gamma \leqslant \gamma_M < \infty$, $\Delta \leqslant \Delta_M < y_0$. Так как $y_0 = \tilde{y}_0 + \varepsilon_0 \leqslant \tilde{y}_0 + \Delta_M$, имеем $\delta = \Delta/\tilde{y}_0 \leqslant \delta_M/(1-\delta_M)$, где $\delta_M = \Delta_M/y_0 < 1$. Тогда период дискретизации при формировании выборки результатов наблюдений следует выбирать с учётом неравенства:

$$\tau > \frac{1}{\theta_m} \ln\left[1 + 2(1+\gamma_M)\sqrt{\frac{\delta_M e^{\alpha_M T_N}}{(1-\delta_M)\gamma_m}}\right] > \\ > \theta^{-1} \ln\left[1 + 2(1+\gamma)\sqrt{\delta e^{\alpha_1 T_N}\gamma^{-1}}\right] \geqslant 0. \quad (18)$$

Таким образом, сформулирована и доказана теорема о достаточном условии разрешимости системы нормальных уравнений, а также получены соотношения (14) и (18), позволяющие с учётом априорно известных границ изменения параметров исследуемого апериодического процесса обеспечить устойчивость разностного уравнения, лежащего в основе вычисления среднеквадратичных оценок как динамических характеристик системы, так и параметров, связанных с начальными условиями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зотеев В. Е., Заусаева М. А.* Метод последовательных приближений при среднеквадратичном оценивании параметров переходного процесса / В сб.: *Труды Третьей Всероссийской научной конференции* (29–31 мая 2006 г.). Часть 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2006. С. 72–78. [*Zoteev V. E., Zausaeva M. A.* The method of successive approximations for the mean square estimation of transition process parameters / In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference* (29–31 May 2006). Part 2 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2006. Pp. 72–78].
2. *Зотеев В. Е.* Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / ред. В. П. Радченко. М.: Машиностроение-1, 2009. 344 с. [*Zoteev V. E.* Parametric identification of dissipative mechanical systems based on difference equations / ed. V. P. Radchenko. Moscow: Mashinostroenie-1, 2009. 344 pp.]
3. *Егорова А. А., Зотеев В. Е.* О сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели колебаний

систем с турбулентным трением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 171–177. [*Egorova A. A., Zoteev V. E.* On Convergence of Iteration Procedure for Root-Mean-Square Estimation of Coefficients of Linear Parametric Discrete Models Describing Oscilattions of Systems with Turbulent Friction // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. Vol. 1(20). Pp. 171–177].

4. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с. [*Voevodin V. V., Kuznetsov Yu. A.* Matrices and Calculations. Moscow: Nauka, 1984. 320 pp.]

Поступила в редакцию 10/II/2012;
в окончательном варианте — 10/V/2012.

MSC: 65C20; 65P40, 34C15, 37M05

A SUFFICIENT CONDITION FOR STABILITY OF THE CALCULATION OF PARAMETERS OF APERIODIC PROCESSES BASED ON SECOND ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

V. E. Zoteev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `zoteev-ve@mail.ru`

The stability problem for the calculation of parameters of the second order damping aperiodic processes is considered. The numerical method of the second order aperiodic process parameters determination, based on iterative procedure of difference equation coefficients calculation, is described. The inequalities allowing to provide the stability of the difference equation according to the considering aperiodic process parameters limits of variation, known a priori, are obtained. The theorem on the sufficient condition of stability of the normal equations system under the solving of problem of difference equation coefficients mean-square estimation is formulated and proved. The obtained results have the great practical importance and can be used for the selection of discretization period of experimental curve, describing the second order observed aperiodic process in the system output.

Key words: *aperiodic second order processes, difference equations, iterative procedure, mean-square approximation, stability of the second order difference equation.*

Original article submitted 10/II/2012;
revision submitted 10/V/2012.

Vladimir E. Zoteev (Dr. Sci. (Techn.)), Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.