

УДК 519.1:539.3

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ГРАФОВАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ

А. А. Тырымов

Волгоградский государственный технический университет,  
400005, Россия, Волгоград, пр. В. И. Ленина, 28.

E-mail: tyrymov2010@yandex.ru

*Предлагается численный метод анализа упругой среды на основе дискретной модели в виде ориентированного графа. В процессе анализа на основе графового подхода тело рассекается на элементы и для каждого из них строится элементарная ячейка (подграф), являющаяся его моделью. С использованием матриц, представляющих структурные элементы графа, а также уравнений, описывающих разрезанное тело, получены уравнения связного тела. Приведён числовой пример, показывающий работоспособность предложенного подхода.*

**Ключевые слова:** математическое моделирование, теория упругости, ориентированный граф, деформация, напряжения.

**Введение.** Графовая модель однородной упругой среды в осесимметричной постановке рассматривалась в работах Е. Г. Кузовкова и А. А. Тырымова [1, 2], где деформации в пределах элемента предполагались постоянными, и в [3], где использовалась линейная аппроксимация деформаций, однако при определении коэффициентов было сделано несколько упрощающих допущений. Автор настоящей работы показывает возможности графового подхода при определении напряжённо-деформированного состояния в упругих телах с непрерывной неоднородностью, причём при выводе матрицы жёсткости графового элемента он не делает никаких упрощающих предположений.

**1. Основные уравнения осесимметричной теории упругости.** В цилиндрической системе координат  $r, z, \varphi$  закон Гука для изотропного тела запишем, используя тензор плотности напряжений  $\{\sigma'\}$ , компоненты которого имеют вид  $\sigma'^{ij} = r\sigma^{ij}$ . В результате получим

$$\begin{aligned}\sigma'^{rr} &= (\lambda + 2\mu)r\varepsilon_{rr} + \lambda r\varepsilon_{zz} + \frac{\lambda}{r}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma'^{zz} &= \lambda r\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)r\varepsilon_{zz} + \frac{\lambda}{r}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma'^{\varphi\varphi} &= \frac{\lambda}{r}\varepsilon_{rr} + \frac{\lambda}{r}\varepsilon_{zz} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^3}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \\ \sigma'^{rz} &= \mu r\gamma_{rz},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz} + \varepsilon_{zr}$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные Ламе, которые в общем случае изотропного неоднородного тела являются функциями координат  $r$  и  $z$ . В дальнейшем будем рассматривать наиболее важный частный случай, когда коэффициент Пуассона постоянен ( $\nu = \text{const}$ ), а модуль упругости изменяется по закону степенной функции  $E(r) = E_0 r^\alpha$ , где  $E_0$  — постоянный коэффици-

ент,  $\alpha$  — вещественное число,  $r$  — расстояние от оси симметрии тела. Тогда

$$\mu(r) = 0,5E_0r^\alpha(1 + \nu)^{-1}, \quad \lambda(r) = k_0\mu(r), \quad k_0 = 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}. \quad (2)$$

Уравнения равновесия с использованием тензорных плотностей имеют вид [4]

$$\frac{\partial\sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma^{rz}}{\partial z} - r\sigma^{\varphi\varphi} = 0, \quad \frac{\partial\sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma^{zr}}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

**2. Конструирование элементарной ячейки.** Основой для построения моделей в виде графа служит объективный характер операций измерения выбранных независимых переменных. Как известно, целью любого измерения является установление зависимости между значениями переменной и показаниями прибора. В то же время измерение связано как с точками системы, между которыми оно осуществляется, так и с ориентацией измерителя. Эти свойства операции измерения можно представить направленным отрезком, то есть дугой графа.

С точки зрения операции измерения все переменные независимо от их физической природы могут быть подразделены на два типа — параллельные и последовательные [5]. Параллельные переменные характерны тем, что измеритель подключается к двум точкам системы параллельно потоку энергии. Для измерения последовательных переменных прибор должен быть установлен в разрыв энергетического потока. К параллельным переменным относятся линейные и угловые разности перемещений, относительные скорости и ускорения, деформации, разности давлений, температур, электрических потенциалов и так далее. К последовательным переменным относятся силы, моменты сил, электрический ток, тепловой поток, поток жидкости или газа и другие. Выбор связанной пары переменных определяется тем, что произведение последовательной и параллельной переменных должно давать скаляр с размерностью мощности или работы. При построении графа исследуемого тела за исходные удобно взять те переменные, которые измеряются установкой прибора непосредственно на исследуемый объект, то есть параллельные переменные. Способ конструирования графа тела связан с процессом измерения полного и независимого комплекта переменных, которые однозначно характеризуют деформированное состояние элементов, полученных в результате декомпозиции. Элементарной ячейкой (графовым элементом) будем называть подграф, соответствующий одному элементу, полученному при разбиении исходной области на отдельные части. При построении конфигурации элементарной ячейки в осесимметричной постановке сечение тела плоскостью, проходящей через его ось, покрываем сеткой координатных линий  $r = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ , между узлами которых устанавливаем гипотетические измерители. Полученную сеть измерителей преобразовываем в граф, представляя каждый из приборов дугой, а узлы, между которыми осуществлялось измерение, — вершинами графа. При этом вместо собственно измерителя будем ставить символ, отражающий природу измеряемой величины. Если вершины элемента обозначить  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , то измерители необходимо установить так, чтобы измерять относительные перемещения точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  друг относительно друга (деформации  $\delta_{rr}$ ,  $\delta_{rz}$ ,  $\delta_{zz}$ ,  $\delta_{zr}$ ) и относительно глобальной системы координат (перемещения  $u_r^A$ ,  $u_r^B$ ,  $u_r^C$ ,  $u_r^D$ ). Поскольку одни

