Математический анализ

УДК 517.589

О ДВУХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, ОБОБЩАЮЩИХ ФУНКЦИЮ ТИПА МИТТАГ–ЛЕФФЛЕРА, ИХ СВОЙСТВАХ И ПРИМЕНЕНИИ

Е. Н. Огородников

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: eugen.ogo@gmail.com

Рассмотрены две специальные функции, связанные с функциями типа Миттаг—Леффлера. Первая из них является модификацией обобщённой функции типа Миттаг—Леффлера, введённой А. А. Килбасом и М. Сайго, вторая — специальным случаем первой. Указана связь этих функций с некоторыми элементарными и специальными функциями и их роль в решении интегральных уравнений Вольтерры с ядрами Абеля. Приведены формулы дробного интегрирования и дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля и Кобера этих функций. Отмечена их роль в решении задач типа Коши для линейных дифференциальных уравнений с производными Римана—Лиувилля и Кобера.

Ключевые слова: *специальные функции, функции типа Миттаг–Леффлера, дробное исчисление, интегро-дифференциальные операторы Римана–Лиувилля и Кобера, дробные дифференциальные и интегральные уравнения, задачи типа Коши.*

Введение. Рассмотрим функции

$$\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu) = \Gamma\binom{\mu}{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\binom{k\rho+\nu}{k\rho+\mu}z^n, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_\rho(z;\mu) = \Gamma(\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\binom{k\rho+1}{k\rho+\mu}\frac{z^n}{n!}, \tag{2}$$

где $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция Эйлера, $\Gamma\binom{\mu}{\nu} = \Gamma(\mu)/\Gamma(\nu)$; z, μ, $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\rho > 0$; $k\rho+\nu \notin \mathbb{Z}_0^-$, $k \in \mathbb{N}$; $\mathbb{Z}_0^- = \{0,-1,-2,\dots,-n,\dots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Функция $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ примыкает к хорошо известной обобщённой функции типа Миттаг—Леффлера, введённой А. А. Килбасом и М. Сайго в [1] как сумма ряда

$$E_{\alpha,m,l}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{3}$$

Евгений Николаевич Огородников (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

где

$$c_0 = 1, \quad c_n = \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\begin{pmatrix} \alpha(km+l)+1 \\ \alpha(km+l+1)+1 \end{pmatrix};$$

α, $l \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $m > 0$; $\alpha(km+l) \notin \mathbb{Z}^-$, $k \in \mathbb{N}_0$; $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}_0^- \backslash \{0\}$, и, по существу, является её модификацией. Свойства этой специальной функции изучались в работах [2–4]. Определение и некоторые основные факты можно найти в монографии [5].

Между параметрами, входящими в определение (3) функции $E_{\alpha,m,l}(z)$, и параметрами функции $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ из (1) существует следующее взаимно-однозначное соответствие:

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \mathcal{E}_{\alpha m}\big(z; \alpha(l-m)+1, \alpha(l-m+1)+1\big).$$

Функция $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ возникла в работе автора [6] в процессе решения начально-краевой задачи для вырождающегося уравнения аномальной (дробной) диффузии, записанного в терминах производной Кобера—Эрдейи, при попытке распространить функцию $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ на случай $\nu = 0$. Нетрудно показать, что

$$\mathcal{E}_\rho(z;0,\mu) = \lim_{\nu\to 0} \mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu) = \Gamma(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \Gamma\begin{pmatrix} k\rho+1 \\ k\rho+\mu \end{pmatrix} \frac{(z/\rho)^n}{n!} = \mathcal{E}_\rho\Big(\frac{z}{\rho};\mu\Big). \tag{4}$$

1. О сходимости рядов $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ и $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ в комплексной плоскости.

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{Re} > 0$; $k\rho + \nu \notin \mathbb{Z}_0^-$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Если* $\operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu$, *то ряды* (1) *и* (2) *сходятся абсолютно во всей комплексной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим ряд (1). Обозначим $u_n = c_n z_n$ — общий член ряда и воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|z|\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\Gamma(n\rho+\rho+\nu)}{\Gamma(n\rho+\rho+\mu)}\right| = |z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\Gamma(m\rho+\nu)}{\Gamma(m\rho+\mu)}\right|,$$

где $m = n+1$. Покажем, что предел равен нулю, если $\operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu$. Для этого воспользуемся известной асимптотической формулой [7]:

$$\frac{\Gamma(z+\nu)}{\Gamma(z+\mu)} = z^{\nu-\mu}\left[1 + \mathsf{O}\Big(\frac{1}{z}\Big)\right], \quad |\arg z| < \pi. \tag{5}$$

Тогда

$$\left|\frac{\Gamma(m\rho+\nu)}{\Gamma(m\rho+\mu)}\right| = \left|(m\rho)^{\nu-\mu}\right|\left|1+\mathsf{O}\Big(\frac{1}{m\rho}\Big)\right| = \left|e^{(\nu-\mu)\ln(m\rho)}\right|\left|1+\mathsf{O}\Big(\frac{1}{m\rho}\Big)\right|,$$

где $\left|e^{(\nu-\mu)\ln(m\rho)}\right| = ke^{(\operatorname{Re}\nu-\operatorname{Re}\mu)\ln(m/\rho)} \to 0$ при $m\to\infty$, $\operatorname{Re}\nu - \operatorname{Re}\mu < 0$ и $k = e^{-(\mathrm{Im}\nu-\mathrm{Im}\mu)\arg(\mathrm{m}\rho)} = \mathrm{const}$.

