УДК 517.956.223

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ

А. А. Абашкин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mail: samcocaa@rambler.ru

Исследована краевая задача в бесконечной полуполосе для обобщённого двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. С помощью метода разделения переменных и с использованием разложения функции в ряд Фурье—Бесселя получены условия разрешимости данной краевой задачи. Сформулированы ограничения на параметры, при которых доказаны единственность её и отсутствие однозначной разрешимости.

Ключевые слова: *уравнение Гельмгольца, краевая задача, ряд Фурье—Бесселя, функции Бесселя, принцип максимума.*

Рассмотрим уравнение

$$H_{\mu,p}^{\lambda} u = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\mu}{x} u_x + \frac{2p}{y} u_y + \lambda u = 0, \quad \mu < \frac{1}{2} \tag{1}$$

в полуполосе $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y < \infty\} = [0, a] \times [0, \infty)$.

Задача. *Найти функцию* $u(x, y) \in C\big([0, a] \times [0, \infty)\big) \cap C^2\big((0, a) \times (0, \infty)\big)$ *такую, что выполняются условия*

$$H_{\mu,p}^{\lambda} u = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad p < \frac{1}{2}, \tag{3}$$

и найти функцию $u(x, y) \in C\big([0, a] \times (0, \infty)\big) \cap C^2\big((0, a) \times (0, \infty)\big)$ *такую, что выполняются условия* (2) *и*

$$\lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{y\to 0} y^{2p-1} u(x, 0) = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad p > \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{y\to 0} \frac{u(x, y)}{\ln y} = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad p = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Отметим, что краевые задачи в полуполосе для уравнения (1) при $\mu = 0$ были предметом многочисленных исследований (см., например, [1, 2]).

Теорема. *Если функция* $x^{\mu_1}\varphi(x)$, *где* $\mu_1 = \mu - 1/2$, *кусочно-непрерывна, имеет ограниченную вариацию на промежутке* $(0, a)$ *и выполняется условие*

$$\int_0^a |x^{\mu}\varphi(x)| dx < \infty,$$

Антон Александрович Абашкин, аспирант, каф. высшей математики.

то решение задачи (2)–(5) существует. При $\lambda \leqslant 0$ и $p \neq 1/2$ это решение единственно.

Доказательство. Будем искать решение задачи (2), (3) методом разделения переменных:

$$V'' + \frac{2\mu}{x}V' + \gamma^2 V = 0, \tag{6}$$

$$W'' + \frac{2p}{y}W' - (\gamma^2 - \lambda)W = 0, \tag{7}$$

где $u(x, y) = V(x)W(y)$, γ^2 — константа разделения.

Уравнение (6) заменой $V(x) = x^{-\mu_1}F(\gamma x)$ сводится к уравнению Бесселя [3, с. 132], общее решение которого можно записать в виде [3, с. 135]

$$F(z) = C_1 J_{-\mu_1}(z) + C_2 Y_{\mu_1}(z),$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя [3, с. 132]:

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)}, \quad -\nu \notin \mathbb{N}, \tag{8}$$

а $Y_\nu(z)$ — функция Вебера [3, с. 134]:

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)}(J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)), \quad \nu \notin \mathbb{Z}, \tag{9}$$

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(z), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Это следует из того, что функции $J_{-\nu}(z)$ и $Y_\nu(z)$ являются решениями уравнения Бесселя [3, с. 134–135], и при $\nu \notin \mathbb{Z}$ линейно независимы, поскольку (по определению) функция Y_ν является линейной комбинацией с ненулевыми коэффициентами функции $J_{-\nu}(z)$ и линейно независимой ей функции $J_\nu(z)$, а при $\nu \in \mathbb{Z}$ функции $J_{-\nu}(z)$ и $Y_\nu(z)$ линейно независимы, потому что $J_{-\nu}(z)$ линейно зависит от $J_\nu(z)$, а $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — линейно независимы.

Тогда общим решением уравнения (6) является функция

$$V(x) = C_1 x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}(\gamma x) + C_2 x^{-\mu_1} Y_{\mu_1}(\gamma x).$$

В силу условия (2) и определений функции Бесселя (8) и функции Вебера (9), (10) необходимо положить $C_2 = 0$.