и те же точки участвуют в разных группах измерений относительно осей  $r$  и  $z$ , они представлены разными вершинами. В соответствии с описанной последовательностью получаем элементарную ячейку прямоугольного элемента в осесимметричной постановке (рис. 1). Дуги элементарной ячейки вводят два вектора: вектор деформаций  $\{\delta\}_c$  и вектор внутренних сил  $\{f\}_c$ :

$$\begin{aligned} \{\delta\}_c^\top &= \{\delta_{rr}^d, \delta_{zz}^l, u_r^C, u_r^D, \delta_{rr}^u, \delta_{zz}^r, u_r^A, u_r^B, \delta_{zr}^d, \delta_{rz}^l, \delta_{zr}^u, \delta_{rz}^r\}, \\ \{f\}_c^\top &= \{f_d^{rr}, f_l^{zz}, f_C^r, f_D^r, f_u^{rr}, f_r^{zz}, f_A^r, f_B^r, f_d^{zr}, f_l^{rz}, f_u^{zr}, f_r^{rz}\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta_{rr}^d, \delta_{zz}^l, \delta_{rr}^u, \delta_{zz}^r$  — нормальные деформации;  $\delta_{zr}^d, \delta_{rz}^l, \delta_{zr}^u, \delta_{rz}^r$  — относительные перемещения, обусловленные поворотом сторон элемента;  $u_r^A, u_r^B, u_r^C, u_r^D$  — перемещения точек, соответствующих вершинам в глобальной системе координат;  $f_d^{rr}, f_l^{zz}, f_u^{rr}, f_r^{zz}$  — нормальные внутренние силы (обобщённые напряжения);  $f_d^{zr}, f_l^{rz}, f_u^{zr}, f_r^{rz}$  — тангенциальные внутренние силы;  $f_A^r, f_B^r, f_C^r, f_D^r$  — внутренние силы в глобальной системе координат. Индексы  $u, d, l, r$  обозначают соответственно верхние, нижние, левые и правые дуги элементарной ячейки, а символ  $\top$  — операцию транспонирования.

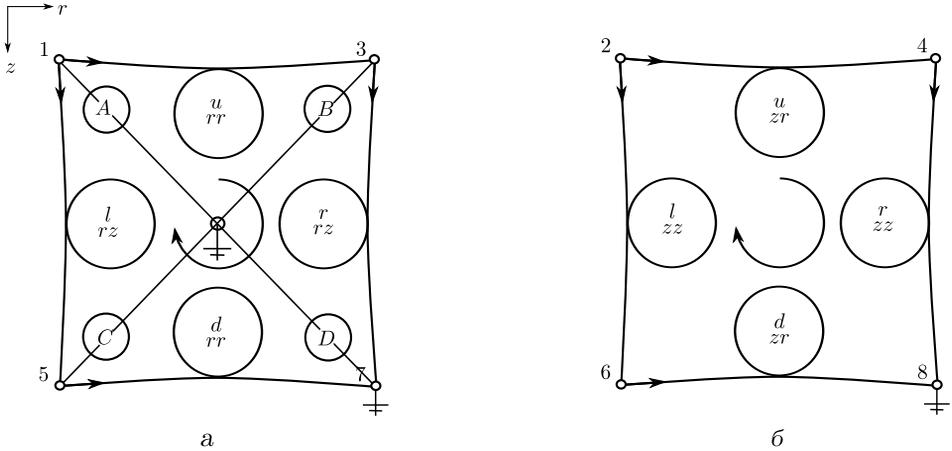


Рис. 1. Элементарная ячейка в осесимметричной постановке: а) компонента  $U_r$ , б) компонента  $U_z$ ; стрелками показано направление обхода контура; в кружках — верхний и нижний индексы переменных, представленных дугами ячейки

**3. Построение матрицы жёсткости элементарной ячейки.** Описание элементарной ячейки, т. е. связь векторов  $\{f\}_c$  и  $\{\delta\}_c$ , а также зависимость их от напряжений  $\{\sigma\}$  и деформаций  $\{\varepsilon\}$  моделируемого тела устанавливаем, принимая в качестве инварианта перехода к модели энергию деформации элемента среды:

$$\{f\}_c^\top \{\delta\}_c = \int_V \{\sigma'\}^\top \{\varepsilon\} dV, \quad (5)$$

где  $\{\delta\}_c$  и  $\{f\}_c$  определяются формулами (4). В результате энергию элементарной ячейки можно представить, с одной стороны, в виде

$$\begin{aligned} \{f\}_c^\top \{\delta\}_c &= f_d^{rr} \delta_{rr}^d + f_l^{zz} \delta_{zz}^l + f_C^r u_r^C + f_D^r u_r^D + f_u^{rr} \delta_{rr}^u + f_r^{zz} \delta_{zz}^r + \\ &+ f_A^r u_r^A + f_B^r u_r^B + f_d^{zr} \delta_{zr}^d + f_l^{rz} \delta_{rz}^l + f_u^{zr} \delta_{zr}^u + f_r^{rz} \delta_{rz}^r, \end{aligned} \quad (6)$$

с другой стороны, энергия деформации элемента сплошной среды есть

$$\int_V \{\sigma'\}^T \{\varepsilon\} dV = \int_V (\sigma'^{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma'^{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma'^{\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma'^{rz} \gamma_{rz}) dV. \quad (7)$$