Что касается ряда (2), его абсолютная сходимость при условии $\operatorname{Re}\mu > 0$, вообще говоря, следует из равенства (4) и предыдущего результата. Однако её нетрудно установить и непосредственным вычислением:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |z|\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\left|\frac{\Gamma(m\rho+1)}{\Gamma(m\rho+\mu)}\right|, \quad m = n+1.$$

Используя (5), находим

$$\left|\frac{\Gamma(m\rho+1)}{\Gamma(m\rho+\mu)}\right| = \left|e^{(1-\mu)\ln(m\rho)}\right|\left|1+\mathsf{O}\left(\frac{1}{m\rho}\right)\right| = ke^{(1-\operatorname{Re}\mu)\ln(m|\rho|)}\left|1+\mathsf{O}\left(\frac{1}{m\rho}\right)\right|,$$

где $k = e^{\operatorname{Im}\mu\arg(\mathrm{m}\rho)} = \mathrm{const}$.

Очевидно, $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}e^{(1-\operatorname{Re}\mu)\ln(m|\rho|)} = 0$ при $\operatorname{Re}\mu \geqslant 1$. Пусть $\operatorname{Re}\mu < 1$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}e^{(1-\operatorname{Re}\mu)\ln(m|\rho|)} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m|\rho|)^{1-\operatorname{Re}\mu}}{m} = \lim_{m\to\infty}|\rho|\,(1-\operatorname{Re}\mu)(m\,|\rho|)^{-\operatorname{Re}\mu} = 0,$$

если $\operatorname{Re}\mu > 0$. Лемма доказана. □

2. Связь функций $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ и $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ с элементарными и некоторыми специальными функциями. Все приведённые в этом пункте формулы легко следуют из (1) и (2).

Пусть $\operatorname{Re}\rho > 0$. Рассмотрим некоторые частные и специальные значения параметров μ и ν.

2.1. При $\nu = 0$ и $\mu = 1$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_\rho(z;0,1) = \mathcal{E}_\rho(z/\rho;1) = e^{z/\rho}, \tag{6}$$

из которого, в частности, при $\rho = 1$ следует

$$\mathcal{E}_1(z;0,1) = \mathcal{E}_1(z;1) = e^z. \tag{7}$$

Более того, из (2) следует, что $\mathcal{E}_\rho(z;1) = e^z$ для любого $\rho\in\mathbb{C}$, при котором коэффициенты c_n ряда (2) имеют смысл.

2.2. Пусть $\nu = \mu-\rho$, $\mu\notin\mathbb{Z}_0^-$. Тогда

$$\mathcal{E}_\rho(z;\mu-\rho,\mu) = \Gamma(\mu)E_\rho(z;\mu), \tag{8}$$

где

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\rho+\mu)}$$

— принятое в настоящей работе обозначение функции типа Миттаг—Леффлера [8, 9]. Формуле (8) можно придать вид

$$\mathcal{E}_{\mu-\nu}(z;\nu,\mu) = \Gamma(\mu)E_{\mu-\nu}(z;\mu), \quad \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu. \tag{9}$$

Если в (9) положить $\nu = 0$ или в (8) принять $\rho = \mu$, получим

$$\mathcal{E}_\mu(z;0,\mu) = \mathcal{E}_\mu(z/\mu;\mu) = \Gamma(\mu)E_\mu(z;\mu), \quad \operatorname{Re}\mu > 0.$$

Отметим ещё одну полезную формулу:

$$x^{\mu-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\mu-\alpha,\mu) = \Gamma(\mu)\operatorname{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;x),$$

где α, μ, $\lambda \in \mathbb{C}$; $x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, а $\operatorname{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;x) = x^{\mu-1}E_\alpha(\lambda x^\alpha;\mu)$ — обобщённая дробная экспоненциальная функция [11, 12].

2.3. Пусть $\mu = \nu + 1$. Тогда функция $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ определяется рядом

$$\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\nu+1) = \Gamma\binom{\nu+1}{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\binom{k\rho+\nu}{k\rho+\nu+1}z^n = \nu\sum_{n=0}^{\infty}\left[\prod_{k=0}^{n}(k\rho+\nu)\right]^{-1}z^n,$$

где $k\rho + \nu \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Если теперь в последнем выражении положить $\nu = \rho$, то приходим к

$$z\mathcal{E}_\rho(z;\rho,\rho+1) = \rho(e^{z/\rho}-1), \tag{10}$$

из которой, в частности, при $\rho = 1$ следует

$$z\mathcal{E}_1(z;1,2) = e^z - 1 = zE_1(z;2). \tag{11}$$

Заметим, что с учётом (6) равенство (10) можно также записать в виде

$$z\mathcal{E}_\rho(z;\rho,\rho+1) = \rho\big(\mathcal{E}_\rho(z/\rho;1)-1\big).$$

2.4. Рассмотрим функцию $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ при $\mu = \rho + 1$:

$$\mathcal{E}_\rho(z;\rho+1) = \Gamma(\rho+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n\rho+\rho+1)}\frac{z^n}{n!} = \Gamma(\rho+1)W_\rho(z;\mu).$$

Здесь

$$W_\alpha(z;\mu) = \phi(\alpha,\mu;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+\mu)}\frac{z^n}{n!}, \quad \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$$

— функция Райта [5, 8, 10].

2.5. Представления функций (1) и (2) через элементарные функции при частных значениях параметров ρ, μ и ν легко установить с помощью (8). Например, (7) получается из (8) при $\rho = 1$ и $\mu = 1$. Далее при $\rho = 1$ и при $\mu = 2$ получаем

$$E_1(z;2) = \mathcal{E}_1(z;1,2) = z^{-1}(e^z-1),$$

что совпадает с (11); при $\rho = 1$ и при $\mu = 2$ —

$$2!E_1(z;3) = \mathcal{E}_1(z;2,3) = 2z^{-2}(e^z-1-z).$$

По индукции при $\mu = n+1$ можно получить

$$E_1(z;n+1) = z^{-n}R_n(z),$$

где $R_n(z)$ — остаточный член в разложении функции e^z в ряд Маклорена.

