Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 2 (31). С. 243–249

УДК 539.376

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА В РАЗНЫХ ФОРМАХ ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

А. Ф. Крутов, Р. Г. Полежаев

Самарский государственный университет,
Россия, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mails: krutov@samsu.ru, polezaev@list.ru

В рамках Пуанкаре-инвариантной квантовой механики в модифицированном релятивистском импульсном приближении проведено построение оператора электромагнитного тока для разных форм динамики (мгновенная форма, точечная форма, динамика на световом фронте). Оператор тока построен с учётом условий лоренц-ковариантности и сохранения. Показано, что аналитические выражения для формфактора совпадают во всех формах динамики. Выполнены численные расчёты пионного формфактора с волновой функцией, полученной вариационным методом. Результаты расчёта хорошо согласуются с экспериментом.

Ключевые слова: *электромагнитный ток, двухчастичная задача, каноническая параметризация, формфактор.*

Одним из основных теоретических подходов к описанию электрослабой структуры составных кварковых систем, позволяющих проводить численные расчёты, является Пуанкаре-инвариантная квантовая механика (ПИКМ), которая, как правило, используется в трёх основных формах: мгновенной форме, точечной форме, динамике на световом фронте. Данный метод в релятивистской теории составных систем базируется на прямой реализации алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых системы [1].

Одной из основных проблем при изучении составных систем в рамках ПИКМ является построение электрослабых токов с учётом условий лоренц-ковариантности и законов сохранения. Например, в [2, 3] в рамках этого подхода был построен оператор электромагнитного тока с квантовыми числами пиона и рассчитан его формфактор в точечной форме динамики и динамике на световом фронте. На основе анализа этих и ряда других работ можно сделать вывод, что различные формы динамики дают разные результаты для электромагнитных формфакторов составных систем.

Одной из причин получения разных результатов является отличие в процедуре построения тока. В настоящей работе проводится построение оператора электромагнитного тока во всех основных формах ПИКМ в рамках единого подхода.

Ядром развитого подхода к построению оператора электромагнитного тока является так называемая процедура канонической параметризации матричных элементов локальных операторов [4]. С теоретико-групповой точки зрения данная процедура параметризации фактически представляет собой обобщение известной теоремы Вигнера—Эккарта на группу Пуанкаре. Данная процедура позволяет выделить из матричного элемента оператора любой

Александр Фёдорович Крутов (д.ф.-м.н.), профессор, каф. общей и теоретической физики.
Роман Геннадьевич Полежаев, аспирант, каф. общей и теоретической физики.

тензорной размерности приведенные матричные элементы (формфакторы), которые являются инвариантами при преобразованиях из группы Пуанкаре.

В качестве иллюстрации развитого подхода в настоящей работе производится расчёт электромагнитного формфактора пиона, для которого в предложенном формализме во всех формах динамики получаются одинаковые аналитические формулы. Показано, что результаты расчёта пионного формфактора с волновыми функциями кварков, полученными вариационным методом, хорошо описывают эксперимент.

1. Формфактор свободной двухчастичной системы. Рассмотрим систему из двух невзаимодействующих частиц. Вектор состояния одной частицы представим следующим образом:

$$|\vec{w}^i, M, j, m\rangle, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где M, m, j — соответственно масса, проекция спина на ось z и спин частицы; $\vec{w}^i$ — трёхмерный вектор в разных формах динамики. В мгновенной форме динамики $\vec{w}^1 = \vec{p}$, в точечной — $\vec{w}^2 = \vec{v}$ и в динамике на световом фронте — $\vec{w}^3 = \tilde{\vec{p}}$, где $\tilde{\vec{p}} = (p_\perp, p^+)$, $p_\perp = (p^1, p^2)$, $p^+ = (p^0 + p^3)/\sqrt{2}$. Роль энергии играет величина $p^- = (p^0 - p^3)/\sqrt{2}$. Масса и спин в векторе состояния в дальнейшем будут опускаться. Для векторов состояния (1) примем нормировку

$$\langle \vec{w}^i, m | \vec{w}^{i\,\prime}, m' \rangle = 2 w_0^i \delta(\vec{w}^i - \vec{w}^{i\,\prime}) \delta_{mm'}.$$

Для описания двухчастичной системы можно ввести также базис с явно отделенным движением центра масс [5]:

$$|\vec{W}^i, \sqrt{s}, J, l, S, m\rangle, \tag{2}$$

который нормирован следующим образом:

$$\langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, J, l, S, m | \vec{W}^{i\prime}, \sqrt{s'}, J, l', S', m' \rangle = \\ = N \delta(\vec{W}^i - \vec{W}^{i\,\prime}) \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) \delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta_{SS'} \ .$$

Здесь $\vec{W}^i = \vec{w}_1^i + \vec{w}_2^i$, $\sqrt{s}$ — инвариантная масса системы двух свободных частиц, l — орбитальный момент в системе центра инерции (СЦИ), S — суммарный спин в СЦИ, N — нормировочная константа, явный вид которой в дальнейшем не используется.