При определении энергии деформации (7) требуется интегрирование выражения  $\sigma'^{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma'^{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma'^{\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma'^{rz} \gamma_{rz}$ , содержащего неизвестные деформации и напряжения. В связи с этим аппроксимируем неизвестные деформации в пределах элемента полиномами, линейными относительно переменных  $r$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = a_0 + a_1 r + a_2 z, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = b_0 + b_1 r + b_2 z, \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} &= c_0 + c_1 r + c_2 z, & \frac{\partial u_z}{\partial r} &= d_0 + d_1 r + d_2 z, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = c_0 + d_0 + (c_1 + d_1)r + (c_2 + d_2)z, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= r u_r. \end{aligned} \quad (8)$$

Выбирая систему координат так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью симметрии тела, а ось  $r$  проходила через центр элемента, в пределах элемента имеем  $R_i \leq r \leq R_e$ ,  $-\Delta z \leq z \leq \Delta z$ . Неизвестные коэффициенты полиномов в (8) выразим через деформации сторон элемента. С помощью интегрирования вдоль соответствующей грани элемента имеем

$$\begin{aligned} \delta_{rr} &= \int_{R_i}^{R_e} \frac{\partial u_r}{\partial r} dr = (a_0 + a_1 R_c + a_2 z) \Delta r, & \delta_{rz} &= \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \frac{\partial u_r}{\partial z} dz = (c_0 + c_1 r) \Delta z, \\ \delta_{zz} &= \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \frac{\partial u_z}{\partial z} dz = (b_0 + b_1 r) \Delta z, & \delta_{zr} &= \int_{R_i}^{R_e} \frac{\partial u_z}{\partial r} dr = (d_0 + d_1 R_c + d_2 z) \Delta r, \end{aligned}$$

где  $\Delta r = R_e - R_i$ ,  $R_c = (R_i + R_e)/2$ .

В результате получим

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 R_c &= \frac{\delta_{rr}^u + \delta_{rr}^d}{2\Delta r}, & b_0 + b_1 R_c &= \frac{\delta_{zz}^l + \delta_{zz}^r}{2\Delta z}, \\ a_2 &= \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z}, & d_2 &= \frac{\delta_{zr}^d - \delta_{zr}^u}{\Delta r \Delta z}, & c_1 &= \frac{\delta_{rz}^r - \delta_{rz}^l}{\Delta r \Delta z}, & b_1 &= \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z}, \\ c_0 + c_1 R_c &= \frac{\delta_{rz}^l + \delta_{rz}^r}{2\Delta z}, & d_0 + d_1 R_c &= \frac{\delta_{zr}^u + \delta_{zr}^d}{2\Delta r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что

$$a_2 = c_1, \quad b_1 = d_2. \quad (10)$$

Это следует из контурных законов [6], применённых к  $U_r$  и  $U_z$  компонентам элементарной ячейки  $\delta_{rz}^l + \delta_{rr}^d - \delta_{rz}^r - \delta_{rr}^u = 0$ ,  $\delta_{zz}^l + \delta_{zr}^d - \delta_{zz}^r - \delta_{zr}^u = 0$  и соответствующих выражений из (9). Такой же результат следует из равенств смешанных производных  $\partial(\partial u_r / \partial r) / \partial z = \partial(\partial u_r / \partial z) / \partial r$  и  $\partial(\partial u_z / \partial z) / \partial r = \partial(\partial u_z / \partial r) / \partial z$ .

В (9) найдена только часть неизвестных коэффициентов из (8). Чтобы найти оставшиеся, воспользуемся (1), (8) и, обеспечивая повышенную точность метода, удовлетворим в пределах элемента уравнениям равновесия (3). В результате получим

$$\begin{aligned} & ((k_0 + 2)\mu(r) - k_0 r \mu'(r))u_r = \\ & = r^2 \mu'(r) ((k_0 + 2)(a_0 + a_1 r + a_2 z) + k_0(b_0 + b_1 r + b_2 z)) + \\ & + (k_0 + 2)r\mu(r)(a_0 + 2a_1 r + a_2 z) + r^2 \mu(r)(k_0 b_1 + c_2 + d_2), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & r\mu(r)(k_0 a_0 + k_0 b_2 + 2b_2) + k_0 \mu(r)(c_0 + c_1 r + c_2 z) + \\ & + r\mu'(r)(c_0 + d_0 + (c_1 + d_1)r + (c_2 + d_2)z) + \\ & + \mu(r)(c_0 + d_0 + 2(c_1 + d_1)r + (c_2 + d_2)z) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из уравнения (11) для функции  $\mu(r)$ , представленной в (2), имеем

$$\begin{aligned} u_r = & \left( \alpha r ((k_0 + 2)(a_0 + a_1 r + a_2 z) + k_0(b_0 + b_1 r + b_2 z)) + \right. \\ & \left. + (k_0 + 2)(a_0 + 2a_1 r + a_2 z)r + (k_0 b_1 + c_2 + d_2)r^2 \right) (k_0 + 2 - k_0 \alpha)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме этого, из (8) получим

$$u_r = (a_0 + 0,5a_1 r + a_2 z)r + f(z), \quad (14)$$

где  $f(z)$  — произвольная функция. Приравнявая (13) и (14), получим

$$\begin{aligned} f(z) = & r \left( 2\alpha(k_0 + 1)a_0 + 0,5(3\alpha k_0 + 3k_0 + 4\alpha + 6)a_1 r + 2\alpha(k_0 + 1)a_2 z + \right. \\ & \left. + \alpha k_0(b_0 + b_1 r + b_2 z) + (k_0 b_1 + c_2 + d_2)r \right) (k_0 + 2 - k_0 \alpha)^{-1}, \end{aligned}$$