При $\rho = 2$ и $\mu = 1$ можно получить

$$E_2(z^2;1) = \mathcal{E}_2(z^2;-1,1) = \operatorname{ch}z, \quad E_2(-z^2;1) = \mathcal{E}_2(-z^2;-1,1) = \cos z,$$

а при $\rho = 2$ и $\mu = 2$ —

$$E_2(z^2;2) = \mathcal{E}_2(z^2;0,2) = \mathcal{E}_2(z^2/4;2) = z^{-1}\operatorname{sh}z,$$

$$E_2(-z^2;2)=\mathcal{E}_2(-z^2;0,2)=\mathcal{E}_2(-z^2/4;2)=z^{-1}\sin z.$$

2.6. Рассмотрим случаи вырождения функций (1) и (2).

Известно, что при $\alpha=0$ функция $E_\alpha(z;\mu)$ вырождается в сумму геометрической прогрессии, сходящуюся в круге $|z|<1$. Действительно,

$$E_0(z;\mu)=\lim_{\alpha\to 0+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha n+\mu)}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\frac{1}{1-z},\quad \mu\notin\mathbb{Z}_0^-.$$

Подобным образом ведёт себя функция $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ при $\nu\to\mu$:

$$\lim_{\nu\to\mu}\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)=\mathcal{E}_\rho(z;\mu,\mu)=\frac{1}{1-z},$$

а при $\rho=0$:

$$\mathcal{E}_0(z;\nu,\mu)=\lim_{\rho\to 0+}\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\Gamma\binom{\nu}{\mu}z\right]^n=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)-\Gamma(\nu)z}. \tag{12}$$

Очевидно выполнение равенства

$$\mathcal{E}_0(z;\mu,\mu)=\mathcal{E}_\rho(z;\mu,\mu)=\Gamma(\mu)E_0(z;\mu).$$

Несколько иначе ведёт себя функция $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$:

$$\mathcal{E}_0(z;\mu)=\lim_{\rho\to 0+}\mathcal{E}_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{\Gamma(\mu)}\right)^n=e^{z/\Gamma(\mu)},\quad \mu\in\mathbb{C}.$$

С учётом (6) можно записать

$$\mathcal{E}_0(z;\mu)=\mathcal{E}_{\Gamma(\mu)}\left[z/\Gamma(\mu);1\right]=\mathcal{E}_{\Gamma(\mu)}(z;0,1)=e^{z/\Gamma(\mu)}.$$

Наконец, при $\mu\to 0$ получим

$$\mathcal{E}_\rho(z/\rho;0)=\lim_{\mu\to 0}\mathcal{E}_\rho(z/\rho;\mu)=\lim_{\mu\to 0}\mathcal{E}_\rho(z;0,\mu)=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1.$$

3. Функции $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ и $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ в решениях интегральных уравнений вольтерровского типа. Основное внимание в работе [13] было сосредоточено на задаче нахождения явных решений интегрального уравнения

$$y(x)-\lambda x^\beta I_{0x}^\alpha x^\eta y(x)=kx^{\sigma-1},\quad k=\mathrm{const} \tag{13}$$

с правой частью специального вида и левосторонним интегралом Римана—Лиувилля $I_{0x}^\alpha f\equiv(I_{0+}^\alpha f)(x)$ порядка α [14] при $\alpha>0$, β, η, $\sigma\in\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (13) $\alpha+\beta+\eta>0$. *Тогда при выполнении условий* $\alpha+\beta\neq\sigma$, $\eta+\sigma>0$ *его решение записывается с помощью функции* (1), *в которой* $\rho=\alpha+\beta+\eta$, $\mu=\sigma-\beta$, $\nu=\sigma-\alpha-\beta$, *и имеет вид*

$$y(x)=kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu,\mu). \tag{14}$$

В случае $\alpha + \beta = \sigma$ его решение принимает вид

$$y(x) = kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_{\eta+\sigma}\Big(\frac{\lambda x^{\eta+\sigma}}{\eta+\sigma}; \alpha\Big).$$

Опустим формальное доказательство этой теоремы, так как интегральные уравнения подобного типа были предметом исследований многих авторов [1, 2, 15, 16], однако сделаем ряд замечаний.

Ясно, что в интегральном уравнении (13) в записи оператора $x^\beta I_{0x}^\alpha x^\eta$ $(\alpha > 0)$ из параметров α, β, η существенны лишь два, так как замена искомой функции $y(x) = x^{-\eta}\varphi(x)$ приводит уравнение (13) к уравнению с оператором $x^{\beta+\eta}I_{0x}^\alpha$, а замена $y(x) = x^\beta\varphi(x)$ — к уравнению с оператором $I_{0x}^\alpha x^{\beta+\eta}$. Однако нам будем удобно сохранить запись интегрального уравнения в виде (13), позволяющем при необходимости рассматривать случаи уравнения с внутренним или внешним коэффициентами, полагая $\beta = 0$ или $\eta = 0$ соответственно.

В работе [13] решение интегрального уравнения (13) в виде (14) построено как результат применения оператора $(I - \lambda x^\beta I_{0x}^\alpha x^\eta)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \lambda^n (x^\alpha I_{0x}^\alpha x^\eta)^n$ к функции $f(x) = kx^{\sigma-1}$. Здесь I — тождественный оператор.

Существование решения (14) легко обосновывается его непосредственной подстановкой в интегральное уравнение (13). Существование единственного решения при $\rho > 0$ следует также из хорошо известных результатов [9, 15, 17].

Действительно, заменой искомой функции $y(x) = x^\beta\varphi(x)$ интегральное уравнение (13) с произвольной функцией $f(x) = L(0, l)$, $l > 0$, в правой части приводится к уравнению

$$\varphi(x) - \lambda I_{0x}^\alpha x^{\rho-\alpha}\varphi(x) = x^{-\beta}f(x). \tag{15}$$

Пусть в уравнении (15) $\rho - \alpha > 0$. Тогда к нему применима известная теория интегральных уравнений Вольтерры второго рода с ядром Абеля [17].