Чтобы функция $u(x, y)$ удовлетворяла условию (2), необходимо, чтобы $J_{-\mu_1}(\gamma a) = 0$. Если обозначить через r_n все положительные корни уравнения $J_{-\mu_1}(x) = 0$, занумерованные в порядке возрастания, то $\gamma a = r_n$ для некоторого номера n, откуда получаем, что $\gamma = r_n/a$. Тогда $V(x)$ принимает следующий вид:

$$V_n(x) = A_n x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right).$$

Общим решением уравнения (7) при $\lambda \leqslant 0$ будет функция

$$Y_n(y) = C_3 y^{-p_1} K_{p_1}(\xi_n y) + C_4 y^{-p_1} I_{p_1}(\xi_n y),$$

где $\xi_n = \sqrt{(r_n/a)^2 - \lambda}$, $K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя [3, с. 139]. Для того чтобы выполнялось условие (3), в силу асимптотики

$$K_\nu(z) \simeq e^{-z}/\sqrt{z}, \quad I_\nu(z) \simeq e^{z}/\sqrt{z} \quad \text{при } z \to \infty,$$

необходимо положить $C_4 = 0$. В результате можно составить ряд

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^{-\mu_1} y^{-p_1} J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big) K_{p_1}(\xi_n y). \tag{11}$$

Определим коэффициенты B_n так, чтобы все члены ряда (11) являлись решениями задачи (2), (3) или (2), (5). Подставив ряд (11) в условие (3), с учётом асимптотики [4, с. 246]

$$K_\nu(z) \simeq \frac{\Gamma(|\nu|)}{2^{1-|\nu|} z^{|\nu|}} \ (\nu \neq 0), \quad K_0(z) \simeq \ln\frac{2}{z} \quad \text{при } z \to 0,$$

получим

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(-p_1)}{2^{p_1+1}\xi_n^{-p_1}} J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big), \quad p < \frac{1}{2};$$

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big), \quad p = \frac{1}{2}.$$

При выполнении условий теоремы можно разложить $x^{\mu_1}\varphi(x)$ в ряд Фурье—Бесселя [3, с. 165]:

$$x^{\mu_1}\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big), \tag{12}$$

где c_n определяются по формуле [3, с. 164]:

$$c_n = \frac{2}{a^2 J^2_{-\mu_1+1}(r_n)} \int_0^a \varphi(x) x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big) dx. \tag{13}$$

Тогда имеют место следующие равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(-p_1)}{2^{p_1+1}\xi_n^{p_1+1}} J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big), \quad p < \frac{1}{2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big), \quad p = \frac{1}{2}.$$

Выразив из этих равенств B_n, получим

$$B_n = c_n \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1) 2^{p_1-1}}, \quad p < \frac{1}{2}; \tag{14}$$

$$B_n = -c_n, \quad p = \frac{1}{2}, \tag{15}$$

где коэффициенты c_n определяются равенством (13).

Для того чтобы формальное решение в виде ряда (11), коэффициенты которого определяются по формуле (14), было решением задачи (2), (3), необходимо доказать равномерную сходимость ряда (11).

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big), \tag{16}$$

где $c_n(y) = B_n y^{-p_1} K_{p_1}(\xi_n y)$, а y рассматривается как параметр, является разложением функции $x^{\mu_1} u(x, y)$ по ортогональной системе $\{J_{-\mu_1}(r_n a^{-1} x)\}$. При $y \to 0$ и выполнении условий теоремы он сходится равномерно. Рассмотрим поведение коэффициентов $c_n(y)$ при изменении y. Для этого найдём производную по y от коэффициентов:

$$(B_n y^{p_1} K_{p_1}(\xi_n y))' = B_n \xi_n y^{p_1} K_{p_1-1}(\xi_n y).$$

Выражение, стоящее справа, не имеет положительных корней, так как их не имеет функция $K_\nu(z)$ [3, с.163]. Принимая во внимание, что $K_\nu(z)$ убывает экспоненциально при $z \to \infty$, можно сделать вывод, что коэффициенты (как функции от y) убывают на всей положительной полуоси, стремясь к нулю. Поэтому из равномерной сходимости ряда (11) при $y \to 0$ следует равномерная сходимость ряда (16) при всех остальных значениях y, а из этого факта следует сходимость ряда (11). Таким образом, существование решения доказано.

Рассмотрим теперь ряд (11) при $p = 1/2$. В этом случае верно соотношение

$$x^{\mu_1} u(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n K_0(\xi_n y) J_{-\mu 1}\Big(\frac{r_n}{a}x\Big). \tag{17}$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{-\mu 1}(r_n a^{-1} x)$ сходится равномерно, а выражения $K_0(\xi_n y)$ при фиксированном y можно ограничить числом $K_0(\xi_1 y)$, по теореме Абеля ряд (17) сходится равномерно при этом значении y. В силу убывания функции $|K_0(z)|$ ряд (11) сходится при $y \geqslant \varepsilon$ для произвольного положительного ε, откуда следует равномерная сходимость ряда (11) в области D при $p = 1/2$.