а это возможно только при выполнении условий

$$\begin{aligned} 2(k_0 + 1)a_0 + k_0 b_0 &= 0, \\ 2(k_0 + 1)a_2 + k_0 b_2 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$(3k_0 + 3k_0 \alpha + 4\alpha + 6)a_1 + 2k_0(\alpha + 1)b_1 + 2(c_2 + d_2) = 0, \quad (16)$$

Таким образом,  $f(z) = 0$ , а

$$u_r = a_0 r + 0,5a_1 r^2 + a_2 r z. \quad (17)$$

Из уравнения (12) следует

$$(k_0 c_2 + c_2 + d_2)\mu(r) + (c_2 + d_2)r\mu'(r) = 0,$$

$$\begin{aligned} & (k_0 a_0 + k_0 b_2 + 2b_2)r\mu(r) + k_0(c_0 + c_1 r)\mu(r) + \\ & + (c_0 + d_0 + (c_1 + d_1)r)r\mu'(r) + (c_0 + d_0 + 2(c_1 + d_1)r)\mu(r) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, используя вид функции  $\mu(r)$  из (2), получаем

$$k_0 c_2 + (\alpha + 1)(c_2 + d_2) = 0, \quad (18)$$

$$k_0 a_2 + (k_0 + 2)b_2 + k_0 c_1 + (\alpha + 2)(c_1 + d_1) = 0, \quad (19)$$

$$k_0 c_0 + (\alpha + 1)(c_0 + d_0) = 0.$$

В результате из (15) и (18) имеем

$$b_2 = k_2 a_2, \quad c_2 = k_4 d_2, \quad k_2 = -2(k_0 + 1)k_0^{-1}, \quad k_4 = -(\alpha + 1)(k_0 + \alpha + 1)^{-1}. \quad (20)$$

Из (16) с учётом (10) и (20) получим

$$\begin{aligned} a_1 &= k_1 b_1, \\ k_1 &= -2k_0((\alpha + 1)^2 + (\alpha + 1)k_0 + 1) \times \\ &\quad \times ((k_0 + \alpha + 1)(3k_0 + 3k_0\alpha + 4\alpha + 6))^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициент  $d_1$  найдём из (19) с учётом (20) и равенства (10):

$$d_1 = k_3 c_1, \quad k_3 = (4k_0 + 4 - k_0\alpha) [k_0(\alpha + 2)]^{-1}. \quad (22)$$

Используя (17), найдём перемещения вершин элемента  $ABCD$ :

$$\begin{aligned} u_r^A &= a_0 R_i + 0,5a_1 R_i^2 - 0,5a_2 R_i \Delta z, & u_r^B &= a_0 R_e + 0,5a_1 R_e^2 - 0,5a_2 R_e \Delta z, \\ u_r^C &= a_0 R_i + 0,5a_1 R_i^2 + 0,5a_2 R_i \Delta z, & u_r^D &= a_0 R_e + 0,5a_1 R_e^2 + 0,5a_2 R_e \Delta z. \end{aligned}$$

С учётом этих зависимостей перемещение  $u_r$  представим в виде

$$u_r = r \left( \frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4R_c} + \frac{1}{2}a_1 \left( r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4R_c} \right) + a_2 z \right).$$

Вводя в (8) для сокращения записи обозначения  $a = a_0 + a_1 R_c$ ,  $b = b_0 + b_1 R_c$ ,  $c = c_0 + c_1 R_c$ ,  $d = d_0 + d_1 R_c$ , имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= a + a_1(r - R_c) + a_2 z, & \varepsilon_{zz} &= b + b_1(r - R_c) + b_2 z, \\ \gamma_{rz} &= c + d + (c_1 + d_1)(r - R_c) + (c_2 + d_2)z, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= r u_r = r^2 \left( \frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4R_c} + \frac{1}{2}a_1 \left( r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4R_c} \right) + a_2 z \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где коэффициенты представлены в (9), (20), (21) и (22). В результате деформациям (23) можно придать вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\delta_{rr}^u + \delta_{rr}^d}{2\Delta r} + k_1 \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) + \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z} z, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\delta_{zz}^l + \delta_{zz}^r}{2\Delta z} + \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) + k_2 \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z} z, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\delta_{rz}^l + \delta_{rz}^r}{2\Delta z} + \frac{\delta_{zr}^d + \delta_{zr}^u}{2\Delta r} + (1 + k_3) \frac{\delta_{rz}^r - \delta_{rz}^l}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) + \\ &\quad + (1 + k_4) \frac{\delta_{zr}^d - \delta_{zr}^u}{\Delta r \Delta z} z, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= r^2 \left( \frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4R_c} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}k_1 \frac{\delta_{zz}^r - \delta_{zz}^l}{\Delta r \Delta z} \left( r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4R_c} \right) + \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta z} z \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (24) в правую часть равенства (7) и пользуясь формулами (5), (6) и приравнявая выражения при соответствующих компонентах вектора  $\{\delta\}_c$ , получим