В составной кварковой модели пион представляется как связанное состояние u и $\bar{d}$ кварков с квантовыми числами $J = l = S = 0$. Будем считать, что их массы одинаковы ($M_u = M_{\bar{d}} = M$), тогда матричный элемент оператора электромагнитного тока свободной двухчастичной системы с квантовыми числами пиона запишется в виде

$$\langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | j_0^\mu(0) | \vec{W}^{i\,\prime}, \sqrt{s'}, m' \rangle = \int \frac{d^3 \vec{w}_1^i}{2 w_{10}^i} \int \frac{d^3 \vec{w}_2^i}{2 w_{20}^i} \int \frac{d^3 \vec{w}_1^{i\,\prime}}{2 w_{10}^{\prime i}} \int \frac{d^3 \vec{w}_2^{i\,\prime}}{2 w_{20}^{\prime i}} \times \\ \times \langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | \vec{w}_1^i, m_1; \vec{w}_2^i, m_2 \rangle \, \langle \vec{w}_1^i, m_1; \vec{w}_2^i, m_2 | j_0^\mu(0) | \vec{w}_1^{i\,\prime}, m_1'; \vec{w}_2^{i\,\prime}, m_2' \rangle \times \\ \times \langle \vec{w}_1^{i\,\prime}, m_1'; \vec{w}_2^{i\,\prime}, m_2' | \vec{W}^{i\,\prime}, \sqrt{s'}, m' \rangle \ , \tag{3}$$

где

$$\langle \vec{w_1^i}, m_1; \vec{w_2^i}, m_2 | j_0^\mu(0) | \vec{w_1^i}', m_1'; \vec{w_2^i}', m_2' \rangle =$$
$$= \langle \vec{w_1^i}, m_1 | j_{10}^\mu(0) | \vec{w_1^i}', m_1' \rangle \; \delta(\vec{w_2^i} - \vec{w_2^i}') \, \delta_{m_2 m_2'} +$$
$$+ \langle \vec{w_2^i}, m_2 | j_{20}^\mu(0) | \vec{w_2^i}', m_2' \rangle \; \delta(\vec{w_1^i} - \vec{w_1^i}') \, \delta_{m_1 m_1'}.$$

Матричный элемент одночастичного тока параметризуется следующим образом:

$$\langle \vec{w_1^i}, m_1 | j_{10}^\mu(0) | \vec{w_1^i}', m_1' \rangle =$$
$$= \sum_{m_1''} D^{1/2}_{m_1 m_1''}(R(\vec{w_1^i})) \langle m_1'' | [f_{10}(Q^2) K_\mu' + i f_{30}(Q^2) R_\mu] | m_1' \rangle.$$

Здесь $f_{10}(Q^2)$ и $f_{30}(Q^2)$ имеют смысл электрического и магнитного форм-факторов частицы соответственно, $K_\mu' = w_\mu + w_\mu'$, $\quad R_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} w^\nu w'^\lambda \Gamma^\rho(w')$. Коэффициенты Клебша—Гордана определяются следующим образом:

$$\langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | \vec{w_1^i}, m_1; \vec{w_2^i}, m_2 \rangle = 2\sqrt{s} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\lambda(s, M_u^2, M_d^2)]^{-1/2} \times$$
$$\times 2P_0 \delta(W^i - w_1^i - w_2^i) \sum_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2} D^{1/2}_{m_1 \tilde{m}_1}(R(\vec{w_1^i})) D^{1/2}_{m_2 \tilde{m}_2}(R(\vec{w_2^i})).$$

С другой стороны, в базисе (2) матричный элемент тока можно представить в виде [5]

$$\langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | j_0^\mu(0) | \vec{W}^{i\prime}, \sqrt{s'}, m' \rangle = A^{\mu i}(s, Q^2, s') g_0(s, Q^2, s'), \tag{4}$$

где $g_0(s, Q^2, s')$ — так называемый свободный двухчастичный формфактор, $A^{\mu i}(s, Q^2, s')$ — функция, отвечающая за трансформационные свойства матричного элемента и имеющая вид

$$A^{\mu i}(s, Q^2, s') = \left[W_\mu^i (s - s' + Q^2) + {W^{i\prime}}_\mu (s' - s + Q^2) \right] / Q^2 \; .$$