Для доказательства единственности решения задачи (2), (3) воспользуемся принципом максимума. Допустим что решение решение задачи (2), (3) при $\varphi(x) = 0$ принимает наибольшее значение во внутренней точке (x_0, y_0) области D. Тогда $u_x(x_0, y_0) = 0$ и $u_y(x_0, y_0) = 0$. Также $\Delta u(x, y) > 0$. Поскольку на границе области решение равно нулю, $u(x_0, y_0) > 0$, откуда следует, что $H^\lambda_{\mu,p} u(x_0, y_0) = \Delta u(x_0, y_0) + \lambda u(x_0, y_0) < 0$, что приводит к противоречию. По аналогичным рассуждениям решение не может принимать наименьшее значение во внутренней точке области. Итак, функция $u(x, y)$ наибольшее и наименьшее значения принимает на границе. Поскольку на границе решение тождественно равно нулю, в области D решение также равно нулю, что доказывает единственность решения задачи (2), (3).

В силу соотношения

$$H^\lambda_{\mu,p}(y^{1-2p} u) = y^{1-2p} H^\lambda_{\mu,1-p}(u) \tag{18}$$

решения задач (2), (3) и (2), (4) находятся во взаимно однозначном соответствии, из чего следует однозначная разрешимость задачи (2), (4), решение которой даётся формулой (11), при этом

$$B_n = c_n \frac{\xi_n^{p_1}}{\Gamma(p_1) 2^{p_1-1}}, \tag{19}$$

где c_n находятся по формуле (13).

Рассмотрим случай $\lambda > 0$. Уравнение (6) не претерпевает изменений.

При $r_m/a < \lambda < r_{m+1}/a$ формула для решения уравнения (7) остаётся без изменения для Y_n, $n > m$. При $n \leqslant m$ общее решение уравнения (7) принимает вид

$$W_n(y) = C_5 y^{-p_1} J_{p_1}(\sigma_n y) + C_6 y^{-p_1} Y_{p_1}(\sigma_n y),$$

где $\sigma_n = \sqrt{\lambda - (r_n/a)^2}$. Отметим, что в этом случае $W_n(y)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{y\to\infty} W_n(y) = 0$.

Запишем решение задачи (2), (4) в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{m} x^{-\mu_1} y^{-p_1} (B_n J_{p_1}(\sigma_n y) + D_n Y_{p_1}(\sigma_n y)) J_{\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a} x\Big) + \\ + \sum_{n=m+1}^{\infty} B_n x^{-\mu_1} y^{-p_1} J_{\mu_1}\Big(\frac{x_n}{a} x\Big) K_{p_1}(\xi_n y). \tag{20}$$

При $n \leqslant m$ из определений функций Бесселя и Вебера (8)–(10) и асимптотики [3, с. 138]

$$Y_k(z) \simeq -\frac{(k-1)!}{\pi} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad Y_0(z) \simeq \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} \quad \text{при } z \to 0$$

следует, что

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1} Y_n(y) = -D_n \frac{2^{p_1} \xi_n^{-p_1}}{\Gamma(1-p_1)\sin(p_1\pi)}, \quad p > \frac{1}{2}, \quad p_1 \notin \mathbb{N};$$

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1} Y_n(y) = -D_n \frac{(p_1-1)! 2^{p_1}}{\pi \xi_n^{p_1}}, \quad p > \frac{1}{2}, \quad p_1 \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{Y_n(y)}{\ln y} = D_n \frac{2}{\pi}, \quad p = \frac{1}{2}.$$

Тогда для функции $u(x,y)$ из краевого условия (4) и формулы (20) получаем соотношения

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1} u(x,y) = -\sum_{n=0}^{m} D_n \frac{2^{p_1} \xi_n^{p_1}}{\Gamma(1-p_1)\sin(p_1\pi)} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a} x\Big) + \\ + \sum_{n=m+1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1} \xi_n^{p_1}} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\Big(\frac{r_n}{a} x\Big) = \varphi(x), \quad p > \frac{1}{2}, \quad p_1 \notin \mathbb{N};$$

$$\lim_{y\to 0} y^{2p-1}u(x,y) = -\sum_{n=0}^{m} D_n \frac{(p_1-1)!2^{p_1}}{\pi\xi_n^{p_1}} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)+$$
$$+\sum_{n=m+1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1}\xi_n^{p_1}} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) = \varphi(x), \quad p>\frac{1}{2}, \quad p_1\in\mathbb{N};$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{u(x,y)}{\ln y} = \sum_{n=0}^{m} D_n \frac{2}{\pi} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)+$$
$$+\sum_{n=m+1}^{\infty} B_n x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) = \varphi(x), \quad p=\frac{1}{2}.$$