$$\begin{aligned}
 f_d^{rr} &= \int_V \left( \left( \frac{1}{2\Delta r} + \frac{z}{\Delta r \Delta z} \right) \sigma^{rrr} + k_2 \frac{z}{\Delta r \Delta z} \sigma^{'zz} + \frac{r^2 z}{\Delta r \Delta z} \sigma^{'\varphi\varphi} \right) dV, \\
 f_u^{rr} &= \int_V \left( \left( \frac{1}{2\Delta r} - \frac{z}{\Delta r \Delta z} \right) \sigma^{rrr} - k_2 \frac{z}{\Delta r \Delta z} \sigma^{'zz} - \frac{r^2 z}{\Delta r \Delta z} \sigma^{'\varphi\varphi} \right) dV, \\
 f_l^{zz} &= \int_V \left( -\frac{k_1(r - R_c)}{\Delta r \Delta z} \sigma^{rrr} + \left( \frac{1}{2\Delta z} - \frac{r - R_c}{\Delta r \Delta z} \right) \sigma^{'zz} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} k_1 \frac{r^2(r - R_c - 0,25\Delta r^2 R_c^{-1})}{\Delta r \Delta z} \sigma^{'\varphi\varphi} \right) dV, \\
 f_r^{zz} &= \int_V \left( \frac{k_1(r - R_c)}{\Delta r \Delta z} \sigma^{rrr} + \left( \frac{1}{2\Delta z} + \frac{r - R_c}{\Delta r \Delta z} \right) \sigma^{'zz} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} k_1 \frac{r^2(r - R_c - 0,25\Delta r^2 R_c^{-1})}{\Delta r \Delta z} \sigma^{'\varphi\varphi} \right) dV, \quad (25) \\
 f_A^r &= f_B^r = f_C^r = f_D^r = \int_V \frac{r^2}{4R_c} \sigma^{'\varphi\varphi} dV, \\
 f_d^{zr} &= \int_V \left( \frac{1}{2\Delta r} + \frac{k_4 + 1}{\Delta r \Delta z} z \right) \sigma^{'rz} dV, \\
 f_l^{rz} &= \int_V \left( \frac{1}{2\Delta z} - \frac{k_3 + 1}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) \right) \sigma^{'rz} dV, \\
 f_u^{zr} &= \int_V \left( \frac{1}{2\Delta r} - \frac{k_4 + 1}{\Delta r \Delta z} z \right) \sigma^{'rz} dV, \\
 f_r^{rz} &= \int_V \left( \frac{1}{2\Delta z} + \frac{k_3 + 1}{\Delta r \Delta z} (r - R_c) \right) \sigma^{'rz} dV.
 \end{aligned}$$

Выполняя сначала подстановку (24) в формулы (1), а затем подстановку полученных выражений в (25), после интегрирования получим

$$\{f\}_c = [K]_c \{\delta\}_c. \quad (26)$$

Элементы симметрической матрицы  $[K]_c$  получены аналитически в явном виде, но здесь не приводятся из-за их громоздкости.

**4. Уравнения графовой модели тела.** Граф всего тела строится по тому же принципу, что и графовый элемент, и является результатом операции объединения элементарных ячеек. На рис. 2 представлен граф тела, состоящего из четырёх элементов. Тело, расчлененное на отдельные элементы, и соответствующая ему совокупность элементарных ячеек описываются уравнением

$$\{f\} = [K]\{\delta\}. \quad (27)$$

Здесь  $\{f\}^\top = \{f_{1c}^\top, f_{2c}^\top, \dots, f_{nc}^\top\}$  и  $\{\delta\}^\top = \{\delta_{1c}^\top, \delta_{2c}^\top, \dots, \delta_{nc}^\top\}$  — векторы внутренних сил и деформаций, причём  $\{f\}_{ic}^\top$ ,  $\{\delta\}_{ic}^\top$  определяются через (4),  $[K] = \text{diag}\{[K]_{1c}, [K]_{2c}, \dots, [K]_{nc}\}$  — глобальная несвязная матрица жёсткостей тела, расчленённого на отдельные элементы, где  $[K]_{ic}$  определены в (26),

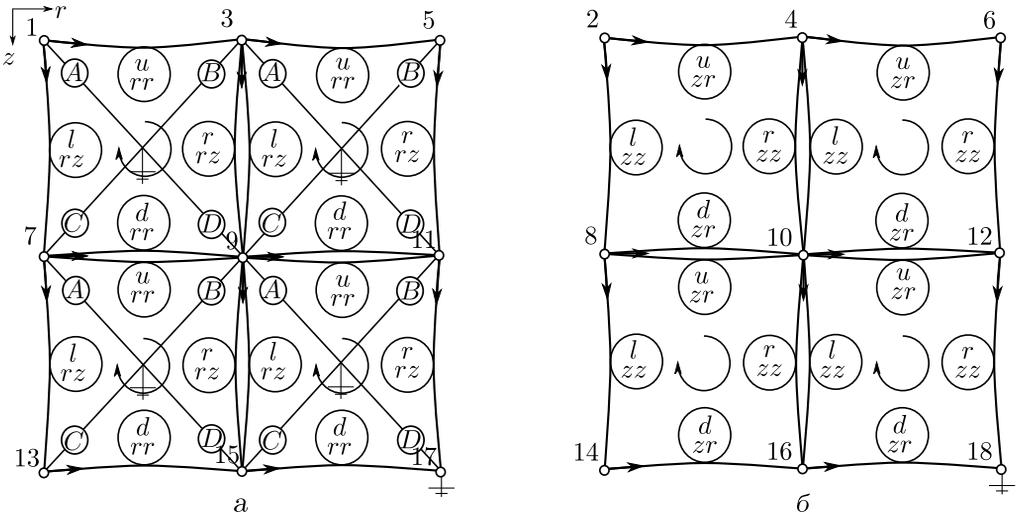


Рис. 2. Граф тела из четырёх элементов

а  $n$  — число ячеек, образующих граф. Теория графов обеспечивает возможность искусственного конструирования квадратных матриц преобразования, с помощью которых можно исходя из уравнений, описывающих разрезанное на элементы тело, получить уравнение связанного тела.