Приравнивая выражения (3) и (4) и выполняя интегрирование в системе $\vec{W}^{i\prime} = 0$, $\vec{W}^i = (0{,}0, W^i)$, получим аналитическое выражение для свободного двухчастичного формфактора:

$$g_0(s, Q^2, s') = \frac{(s + s' + Q^2)^2 Q^2 [\vartheta(s' - s_1) - \vartheta(s' - s_2)]}{2\sqrt{s - 4M^2}\sqrt{s' - 4M^2} [\lambda(s, Q^2, s')]^{3/2}} \times$$
$$\times \left[\cos(\omega_1 + \omega_2) f_{10}(Q^2) - 2M \xi(s, s', Q^2) \sin(\omega_1 + \omega_2) f_{30}(Q^2)) \right], \tag{5}$$

где введены следующие обозначения:

$$\xi(s, s', Q^2) = \sqrt{s s' Q^2 - M^2 \lambda(s, -Q^2, s')},$$

$$\omega_1 = \arctan\frac{\xi(s,s',Q^2)}{M[(\sqrt{s}+\sqrt{s'})^2+Q^2]+\sqrt{ss'}(\sqrt{s}+\sqrt{s'})},$$

$$\omega_2 = \arctan\frac{\xi(s,s',Q^2)(2M+\sqrt{s}+\sqrt{s'})}{M(s+s'+Q^2)(2M+\sqrt{s}+\sqrt{s'})+\sqrt{ss'}(4M^2+Q^2)},$$

$$s_{1,2} = 2M^2+\frac{1}{2M^2}(2M^2+Q^2)(s-2M^2)\mp\frac{1}{2M^2}\sqrt{Q^2(Q^2+4M^2)s(s-4M^2)},$$

ϑ — ступенчатая функция.

Таким образом, аналитические выражения для свободных формфакторов во всех формах динамики получаются одинаковыми.

2. Построение оператора электромагнитного тока составной системы в разных формах динамики. Построим матричный элемент оператора электромагнитного тока $j_c^\mu(0)$ для системы двух кварков со взаимодействием:

$$\langle\vec{w^i}_c|j_c^\mu(0)|\vec{w_c^i}'\rangle = (w_c^i+w_c'^i)^\mu F_c(Q^2)\ , \qquad (6)$$

где $\vec{w_c^i}$ — трёхмерный вектор составной системы в разных формах динамики, $F_c(Q^2)$ — формфактор составной системы.

В силу того, что в ПИКМ вектор состояния составной двухчастичной системы принадлежит прямому произведению двух одночастичных гильбертовых пространств, матричный элемент тока (6) можно разложить по базису (2).

Воспользовавшись полнотой набора двухчастичных состояний и «снимая» интегрирование по переменным $\vec{W}^i$ и $\vec{W}^{i\prime}$ за счёт δ-функций (см. [1]), получим

$$\langle\vec{w_c^i}|j_c^\mu(0)|\vec{w_c^i}'\rangle = \int d\sqrt{s}\int d\sqrt{s'}\varphi(s)\varphi(s')\langle\vec{W}^i,\sqrt{s}|j_c^\mu(0)|\vec{W}^{i\prime},\sqrt{s'}\rangle\ , \qquad (7)$$

где $\varphi(s)$ — волновая функция составной системы, $\varphi(s)=\tilde{N}k\psi(k)$, $\psi(k)$ — модельная волновая функция, удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int\psi^2(k)k^2dk = 1.$$

Обкладки матричного элемента, входящего в правую часть (7), физически описывают систему двух свободных частиц и преобразуются по представлению, генераторы которого не зависят от взаимодействия. В то же время оператор тока преобразуется по другому представлению, генераторы которого зависят от взаимодействия. Следовательно, к этому матричному элементу оператора электромагнитного тока нельзя применить теорему Вигнера—Эккарта (4), т. к. мы не можем из переменных векторов состояний построить 4-вектор, описывающий свойства матричного элемента при простанственно-временных преобразованиях. Для решения этой проблемы будем рассматривать матричный элемент электромагнитного тока как обобщённую функцию, т. е. объект, имеющий смысл только под знаком интеграла. Представим матричный элемент в виде произведения гладкой ковариантной функции и инвариантной обобщённой функции

$$\langle\vec{W}^i\sqrt{s}|j_c^\mu(0)|\vec{W}^{i\prime},\sqrt{s'}\rangle = B^\mu(s,Q^2,s')G(s,Q^2,s')\ , \qquad (8)$$