Если $\rho - \alpha = 0$, то единственное решение уравнения (15) записывается в терминах интегрального оператора $E_{0x;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ с функцией типа Миттаг—Леффлера в ядре [18–20] для любой функции $f(x) : x^{-\beta}f(x) \in L(0, l)$ и имеет вид

$$\varphi(x) = (I - \lambda I_{0x}^\alpha)^{-1}x^{-\beta}f(x) = (I + \lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha,\alpha})x^{-\beta}f(x),$$

а решением интегрального уравнения (13) будет соответственно функция

$$y(x) = x^\beta\varphi(x) = f(x) + \lambda x^\beta \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_\alpha\left[\lambda(x-t)^\alpha; \alpha\right] t^{-\beta}f(t)dt.$$

Для $f(x) = kx^{\sigma-1}$, используя свойства оператора $E_{0x;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ [21, 22], это решение легко выписать в терминах обобщённой дробной экспоненциальной функции, и в конечном счёте — через функцию типа Миттаг—Леффлера:

$$y(x) = k\Gamma(\sigma-\beta)x^\beta \operatorname{Exp}(\alpha, \sigma-\beta; \lambda; x) = k\Gamma(\sigma-\beta)x^{\sigma-1}E_\alpha(\lambda x^\alpha; \sigma-\beta). \tag{16}$$

Наконец, в случае $-1 < \rho - \alpha < 0$ можно воспользоваться результатом работы [15], показав, что некоторая степень интегрального оператора в (15) будет сжимающим оператором, и воспользоваться обобщённым принципом сжимающих отображений [23, стр. 82].

В любом случае решение интегрального уравнения (13) записывается как

$$y(x) = kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \sigma-\alpha-\beta, \sigma-\beta), \tag{17}$$

что совпадает с формулой (14). При $\rho = \alpha$, в частности, по формуле (8) легко получить представление решения в виде (16).

Случай $\rho = 0$, $0 < \alpha < 1$ является особым для интегрального уравнения (15). Однако его решение для $f(x) = kx^{\sigma-1}$, а значит и решение уравнения (13) можно найти по формуле (17) при $\rho = 0$, используя формулу (12):

$$y(x) = kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_0(\lambda x^0; \sigma-\alpha-\beta, \sigma-\beta) = \frac{k\Gamma(\sigma-\beta)x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma-\beta) - \lambda\Gamma(\sigma-\alpha-\beta)},$$

если $|\lambda| < \Gamma\binom{\sigma-\beta}{\sigma-\alpha-\beta}$.

4. Дробные интегралы и производные функций $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ и $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$. Учитывая связь между параметрами ρ, ν и μ в решении (14) и параметрами α, β и η интегрального уравнения (13) при $k = \sigma = 1$, легко убеждаемся, что функция $\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu, \mu)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$y(x) - \lambda x^{1-\mu} I_{0x}^{\mu-\nu} x^{\rho+\nu-1} y(x) = 1, \tag{18}$$

где ρ, μ, $\nu \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu$, $\operatorname{Re}(\rho+\nu) > 0$, $\operatorname{Re}\rho > 0$.

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Re}\rho > 0$, $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\nu$, $k\rho + \nu \notin \mathbb{Z}_0^-$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu, \mu) - 1 = \frac{\Gamma(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu)} \lambda x^\rho \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \rho+\nu, \rho+\mu). \tag{19}$$

Доказательство. По определению (1) запишем

$$\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu, \mu) - 1 = \frac{\Gamma(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu)}\lambda x^\rho + \frac{\Gamma(\rho+\nu)\Gamma(2\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu)\Gamma(2\rho+\mu)}\lambda^2 x^{2\rho} +$$
$$+ \frac{\Gamma(\rho+\nu)\Gamma(2\rho+\nu)\Gamma(3\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu)\Gamma(2\rho+\mu)\Gamma(3\rho+\mu)}\lambda^3 x^{3\rho} + \dots = \frac{\Gamma(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu)}\lambda x^\rho \Big(1 + \frac{\Gamma(2\rho+\nu)}{\Gamma(2\rho+\mu)}\lambda x^\rho +$$
$$+ \frac{\Gamma(2\rho+\nu)\Gamma(3\rho+\nu)}{\Gamma(2\rho+\mu)\Gamma(3\rho+\mu)}\lambda^2 x^{2\rho} + \dots\Big) = \frac{\Gamma(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu)}\lambda x^\rho \Big(1 + \frac{\Gamma(\rho+\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\rho+\mu)}\lambda x^\rho +$$
$$+ \frac{\Gamma(\rho+\rho+\nu)\Gamma(2\rho+\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\rho+\mu)\Gamma(2\rho+\rho+\mu)}\lambda^2 x^{2\rho} + \dots\Big) = \frac{\Gamma(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+\mu)}\lambda x^\rho \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \rho+\nu, \rho+\mu),$$

что и требовалось доказать. □

Подставляя функцию $\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu, \mu)$ в уравнение (18), получим тождество. Тогда, используя формулу (19), имеем

$$I_{0x}^{\mu-\nu} \frac{x^{\rho-\nu-1}}{\Gamma(\rho+\nu)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu, \mu) = \frac{x^{\rho+\mu-1}}{\Gamma(\rho+\mu)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \rho+\nu, \rho+\mu), \tag{20}$$

$$D_{0x}^{\mu-\nu} \frac{x^{\rho+\mu-1}}{\Gamma(\rho+\mu)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \rho+\nu, \rho+\mu) = \frac{x^{\rho+\nu-1}}{\Gamma(\rho+\nu)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu, \mu), \tag{21}$$

где $D_{0x}^{\alpha} f \equiv (D_{0+}^{\alpha} f)(x)$ — левосторонняя производная Римана—Лиувилля [14] порядка $\alpha \geqslant 0$.