Структурные элементы графа — разрезы, контуры, пути и хорды — могут быть заданы матрицами [6]. Примеры этих матриц для элементарной ячейки приведены в [3]. После преобразования с помощью квадратных матриц дополнений  $[A_B]_S$  и маршрутов  $[P_C]_S$ , аналогично [3, 7], имеем общесистемный вектор сил  $F$  и общесистемный вектор перемещений  $\Delta$ :

$$\{F\}_S = [A_B]_S \{f\}, \quad \{\Delta\}_S = [P_C]_S \{\delta\}, \quad (28)$$

где индексом  $S$  обозначены переменные глобальной системы координат графа. Поскольку матрицы дополнений и маршрутов не сингулярны, а также в силу равенств  $[P_C]^\top = [A_B]^{-1}$  и  $[A_B]^\top = [P_C]^{-1}$  получим

$$\{f\} = [A_B]_S^{-1} \{F\}_S = [P_C]_S^\top \{F\}_S, \quad \{\delta\} = [P_C]_S^{-1} \{\Delta\}_S = [A_B]_S^\top \{\Delta\}_S. \quad (29)$$

Тогда, используя (28), (27), (29), получим уравнения, описывающие связанное тело:

$$\{F\}_S = [K]_S \{\Delta\}_S, \quad (30)$$

где  $[K]_S = [A_B]_S [K] [A_B]_S^\top$ .

Заметим, что при выводе уравнения (30), связывающего общесистемный вектор перемещений и вектор внешних сил, использовалась информация только о структуре графа и физическом законе среды. Кроме этого, используемые в (29) квадратные матрицы преобразования получены не путём их численного обращения, а путём сочленения квадратных матриц, представляющих собой структурные элементы графа. Важно отметить, что уравнения равновесия и совместности деформаций на графовой модели обеспечиваются автоматически как следствие присущих графу фундаментальных зависимостей —

вершинному и контурному законам [6]. Эти законы были установлены Кирхгофом для электрических цепей применительно к токам и напряжениям. Впоследствии оказалось, что они носят фундаментальный характер и применимы ко всем переменным вне зависимости от их физической природы [5]. Согласно вершинному закону алгебраическая сумма последовательных переменных, представленных дугами графа, равна нулю, а в соответствии с контурным законом алгебраическая сумма параллельных переменных равна нулю на любом замкнутом контуре.

Покажем, что континуальную модель сплошной среды удаётся полностью восстановить из её дискретной модели в виде ориентированного графа.

Вершинный закон, если его применить к центральным вершинам (их номера 9 и 10) графа, изображенного на рис. 2, принимает вид

$$\begin{aligned} -f_{d1}^{rr} + f_{d2}^{rr} - f_{u3}^{rr} + f_{u4}^{rr} - f_{r1}^{rz} + f_{r3}^{rz} - \\ - f_{l2}^{rz} + f_{l4}^{rz} - f_{D1}^r - f_{C2}^r - f_{B3}^r - f_{A4}^r = 0, \\ -f_{d1}^{zr} + f_{d2}^{zr} - f_{u3}^{zr} + f_{u4}^{zr} - f_{r1}^{zz} + f_{r3}^{zz} - f_{l2}^{zz} + f_{l4}^{zz} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Разложим значения внутренних сил в ряд Тейлора относительно их значений в смежных элементах, сохранив по два члена разложения:

$$\begin{aligned} f_{d2}^{rr} &= f_{d1}^{rr} + (\partial f_{d1}^{rr}/\partial r)\Delta r + \dots, & f_{u4}^{rr} &= f_{u3}^{rr} + (\partial f_{u3}^{rr}/\partial r)\Delta r + \dots, \\ f_{r3}^{rz} &= f_{r1}^{rz} + (\partial f_{r1}^{rz}/\partial z)\Delta z + \dots, & f_{l4}^{rz} &= f_{l2}^{rz} + (\partial f_{l2}^{rz}/\partial z)\Delta z + \dots, \\ f_{d2}^{zr} &= f_{d1}^{zr} + (\partial f_{d1}^{zr}/\partial r)\Delta r + \dots, & f_{u4}^{zr} &= f_{u3}^{zr} + (\partial f_{u3}^{zr}/\partial r)\Delta r + \dots, \\ f_{r3}^{zz} &= f_{r1}^{zz} + (\partial f_{r1}^{zz}/\partial z)\Delta z + \dots, & f_{l4}^{zz} &= f_{l2}^{zz} + (\partial f_{l2}^{zz}/\partial z)\Delta z + \dots. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставив в (31) выражения из (32) с учётом (25), получим

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} - r \sigma^{\prime\varphi\varphi} \right) dr dz = 0, \quad \int_V \left( \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial r} \right) dr dz = 0. \quad (33)$$

В силу произвольности выбора размеров ячейки из (33) следует, что подинтегральные выражения в них должны обращаться в ноль, а это влечёт выполнение уравнений равновесия (3).