где B^μ — 4-вектор, являющийся гладкой ковариантной функцией, явный вид которого пока неизвестен; $G(s,Q^2,s')$ — инвариантная обобщённая функция, содержащая информацию о процессе. Подставим представление (8) в (7):

$$\int d\sqrt{s}\int d\sqrt{s'}\varphi(s)\varphi(s')B^\mu(s,Q^2,s')G(s,Q^2,s') = (w_c^i + w_c'^i)^\mu F_c(Q^2). \qquad (9)$$

Для определения вектора B^μ потребуем, чтобы (9) было ковариантным равенством в смысле обобщённых функций, т. е. чтобы оно выполнялось для любой основной функции $\varphi(s)$ в любой фиксированной системе отсчёта. При варьировании основной функции вектор в правой части (9) не будет изменяться, так как он составлен из 4-векторов, описывающих движение системы как целого и не зависящих от внутреннего движения конституентов. С другой стороны, при произвольном изменении основной функции 4-вектор в левой части, вообще говоря, будет произвольным образом менять свое направление. Таким образом, чтобы равенство (9) выполнялось при любой основной функции, достаточно потребовать выполнения равенства

$$B^\mu(s,Q^2,s') = (w_c^i + w_c'^i)^\mu\ . \qquad (10)$$

Выполнение этого равенства приводит к выполнению как условия лоренц-ковариантности, так и условия сохранения тока. Подставляя (10) в (9), мы получаем аналитическое выражение для формфактора составной системы:

$$F_c(Q^2) = \iint d\sqrt{s}d\sqrt{s'}G(s,Q^2,s')\varphi(s)\varphi(s'),$$

где $G(s,Q^2,s')$ — формфактор составной системы.

Для вычислений можно использовать так называемое модифицированное импульсное приближение [1]. Суть его заключается в том, чтобы заменить $G(s,Q^2,s')$ на свободный двухчастичный формфактор $g_0(s,Q^2,s')$, определяемый равенством (5):

$$F_c(Q^2) = \iint d\sqrt{s}d\sqrt{s'}g_0(s,Q^2,s')\varphi(s)\varphi(s')\ . \qquad (11)$$

3. Вычисление волновых функций вариационным методом. Обсудим теперь вычисление волновых функций в (11). Процедура вычисления волновых функций системы в ПИКМ сводится к диагонализации оператора массы системы взаимодействующих частиц $\hat{M}_I$. Для этого поставим задачу на собственные значения для оператора массы:

$$\hat{M}_I\psi = M_c\psi, \qquad \hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V}, \qquad (12)$$

$\hat{M}_0$ — оператор массы свободной двухчастичной системы, $\hat{V}$ — оператор взаимодействия. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться стандартным вариационным методом [6]. Для решения уравнения (12) вариационным методом необходимо найти матричный элемент оператора массы. Матричный элемент оператора массы имеет вид

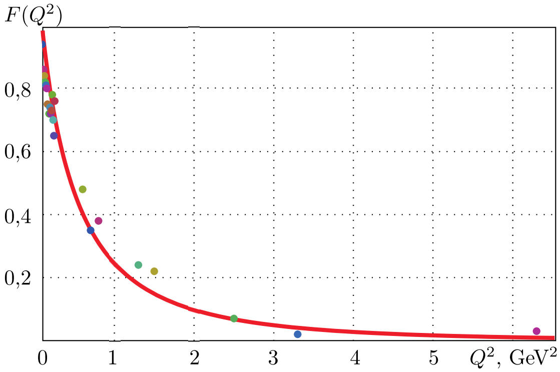
$$\langle\vec{w_c^i}|\hat{M}_c|\vec{w_c^i}\rangle = \langle\vec{w_c^i}|\hat{M}_0|\vec{w_c^i}\rangle + \langle\vec{w_c^i}|\hat{V}|\vec{w_c^i}\rangle\ . \qquad (13)$$

В качестве потенциала взаимодействия в данной работе используется потенциал Брейта [7].

Вычисленный матричный элемент (13) является функцией от параметров потенциала [7] и параметров пробных функций. В данной работе в качестве пробной функции выбиралась волновая функция основного состояния гармонического осцилятора:

$$\psi(k) = 2\pi^{-1/4} b^{-3/2} \exp(-k^2/2b^2)\ , \tag{14}$$

где b — параметр пробной функции.