Если ввести параметры $\nu_1 = \rho + \nu$ и $\mu_1 = \rho + \mu$, то (20) и (21) приобретут симметричный вид:

$$I_{0x}^{\mu_1 - \nu_1} \frac{x^{\nu_1 - 1}}{\Gamma(\nu_1)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu_1 - \rho, \mu_1 - \rho) = \frac{x^{\mu_1 - 1}}{\Gamma(\mu_1)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu_1, \mu_1), \tag{22}$$

$$D_{0x}^{\mu_1 - \nu_1} \frac{x^{\mu_1 - 1}}{\Gamma(\mu_1)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu_1, \mu_1) = \frac{x^{\nu_1 - 1}}{\Gamma(\nu_1)} \mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho; \nu_1 - \rho, \mu_1 - \rho). \tag{23}$$

Формулы (20)–(23) можно перезаписать в терминах исходных параметров α, β и η ($\mu_1 - \nu_1 = \mu - \nu = \alpha$). Из (22) и (23) легко получаются, в частности, формулы целочисленного интегрирования и дифференцирования.

Заметим, что по своей структуре интегральный оператор $x^\beta I_{0x}^{\alpha} x^\eta$ близок к операторам типа Кобера—Эрдейи [14]. Ниже используется следующая модификация интегро-дифференциального оператора Кобера на конечном отрезке $[a, b]$:

$$I_{ax;\eta}^{\alpha} f \equiv D_{ax;\eta}^{-\alpha} f = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{(x-a)^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{(t-a)^\eta f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, & \operatorname{Re}\alpha > 0; \\ (x-a)^{-\alpha-\eta} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n+\alpha+\eta} I_{ax;\eta}^{n+\alpha} f, & \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0, \end{array} \right. \tag{24}$$

где $n = [-\mathrm{Re}\alpha] + 1$, $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Оператор (24) можно также назвать левосторонним интегро-дифференциальным оператором Кобера—Эрдейи. Очевидно, при $a = 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ он совпадает с левосторонним интегро-дифференциальным оператором типа Эрдейи—Кобера $I_{ax;\sigma,\eta}^{\alpha}$ с $a = 0$ и $\sigma = 1$, то есть $I_{0x;\eta}^{\alpha} \equiv I_{0x;1,\eta}^{\alpha} f$ [14, стр. 246, формулы (18.1), (18.2)].

Из определения интегро-дифференциального оператора Кобера видно, что формулы (24) при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ задают интегральный оператор

$$I_{ax;\eta}^{\alpha} f = (x-a)^{-\alpha-\eta} I_{ax}^{\alpha} (x-a)^\eta f(x), \tag{25}$$

определённый на функциях $(x-a)^\eta f(x) \in L(a, b)$, а при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$ после переобозначения $\beta = -\alpha$ — дифференциальный оператор

$$D_{ax;\eta}^{\beta} f = (x-a)^{\beta-\eta} D_{ax}^{\beta} (x-a)^\eta f(x). \tag{26}$$

Достаточным условием существования производной (26) является принадлежность $I_{ax}^{n-\beta}(x-a)^\eta f(x)$ классу $AC^n[a, b]$, где $n = [\operatorname{Re}\beta] + 1$.

Соотношения (25), (26) позволяют изучать свойства оператора (24) с помощью известных свойств интегралов и производных Римана—Лиувилля. Разумеется, эти свойства могут быть получены как частные случаи свойств, приведённых в монографии [14] для оператора Эрдейи—Кобера, если положить $a = 0$, $\sigma = 1$. Заметим в этой связи, что формулы композиций операторов $I_{ax;\sigma,\eta}^{\alpha}$, $I_{ax;\sigma,\eta+\alpha}^{\beta}$ в [14, стр. 247, формула (18.6)] указаны ошибочно. В действительности при $\sigma = 1$ имеют место следующие соотношения:

$$I_{ax;\eta+\beta}^{\alpha} I_{ax;\eta}^{\beta} f = I_{ax;\eta}^{\alpha+\beta} f = I_{ax;\eta+\alpha}^{\beta} I_{ax;\eta}^{\alpha} f, \tag{27}$$

$$I^{\alpha}_{ax;\eta}I^{\beta}_{ax;\eta-\beta}f = I^{\alpha+\beta}_{ax;\eta-\beta}f, \tag{28}$$

$$I^{\beta}_{ax;\eta}I^{\alpha}_{ax;\eta-\alpha}f = I^{\alpha+\beta}_{ax;\eta-\alpha}f. \tag{29}$$

Докажем первое равенство в (27), например, для интегральных операторов ($\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$). По формуле (25) имеем

$$I^{\alpha}_{ax;\eta+\beta}I^{\beta}_{ax;\eta}f = (x-a)^{-\alpha-\eta-\beta}I^{\alpha}_{ax}I^{\beta}_{ax}(x-a)^{\eta}f = \\ = (x-a)^{-(\alpha+\beta)-\eta}I^{\alpha+\beta}_{ax}(x-a)^{\eta}f = I^{\alpha+\beta}_{ax;\eta}f. \tag{30}$$

Второе равенство в (27) является следствием симметрии $I^{\alpha+\beta}_{ax;\eta}f \equiv I^{\beta+\alpha}_{ax;\eta}f$ и полугруппового свойства интегралов Римана—Лиувилля [14]. Соотношение (28) получается из (30) заменой $\eta+\beta=\eta_1$, а равенство (29) следует из (28) заменой α на β, а β на α.