С использованием связи между физическими компонентами тензора напряжений и контравариантными компонентами

$$\sigma_{(rr)} = \sigma^{rr}, \quad \sigma_{(zz)} = \sigma^{zz}, \quad \sigma_{(\varphi\varphi)} = r^2 \sigma^{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{(rz)} = \sigma^{rz}$$

и соотношений

$$\sigma_{(rr)} = \sigma^{\prime rr}/r, \quad \sigma_{(zz)} = \sigma^{\prime zz}/r, \quad \sigma_{(\varphi\varphi)} = r \sigma^{\prime\varphi\varphi}, \quad \sigma_{(rz)} = \sigma^{\prime rz}/r$$

уравнения равновесия приобретают традиционную форму [8]:

$$\frac{\partial \sigma_{(rr)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{(rz)}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{(rr)} - \sigma_{(\varphi\varphi)}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{(zz)}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{(rz)}}{\partial r} + \frac{\sigma_{(rz)}}{r} = 0.$$

Поступая, как в [3], покажем, что контурный закон графов, применённый к определённой комбинации контуров, приводит к уравнениям совместности деформаций. Рассмотрим разность контуров, образованных дугами ячеек с номерами 1 и 3 компоненты  $U_r$  графа (ячейки левого ряда на рис. 2, а):

$$\delta_{rr}^{u1} - \delta_{rr}^{d1} - \delta_{rz}^{l1} + \delta_{rz}^{r1} - \delta_{rr}^{u3} + \delta_{rr}^{d3} + \delta_{rz}^{l3} - \delta_{rz}^{r3} = 0. \quad (34)$$

Контурные законы для дуг ячеек с номерами 1 и 2 компоненты  $U_z$  (ячейки верхнего ряда на рис. 2, б) приводят к равенству

$$\delta_{zr}^{u1} - \delta_{zr}^{d1} - \delta_{zz}^{l1} + \delta_{zz}^{r1} - \delta_{zr}^{u2} + \delta_{zr}^{d2} + \delta_{zz}^{l2} - \delta_{zz}^{r2} = 0. \quad (35)$$

Дуги  $\delta_{rr}^{d1}$  и  $\delta_{rr}^{u3}$  образуют замкнутый контур и поэтому  $\delta_{rr}^{d1} = \delta_{rr}^{u3}$ . Разложим деформации  $\delta_{rr}^{d1}$ ,  $\delta_{rr}^{d3}$  и  $\delta_{rz}^{r1}$ ,  $\delta_{rz}^{r3}$  в ряд Тейлора, сохраняя только два члена:

$$\begin{aligned} \delta_{rr}^{d1} &= \delta_{rr}^{u1} + (\partial\delta_{rr}^{u1}/\partial z)\Delta z, \\ \delta_{rr}^{d3} &= \delta_{rr}^{u3} + (\partial\delta_{rr}^{u3}/\partial z)\Delta z = \delta_{rr}^{u3} + (\partial(\delta_{rr}^{d1}/\partial z)\Delta z) = \\ &= \delta_{rr}^{u3} + (\partial(\delta_{rr}^{u1} + (\partial\delta_{rr}^{u1}/\partial z)\Delta z)/\partial z)\Delta z, \\ \delta_{rz}^{r1} &= \delta_{rz}^{l1} + (\partial\delta_{rz}^{l1}/\partial r)\Delta r, \\ \delta_{rz}^{l3} &= \delta_{rz}^{l1} + (\partial\delta_{rz}^{l1}/\partial z)\Delta z, \\ \delta_{rz}^{r3} &= \delta_{rz}^{l3} + (\partial\delta_{rz}^{l3}/\partial r)\Delta r = \delta_{rz}^{l3} + (\partial(\delta_{rz}^{l1} + (\partial\delta_{rz}^{l1}/\partial z)\Delta z)/\partial r)\Delta r. \end{aligned} \quad (36)$$

Подстановка (36) в (34) даёт

$$\begin{aligned} & - (\partial\delta_{rr}^{u1}/\partial z)\Delta z + (\partial(\delta_{rr}^{u1} + (\partial\delta_{rr}^{u1}/\partial z)\Delta z)/\partial z)\Delta z + \\ & + (\partial\delta_{rz}^{l1}/\partial r)\Delta r - (\partial(\delta_{rz}^{l1} + (\partial\delta_{rz}^{l1}/\partial z)\Delta z)/\partial r)\Delta r = \\ & = (\partial^2\delta_{rr}^{u1}/\partial z^2)\Delta z^2 - (\partial^2\delta_{rz}^{l1}/(\partial r\partial z))\Delta r\Delta z = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $\delta_{rr} \approx (\partial u_r/\partial r)\Delta r$ ,  $\delta_{rz} \approx (\partial u_r/\partial z)\Delta z$ , и сократив на  $\Delta r\Delta z^2$ , получаем, что компонента графа  $U_r$  приводит к уравнению

$$\partial^2(\partial u_r/\partial r)/\partial z^2 - \partial^2(\partial u_r/\partial z)/(\partial r\partial z) = 0. \quad (37)$$

После аналогичных преобразований уравнение (35) приобретает вид

$$\partial^2(\partial u_z/\partial z)/\partial r^2 - \partial^2(\partial u_z/\partial r)/(\partial r\partial z) = 0. \quad (38)$$

Складывая (37) и (38), получим известное уравнение совместности деформаций:

$$\partial^2(\partial u_r/\partial r)/\partial z^2 + \partial^2(\partial u_z/\partial z)/\partial r^2 - \partial^2(\partial u_r/\partial z + \partial u_z/\partial r)/(\partial r\partial z) = 0.$$

Таким образом, при уменьшении размеров сетки вершинный и контурный законы приводят к выполнению уравнений равновесия и совместности деформаций теории упругости, что влечёт сходимость приближённого решения к точному.

Важным преимуществом графового метода является возможность аппроксимации поля деформаций четырёхузлового элемента линейными полиномами. В результате при таком же уровне аппроксимации графовый метод использует систему уравнений, содержащую примерно в 3 раза меньше уравнений по сравнению с системой, используемой в методе конечных элементов.