При выполнении условий теоремы выполняется соотношение (12), в результате чего имеют место следующие равенства:

$$-\sum_{n=0}^{m} D_n \frac{2^{p_1}\xi_n^{p_1}}{\Gamma(1-p_1)\sin(p_1\pi)} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)+$$
$$+\sum_{n=m+1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1}\xi_n^{p_1}} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) =$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) \quad p>\frac{1}{2}, \quad p_1\notin\mathbb{N};$$

$$-\sum_{n=0}^{m} D_n \frac{(p_1-1)!2^{p_1}}{\pi\xi_n^{p_1}} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)+\sum_{n=m+1}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1}\xi_n^{p_1}} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) =$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \quad p>\frac{1}{2}, \quad p_1\in\mathbb{N};$$

$$\sum_{n=0}^{m} D_n \frac{2}{\pi} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right)+\sum_{n=m+1}^{\infty} B_n J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right), \quad p=\frac{1}{2}.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих слагаемых. При $n>m$ коэффициенты B_n находятся по формулам (19) и (15), а при $n\leqslant m$, выразив D_n, получим

$$D_n = -c_n\frac{\Gamma(1-p_1)\sin(p_1\pi)}{2^{p_1}\xi_n^{p_1}}, \quad p>\frac{1}{2}, \quad p_1\notin\mathbb{N}; \tag{21}$$

$$D_n = -c_n\frac{\pi\xi_n^{p_1}}{2^{p_1}(p_1-1)!}, \quad p>\frac{1}{2}, \quad p_1\in\mathbb{N}; \tag{22}$$

$$D_n = c_n\frac{\pi}{2}, \quad p=\frac{1}{2}. \tag{23}$$

Для доказательства сходимости ряда (20) достаточно доказать сходимость «хвоста». Доказательство этого факта полностью повторяет доказательство для случая $\lambda < 0$.

Таким образом, решением задачи (2), (4), (5) является ряд (20), в котором коэффициенты D_n определяются формулой (21) при $p_1 \notin \mathbb{N}$; формулой (22) при $p_1 \in \mathbb{N}$ и формулой (23) при $p = 1/2$, а коэффициенты B_n при $n > m$ находятся по формуле (19) при $p < 1/2$ и по формуле (15) при $p = 1/2$, а при $n \leqslant m$ остаются произвольными.

Применение соотношения (18) приводит к формулам, выражающим решение задачи (2), (3). В этом случае решение определяется рядом (20), где коэффициенты B_n при $n > m$ определяются формулой (14), при $n \leqslant m$ коэффициенты B_n произвольны, а D_n определяются соотношением

$$D_n = -c_n \frac{\Gamma(1+p_1)\sin(-p_1\pi)}{2^{-p_1}\xi_n^{-p_1}}. \quad \square$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Моисеев Е. И.* О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // *Дифференц. уравнения*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1565–1567; англ. пер.: *Moiseev E. I.* Solvability of a nonlocal boundary value problem // *Differ. Equ.*, 2001. Vol. 37, no. 11. Pp. 1643–1646.
2. *Лернер М. Е., Репин О. А.* Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщённого осесимметричного уравнения Гельмгольца // *Дифференц. уравнения*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1562–1564; англ. пер.: *Lerner M. E., Repin O. A.* Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz equation // *Differ. Equ.*, 2001. Vol. 37, no. 11. Pp. 1640–1642.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. СПб.: Лань, 2010. 368 с. [*Lebedev N. N.* Special Functions and Their Applications. St. Petersburg: Lan', 2010. 368 pp.]
4. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с. [*Olver F.* Asymptotics and special functions. Moscow: Nauka, 1990. 528 pp.]

Поступила в редакцию 08/XII/2011;
в окончательном варианте — 27/II/2012.

MSC: 35J05; 35J25, 35B30

ON ONE PROBLEM IN AN INFINITY HALF-STRIP FOR BIAXISIMMETRIC HELMHOLTZ EQUATION

A. A. Abashkin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mail: samcocaa@rambler.ru

Boundary value problem in an infinity half-strip for biaxisymmetric Helmholtz equation is explored. Existence conditions of this problem are gotten with help of Fourier–Bessel series expansion. Uniqueness of solution of this boundary value problem is proved for some parameters values. Lack of uniqueness of solution is proved for some other parameters values.

Key words: *Helmholtz equation, boundary value problem, Fourier–Bessel series, Bessel functions, maximum principle.*

Original article submitted 08/XII/2011;
revision submitted 27/II/2012.

Anton A. Abashkin, Postgraduate Student, Dept. of High Mathematics.