Приведём ещё вариант композиционного тождества, который получается из (27) заменой $\eta+\beta=\nu$, $\alpha+\nu=\mu$:

$$I^{\mu-\nu}_{ax;\nu}I^{\nu-\eta}_{ax;\eta}f = I^{\mu-\nu}_{ax;\eta}f. \tag{31}$$

Отметим, что свойства (27)–(31) для интегральных операторов справедливы, если $(x-a)^{\eta}f(x) \in L(a,b)$. В случае интегро-дифференциальных операторов класс допустимых функций должен оговариваться дополнительно.

В монографии [14] приведены выражения обратных операторов Эрдейи—Кобера, в частности, для левостороннего оператора

$$(I^{\alpha}_{ax;\sigma,\nu})^{-1}f = I^{-\alpha}_{ax;\sigma,\eta+\alpha}f. \tag{32}$$

Пусть $\sigma = 1$. Конкретизируем соотношение (32) с указанием допустимых классов функций.

Если $\alpha > 0$, то

$$(I^{\alpha}_{ax;\eta})^{-1}f = I^{-\alpha}_{ax;\eta+\alpha}f \equiv D^{\alpha}_{ax;\eta+\alpha}f \tag{33}$$

является левым обратным оператором для $I^{\alpha}_{ax;\eta}$, то есть

$$D^{\alpha}_{ax;\eta+\alpha}I^{\alpha}_{ax;\eta}f = f(x), \tag{34}$$

если $(x-a)^{\eta}f(x) \in L(a,b)$.

Действительно, $D^{\alpha}_{ax;\eta+\alpha}I^{\alpha}_{ax;\eta}f = (x-a)^{-\eta}D^{\alpha}_{ax}I^{\alpha}_{ax}(x-a)^{\eta}f(x) = f(x)$, так как $D^{\alpha}_{ax}I^{\alpha}_{ax}\varphi = \varphi(x)$, для функций $\varphi(x) \in L(a,b)$.

Если $\alpha \leqslant 0$, то, обозначая $-\alpha = \beta$, из (32) при $\sigma = 1$ получим оператор

$$(I^{-\beta}_{ax;\eta})^{-1}f = (D^{\beta}_{ax;\eta})^{-1}f = I^{\beta}_{ax;\eta-\beta}f, \tag{35}$$

являющийся левым обратным для $D^{\beta}_{ax;\eta}$, для функций $(x-a)^{\eta}f(x) \in I^{\beta}_{ax}(L)$, где $I^{\beta}_{ax}(L)$ — класс функций, представимых левосторонним интегралом Римана—Лиувилля порядка β [14]. Таким образом, для $\alpha > 0$

$$I^{\alpha}_{ax;\eta-\alpha}D^{\alpha}_{ax;\eta}f = f(x), \tag{36}$$

если $(x-a)^\eta f(x) \in I^\alpha_{ax}(L)$.

Заметим, что обратный оператор из (33) будет являться также правым обратным для $I^\alpha_{ax;\eta}$ на функциях $(x-a)^{\eta+\alpha} f(x) \in I^\alpha_{ax}(L)$. Это видно из соотношения (36) при замене $\eta-\alpha=\eta_1$. Аналогично, обратный оператор из (35) будет являться и правым обратным для $D^\alpha_{ax;\eta}$ на функциях $(x-a)^{\eta-\alpha} f(x) \in L(a,b)$. Это видно из (34) при замене $\eta+\alpha=\eta_1$.

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}\eta$. *Тогда*

$$D^{\mu-\nu}_{ax;\mu} I^{\mu-\nu}_{ax;\nu}\varphi = \varphi(x) \tag{37}$$

выполняется для функций $\varphi(x) : (x-a)^\nu \varphi(x) \in L(a,b)$, *а*

$$I^{\mu-\nu}_{ax;\nu} D^{\mu-\nu}_{ax;\mu} f = f(x) \tag{38}$$

— для функций $f(x) : (x-a)^\mu f(x) \in I^{\mu-\nu}_{ax}(L)$.

Если же $(x-a)^\mu f(x) \in L(a,b)$ *и* $I^{n-\alpha}_{ax}(x-a)^\mu f(x) \in AC^n[a,b]$, *то вместо* (38) *имеем*

$$I^{\mu-\nu}_{ax;\nu} D^{\mu-\nu}_{ax;\mu} f = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lim\limits_{x\to a+} (x-a)^{\nu+k} D^{\mu-\nu-k}_{ax;\mu} f}{(x-a)^{\nu+k}\Gamma(\mu-\nu-k+1)}. \tag{39}$$

Доказательство. Формулы (37) и (38) следуют из (34) и (36) заменой в (34) η на ν, а в (36) — η на μ при $\alpha=\mu-\nu$. Осталось доказать (39).

Заметим, что требование $I^{n-\alpha}_{ax}(x-a)^\mu f(x) \in AC^n[a,b]$ обеспечивает суммируемость образа дифференциального оператора $D^{\mu-\nu}_{ax}(x-a)^\mu f(x)$.

Рассмотрим композицию операторов

$$I^{\mu-\nu}_{ax;\nu} D^{\mu-\nu}_{ax;\mu} f = (x-a)^{-\mu} I^{\mu-\nu}_{ax} D^{\mu-\nu}_{ax}(x-a)^\mu f =$$
$$= f(x) - (x-a)^{-\mu} \sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{f}^{(n-k)}_{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha-k+1)}(x-a^{\alpha-k}),$$

где $\alpha=\mu-\nu$, $\widetilde{f}(x)=(x-a)^\mu f(x)$, $\widetilde{f}^{(n-k)}_{n-\alpha}(a+) = \lim\limits_{x\to a+}(\frac{d}{dx})^{n-k} I^{n-\alpha}_{ax}\widetilde{f} = \lim\limits_{x\to a+} D^{\alpha-k}_{ax}(x-a)^\mu f(x)$ и использовано соответствующее тождество для композиции $I^\alpha_{ax}D^\alpha_{ax}$ в классе суммируемых функций [14].