Специально был рассмотрен вопрос о влиянии размеров элементов на результаты расчётов. Тестирование показало, что при соотношении сторон прямоугольного элемента, равном 1/100, решение не искажается. Анализ также

показал, что в пределах допустимых соотношений сторон элементов координатные линии можно сгущать произвольно и после широких элементов можно сразу же размещать узкие.

**5. Численные результаты.** Проведено сравнение результатов, полученных по предложенной методике, с известным аналитическим решением [8] для толстостенной цилиндрической трубы с внутренним  $r_1 = 3$  мм и внешним  $r_2 = 7$  мм радиусами, находящейся под действием равномерного давления  $p = 1$  МПа. При этом предполагается, что модуль Юнга материала является функцией вида  $E = E_0 r^\alpha$ , где  $E_0 = 100$  МПа, а коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . В таблице приведены отношения  $\sigma_r/p$  и  $\sigma_\varphi/p$  для различных точек в радиальном направлении в зависимости от показателя степени  $\alpha$ .

		$\sigma_r/p$					$\sigma_\varphi/p$				
$\alpha \backslash r$	$r$	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7
0		-1,000	-0,464	-0,216	-0,081	0,000	1,450	0,914	0,666	0,531	0,450
		-0,991	-0,467	-0,217	-0,082	-0,001	1,443	0,917	0,668	0,532	0,451
1		-1,000	-0,542	-0,284	-0,117	0,000	0,904	0,779	0,727	0,706	0,701
		-0,993	-0,545	-0,285	-0,118	-0,001	0,900	0,781	0,728	0,707	0,701
2		-1,000	-0,756	-0,542	-0,303	0,000	0,487	0,610	0,745	0,887	1,033
		-0,996	-0,755	-0,540	-0,300	-0,002	0,486	0,611	0,746	0,887	1,030
5		-1,000	-0,613	-0,355	-0,159	0,000	-0,139	0,114	0,555	1,286	2,427
		-0,994	-0,615	-0,356	-0,160	-0,002	-0,138	0,113	0,561	1,290	2,418

Верхняя строчка каждого ряда соответствует аналитическому решению, а нижняя строчка — графовому методу. Видно, что результаты хорошо согласуются. Отметим, что выделяемый в расчётах фрагмент трубы покрывался не очень плотной ( $16 \times 9$ ) сеткой элементарных ячеек.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузовков Е. Г., Тырымов А. А. Графовая модель упругой среды в осесимметричной постановке / В сб.: *Моделирование в механике: Сб. научных трудов. СО АН СССР: Новосибирск, 1990. С. 103–109.* [Kuzovkov E. G., Tyrymov A. A. Graph model of an elastic solid in the axisymmetric formulation / In: *Modelling in Mechanics. SO AN SSSR: Novosibirsk, 1990. Pp. 103–109*].
2. Тырымов А. А. Треугольный элемент графовой модели для осесимметричной задачи теории упругости / В сб.: *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVIII Межресп. конф. (1–3 июля 2003 г.). Новосибирск: Нонпарель, 2003. С. 187–191.* [Tyrymov A. A. Triangular element of the graph model for the axisymmetric problem of elasticity theory / In: *Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity. Novosibirsk: Nonparel, 2003. Pp. 187–191*].
3. Kuzovkov E. G. Axisymmetric graph model of an elastic solid // *Strength of Materials*, 1996. Vol. 28, no. 6. Pp. 470–485.
4. Крон Г. Исследование сложных систем по частям — диакоптика. М.: Наука, 1972. 542 с. [Kron G. *Investigation of Complex Systems by Parts (Diacopectics)*. Moscow: Nauka, 1972. 542 pp.]
5. Trent H. M. Isomorphisms between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1955. Vol. 27, no. 3. Pp. 500–527.
6. Swamy M. N. S., Thulasiraman K. *Graphs, Networks and Algorithms*. New York: John Wiley, 1981. 592 pp.; русск. пер.: Свами М., Тхуласираман К. *Графы, сети и алгоритмы*. М.: Мир, 1984. 454 с.

7. Тырымов А. А. Сингулярный элемент графовой модели упругой среды в декартовой системе координат // *Вычисл. мех. сплошн. сред*, 2011. Т. 4, № 4. С. 125–136. [Tyrymov A. A. A singular element of the graph model of an elastic medium in a cartesian coordinate system // *Computational Continuum Mechanics*, 2011. Vol. 4, no. 4. Pp. 125–136].
8. Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1979. 432 с. [Demidov S. P. Theory of Elasticity. Moscow: Vyssh. Shk., 1979. 432 pp.]

Поступила в редакцию 28/XII/2010;  
в окончательном варианте — 27/II/2012.

MSC: 74S30; 74B05

## NUMERICAL SOLUTION OF AXISYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY ON THE BASIS OF CONTINUUM GRAPH MODEL

*A. A. Tyrymov*

Volgograd State Technical University,  
28, Lenin avenue, Volgograd, 400005, Russia.

E-mail: tyrymov2010@yandex.ru

*A numerical method for analysis of the stress strain state of elastic media based on a discrete model in form of directed graph is suggested. To analyze a deformable body using the graph approach, we partition a solid body on elements and replace each element by its model in the form of an elementary cell. The matrices, presenting several structure elements of the graph, and the equations, describing the elementary cells, contribute to deriving the constitutive equations of the intact body. Numerical examples are presented.*

**Key words:** *mathematical simulation, elasticity, directed graph, strain, stress.*

Original article submitted 28/XII/2010;  
revision submitted 27/II/2012.