Результаты расчёта пионного формфактора (11) для волновой функций (14); экспериментальные точки взяты из [2]

Параметр определяется из условия минимума функционала

$$M_c'(b) = 0, \quad M_c''(b) > 0\ . \tag{15}$$

Решение уравнения (15) даёт значение параметра b = = 0,378 GeV. Результаты расчёта пионного формфактора (11) для волновой функций (14), полученной вариационным методом, представлены на графике. Из графика видно, что теоретические расчёты неплохо согласуются с экспериментом.

Заключение. В работе решалась задача о вычислении электромагнитного формфактора пиона для различных форм динамики в рамках подхода ПИКМ. Для решения данной задачи с помощью процедуры канонической параметризации в модифицированном релятивистском импульсном приближении проведено построение оператора электромагнитного тока в мгновенной форме, точечной форме и динамике на световом фронте. Аналитические выражения для формфакторов полностью совпадают для всех форм динамики. Выполнены численные расчёты пионного формфактора с волновыми функциями, полученными вариационным методом. Результаты расчёта хорошо согласуются с экспериментальными данными.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий*, “Мгновенная форма Пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем” // *ФЭЧАЯ*, 2009. Т. 40, № 2. С. 269–319; англ. пер.: *A. F. Krutov, V. E. Troitsky*, “Instant form of Poincaré-invariant quantum mechanics and description of the structure of composite systems” // *Physics of Particles and Nuclei*, 2009. Vol. 40, no. 2. Pp. 136–161.
2. *В. В. Андреев, А. В. Сосновский*, “Точечная форма релятивистской гамильтоновой динамики и электромагнитный радиус пиона” // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*, 2001. № 5(8). Проблемы взаимодействия излучения с веществом. С. 8–12. [*V. V. Andreev, A. V. Sosnovsky*, “The point form of relativistic Hamiltonian dynamics and pion electromagnetic radius” // *Proceedings of the F. Scorina Gomel State University*, 2001. no. 5(8). Pp. 8–12].

3. *B. Desplanques, Y. B. Dong*, "RQM description of PS meson form factors, constraints from space-time translations, and underlying dynamics" // *Eur. Phys. J. A*, 2011. Vol. 47, 13. 21 pp.
4. *А. А. Чешков, Ю. М. Широков*, "Инвариантная параметризация локальных операторов" // *ЖЭТФ*, 1963. Т. 44. С. 1983–1992; англ. пер.: *A. A. Cheshkov, Yu. M. Shirokov*, "Invariant parametrization of local operators" // *Nuclear Physics*, 1963. Vol. 49. Pp. 108–120.
5. *В. П. Кожевников, В. Е. Троицкий, С. В. Трубников, Ю. М. Широков*, "О связи формфакторов дейтрона с физической S-матрицей. I" // *ТМФ*, 1972. Т. 10, № 1. С. 47–57; англ. пер.: *V. P. Kozhevnikov, V. E. Troitskii, S. V. Trubnikov, Yu. M. Shirokov* // *Theoret. and Math. Phys.*, 1972. Vol. 10, no. 1. Pp. 30–37.
6. *А. С. Давыдов*, Квантовая механика. М.: Наука, 1973. 703 с. [*A. S. Davydov*, Quantum mechanics. Moscow: Nauka, 1973. 703 pp.]
7. *В. П. Макаров*, "О потенциале Брейта" // *ТМФ*, 2006. Т. 146, № 3. С. 443–446; англ. пер.: *V. P. Makarov*, "On the Breit potential" // *Theoret. and Math. Phys.*, 2006. Vol. 146, no. 3. Pp. 373–375.

Поступила в редакцию 14/XI/2012;
в окончательном варианте — 27/III/2013.

MSC: 81V45; 81U05, 81U10

CONSTRUCTION OF THE ELECTROMAGNETIC CURRENT OPERATOR IN DIFFERENT FORMS OF POINCARÉ-INVARIANT QUANTUM MECHANICS

A. F. Krutov, R. G. Polezhaev

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mails: krutov@samsu.ru, polezaev@list.ru

In an approach of the Poincaré-invariant quantum mechanics in a modified relativistic impulse approximation performed construction of the operator of the electromagnetic current for different forms of dynamics (instant form, point form and dynamics of the light-front). The current operator is constructed according to the conditions of Lorentz covariance and conservation. It is shown that the analytical expressions for the form factor are identical in all forms of dynamics. Numerical calculations of the pion form factor with the wave function obtained by the variational method are in good agreement with experiment.

Key words: *electromagnetic current, two-body problem, the canonical parameterization formfactor.*

Original article submitted 14/XI/2012;
revision submitted 27/III/2013.

Alexander F. Krutov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of General and Theoretical Physics. *Roman G. Polezhaev*, Postgraduate Student, Dept. of General and Theoretical Physics.