Записывая выражение

$$D^{\alpha-k}_{ax}(x-a)^\mu f(x) = (x-a)^{k-\alpha+\mu} D^{\alpha-k}_{ax;\mu} f = (x-a)^{\nu+k} D^{\mu-\nu-k}_{ax;\mu} f,$$

получим (39). Лемма доказана. □

Замечание. Формула (39) записана целиком в терминах оператора Кобера. Практически удобнее использовать её в следующей редакции:

$$I^{\mu-\nu}_{ax;\nu} D^{\mu-\nu}_{ax;\mu} f = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lim\limits_{x\to a+} D^{\mu-\nu-k}_{ax}(x-a)^\mu f(x)}{(x-a)^{\nu+k}\Gamma(\mu-\nu-k+1)}.$$

Возвращаясь к функции $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$, приведём формулы её интегрирования и дифференцирования по Коберу.

Из формул (22) и (23) с использованием переобозначений $\mu_1=\mu$, $\nu_1=\nu$ в силу (25) и (26) получим

$$I^{\mu-\nu}_{0x;\nu-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu-\rho,\mu-\rho)=\Gamma\binom{\nu}{\mu}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu,\mu),$$

$$D^{\mu-\nu}_{0x;\mu-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu,\mu)=\Gamma\binom{\mu}{\nu}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu-\rho,\mu-\rho),$$

а из формул (20), (21) — формулы преобразования функции $\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu,\mu)$ с весом:

$$I^{\mu-\nu}_{0x;\nu}x^{\rho-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu,\mu)=\Gamma\binom{\rho+\nu}{\rho+\mu}x^{\rho-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\rho+\nu,\rho+\mu), \tag{40}$$

$$D^{\mu-\nu}_{0x;\mu}x^{\rho-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\rho+\nu,\rho+\mu)=\Gamma\binom{\rho+\mu}{\rho+\nu}x^{\rho-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\nu,\mu). \tag{41}$$

Формулы (40) и (41) являются частными случаями более общих соотношений ($\mathrm{Re}\,\gamma>0$):

$$I^{\alpha}_{0x;\eta}x^{\gamma-\eta-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\gamma-\rho,\gamma-\rho+\alpha)=\Gamma\binom{\gamma}{\gamma+\alpha}x^{\gamma-\eta-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\gamma,\gamma+\alpha), \tag{42}$$

$$D^{\alpha}_{0x;\eta+\alpha}x^{\gamma-\eta-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\gamma,\gamma+\alpha)=\Gamma\binom{\gamma+\alpha}{\gamma}x^{\gamma-\eta-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\gamma-\rho,\gamma-\rho+\alpha). \tag{43}$$

Очевидно, при $\gamma-\eta=\rho$, $\eta=\nu$, $\mu=\eta+\alpha=\nu+\alpha$ формулы (42) и (43) совпадают с (40) и (41). Справедливость соотношений (42) и (43) легко устанавливается, если заметить, что исходное интегральное уравнение (13) в терминах интегрального оператора Кобера (24) записывается в виде

$$y(x)-kx^\rho I^{\alpha}_{0x;\eta}y=kx^{\sigma-1}, \tag{44}$$

а его решение —

$$y(x)=kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_\rho(\lambda x^\rho;\sigma-\rho+\eta,\sigma-\rho+\eta+\alpha).$$

Используя лемму 2, формулу (19) и обозначение $\sigma+\eta=\gamma$, приходим к (42). Равенство (43) следует из соотношения (42) и тождества (34).

Заключение. В теории и практике построения решений для интегральных уравнений типа (12) или (44) функции $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ и $\mathcal{E}_\rho(z;\mu)$ играют ту же роль, что и функция типа Миттаг—Леффлера в решении уравнения Вольтерры второго рода с ядром Абеля. Не представляет большого труда получить явные решения уравнений (12) или (44) для бесконечно дифференцируемого на конечном отрезке $[0,l]$ свободного члена $f(x)$ или функции, представимой обобщённым степенным рядом $f(x)=x^{\sigma-1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x^\gamma)^n$ ($\sigma>0$, $\gamma>0$). Как было отмечено во введении, функции вида (1) и (2) возникают при решении начальных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля и переменными коэффициентами. Основным методом обоснования корректности постановки этих задач и их решения является идея редукции дифференциального уравнения к соответствующему интегральному уравнению вольтерровского типа. Располагая явными решениями интегральных уравнений, можно найти решения начальных задач (задача типа Коши, видоизменённая задача Коши) для некоторых линейных дифференциальных уравнений с производными Римана—Лиувилля или Кобера и переменными коэффициентами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kilbas A. A., Saigo M.* On solution of integral equation of Abel–Volterra type // *Diff. Integr. Equat.*, 1995. Vol. 8, no. 5. Pp. 547–576.
2. *Kilbas A. A., Saigo M.* On Mittag–Leffler type function, fractional calculus operators and solutions of integral equations // *Integral Transform. Spec. Funct.*, 1996. Vol. 4, no. 4. Pp. 335–370.
3. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Rogozin S. V.* On the generalized Mittag–Leffler type function // *Integral Transform. Spec. Funct.*, 1998. Vol. 7, no. 3–4. Pp. 215–224.
4. *Горенфло Р., Килбас А. А., Рогозин С. В.* О свойствах обобщённой функции Миттаг—Леффлера // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*, 1998. Т. 42, № 5. С. 34–39. [*Gorenflo R., Kilbas A. A., Rogozin S. V.* On the properties of a generalized Mittag–Leffler type function // *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 1998. Vol. 42, no. 5. Pp. 34–39].
5. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies, 204; ed. J. van Mill. Amsterdam: Elsevier, 2006. Pp. 523.
6. *Огородников Е. Н.* Нелокальные краевые задачи для одного модельного параболо-гиперболического уравнения с дробной производной / В сб.: *Труды четвёртой Всероссийской научной конференции с международным участием* (29–31 мая 2007 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2007. С. 147–152. [*Ogorodnikov E. N.* A nonlocal boundary value problems for one model parabolic-hyperbolic equation with fractional derivative / In: *Proceedings of the Fourth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2007). Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2007. Pp. 147–152].
7. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
8. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. III / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1955. 292 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1973. 299 с.
9. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [*Dzhrbashyan M. M.* Integral transforms and representations of functions in complex domain. Moscow: Nauka, 1966. 672 pp.]
10. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications / Mathematics in Science and Engineering, 198. San Diego: Academic Press, 1999. 340 pp.
11. *Огородников Е. Н.* О задаче Коши для модельных дифференциальных уравнений дробных осцилляторов / В сб.: *Современные проблемы вычисл. мат. и мат. физики.* М.: ВМК МГУ; Макс Пресс, 2009. С. 229–231. [*Ogorodnikov E. N.* On the Cauchy

problem for the model differential equations of fractional oscillator / In: *Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Moscow: VMK MGU; Maks Press, 2009. Pp. 229–231].

12. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 276–279. [*Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S.* Some special functions in the solution to Cauchy problem for a fractional oscillating equation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 1(18). Pp. 276–279].
13. *Огородников Е. Н.* О двух специальных функциях, обобщающих функцию типа Миттаг—Леффлера, их свойства и применение / В сб.: *Вторая международная конференция «Математическая физика и её приложения»*: Материалы международной конф. (Самара, 29 августа – 4 сентября, 2010 г.). Самара: Книга, 2010. С. 248–249. [*Ogorodnikov E. N.,* On two special functions that generalize the Mittag–Leffler type function, their properties and applications / In: *The Second International Conference "Mathematical Physics and Its Applications"*: Proc. of International Conf. (Samara, August 27 – September 2, 2012.). Samara: Kniga, 2010. Pp. 248–249].
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [*Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
15. *Нахушев А. М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // *Дифференц. уравнения*, 1974. Т. 1, № 10. С. 100–111. [*Nakhushev A. M.* Inverse problems for degenerating equations and Volterra integral equations of the third kind // *Differents. Uravneniya*. Vol. 10, no. 1. Pp. 100–111].
16. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с. [*Nakhushev A. M.* Fractional Calculus and its Applications. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 pp.]
17. *Tricomi F.* Integral Equations / Pure and Applied Mathematics, 5. New York: Interscience Publishers, 1957. Pp. 246; русск. пер.: *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: Иностр. лит., 1960. 300 с.
18. *Огородников Е. Н.* О некоторых краевых задачах для системы уравнений Бицадзе—Лыкова с инволютивной матрицей / В сб.: *Труды десятой межвузовской научной конференции.* Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2000. С. 119–126. [*Ogorodnikov E. N.* On some boundary value problems for system of the Bitsadze–Lykov equations with involutive matrix / In: *Proceedings of the Tenth Interuniversity Scientific Conference.* Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2000. Pp. 119–126].
19. *Огородников Е. Н.* Корректность задачи Коши–Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. № 26. С. 26–38. [*Ogorodnikov E. N.* The correctness of the Cauchy–Goursat problem for loaded degenerate hyperbolic equations in some special cases, and its equivalent to the problem with nonlocal boundary conditions // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2004. no. 26. Pp. 26–38].
20. *Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова* Некоторые нелокальные аналоги задачи Коши–Гурса и существенно нелокальные краевые задачи для системы уравнений Бицадзе–Лыкова в специальных случаях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005. № 34. С. 24–39. [*Ogorodnikov E. N., Arlanova E. Yu.* Some non-local analogues of the Cauchy–Goursat problem and essentially nonlocal boundary value problems for system of the Bitsadze–Lykov equations in special cases // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2005. no. 34. Pp. 24–39].
21. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* О некоторых свойствах операторов с функциями типа Миттаг–Леффлера в ядрах / В сб.: *Труды шестой Всероссийской научной конференции*

с международным участием (1–4 июня 2009 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2009. С. 181–188. [*Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S.* On some properties of operators with Mittag-Leffler type functions in kernels / In: *Proceedings of the Sixth All-Russian Scientific Conference with international participation* (1–4 June 2009). Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2009. Pp. 181–188].

22. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 24–36. [*Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S.* Setting and solving of the Cauchy type problems for the second order differential equations with Riemann–Liouville fractional derivatives // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(20). Pp. 24–36].
23. *Колмогоров А. Н., Фомин А. Н.* Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с. [*Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1976. 543 pp.]

Поступила в редакцию 20/XI/2011;
в окончательном варианте — 27/III/2012.

MSC: 33E12; 26A33, 34K37

ON TWO SPECIAL FUNCTIONS, GENERALIZING THE MITTAG-LEFFLER TYPE FUNCTION, THEIR PROPERTIES AND APPLICATIONS

E. N. Ogorodnikov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `eugen.ogo@gmail.com`

Two special functions, concerning Mittag-Leffler type functions, are studied. The first is the modification of generalized Mittag–Leffler function, which was introduced by A. A. Kilbas and M. Saigo; the second is the special case of the first one. The relation of these functions with some elementary and special functions and their role in solving of Abel–Volterra integral equations is indicated. The formulas of the fractional integration and differentiation in sense of Riemann–Liouville and Kober are presented. The applications to Cauchy type problems for some linear fractional differential equations with Riemann-Liouville and Kober derivatives are noticed.

Key words: *special functions, Mittag–Leffler type function, Riemann–Liouville integral and differential operators, fractional differential and integral equations, Cauchy type problems.*

Original article submitted 20/XI/2011;
revision submitted 27/III/2012.

Eugeniy N. Ogorodnikov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.